سلسلۂ مطبوعات جامعۂ عثمانیہ

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصۂ اوّل

مع توضیحات از علم ہندسہ، علم حیل، وطبیعیات

مصنفۂ

جارج اے گبسن ایم-اے-ایل-ایل ڈی-ایف آر ایس ای

جس کا

قاضی محمد حسین صاحب ایم-اے

پروفیسر کلیہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی نے اردو میں ترجمہ کیا

سنہ ۱۳۴۵ھ م سنہ ۱۳۳۶ف م سنہ ۱۹۲۶ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

انگریزی و یونانی حروف کے لئے مماثل عربی حروف اختیار کئے ہیں جن کے ساتھ مطابقت آیندہ سے سائنس کے تمام شعبوں میں لازمی ہوگی، ان کی فہرست حوالہ کے طور پر یہاں دیجاتی ہے، براہ کرم اس کتاب کی تفصیلی ترقیم کو اِن حروف کی مطابقت سے پڑھا جائے۔

مترجم

مفرد حروف انگریزی و یونانی کے مماثل مجوزہ حروف۔

A	B	C	D	E	F	G	H
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح
I	J	K	L	M	N	O	P
آ	ژ	ک	ل	م	ن	ط	پ
Q	R	S	T	U	V	W	X
ق	ر	س	ت	ء	و	ھ	لا
Y	Z						
ما	ے						

انگریزی کے بڑے (CAPITAL) حروف بخط عربی لکھے جائینگے اور چھوٹے حروف بخط فارسی۔ نیز بڑے حروف جلی لکھے جائینگے اور ان کے لئے پیمانہ بھی بڑا ہوگا۔

a b c d .....

ا ب ج د ....

A' B' C' D' .....

اَ بَ جَ دَ ....

A_1 B_1 C_1 D_1 .....

ا، ب، ج، د، .....

α β γ δ ε ζ η

یہ ظہ صہ ضہ جہ بہ عہ

θ κ λ μ ν ξ ο π

π ھ ظہ نہ مہ لہ کہ طہ

ρ σ τ υ φ χ ψ ω

سہ پہ خہ فہ چہ ٹہ شہ رٰ غہ

یونانی بڑے حروف کے لئے آخر میں ھہ کی بجائے ا لکھا جائے گا جیسے عا، با، جا.....

دیباچہ

گذشتہ چند سالوں میں عملی سائنس کی تمام شاخوں میں بیحد ترقی ہوئی ہے جسکی وجہ سے طالب علم کے اوقات پر بوجھ بہت بڑھ گیا ہے، اس لئے بعض لوگوں کا خیال ہے کہ ریاضی کتبِ نصاب کی نوعیت میں تبدیلی کی ضرورت ہے۔ اِس لحاظ سے کئی کتب ریاضی شائع ہوئی ہیں جو طلبہ کی خاص خاص جماعتوں کے لئے موزوں کی گئی ہیں، اِن میں صرف اتنی اور اس قسم کی ریاضی مندرج ہوتی ہے جو صرف ان طلبہ کی اغراض کو پورا کرے۔ اس تبدیلی کے حق میں جو دلائل اکثر بیان کئے جاتے ہیں اُن میں سے بعض کے ساتھ ہمیں دلی ہمدردی ہے۔ لیکن یہ ہمیشہ سے درست ہے اور آج بھی درست ہے کہ ریاضی سیکھنے کے لئے کوئی شاہ راہ نہیں ہے اور بغیر جانسوز کوشش کے اِس علم کی کوئی مفید کار تحصیل نہیں ہو سکتی۔

بعض اوقات یہ کہا جاتا ہے کہ اگر طالب علم سادہ قوتوں، قوت نمائی اور لوگارتمی تفاعلوں اور شاید جیب اور جیب التمام کے مشتقوں اور تکملوں کے ساتھ پوری واقفیت رکھتا ہو تو فنِ انجینیری کے لئے علم احصا کی اسقدر بنیاد کافی ہے۔ اِس بیان میں سچائی کی بڑی مقدار موجود ہے، تاہم یاد رہے کہ اگر محض نتائج کے اقتباس اور استعمال کی حد سے زیادہ استعداد مطلوب ہو تو یہ اُن چند اسباق سے حاصل نہیں ہو سکتی جو بالعموم ابتدائی اصولوں کی تشریح کے لئے کافی خیال کئے جاتے ہیں۔ یہ شاید ممکن ہے کہ چند سبقوں میں احصا کے خاص نتائج کی کافی مقدار بیان کر دیجا سکے اور ان کی توضیح بھی کر دیجائے اور ان کی مدد سے طالب علم جیلی اور طبیعی مسائل کی ابتدائی بحث کو ایک حد تک بخوبی سمجھ سکے، لیکن احصا کا اسقدر سطحی کورس اگرچہ فائدہ سے خالی نہیں مگر ہر دو مقدار اور نوعیت کے لحاظ سے

یہ اس قسم کے علمی مضامین کے برجستہ مطالعہ کے لئے مطلق کافی نہیں ہے۔ جیسے متبادل برقی رو کا نظریہ، حرحرکیات، حرکت سیالات، لچک کا نظریہ وغیرہ وغیرہ اور جس طالب علم کی بنیاد محض مندرجہ بالا کورس پر رکھی گئی ہے اُس کے لئے طبعیات اور کیمیا کے جدید معلومات اور مضامین تک رسائی محال ہوگی۔ علاوہ اس کے ہر دور اندیش تعلیمی اسکیم کا یہ مقصد ہونا چاہئے کہ طالب علم اپنے مذاق کے خاص فن میں بذات خود تحقیق و تجسس کرنے کے قابل ہو جائے، جدید سائنس کے نہایت پیچیدہ مسائل اور اسقدر تفصیل جو اس کے ساتھ مخصوص ہے ان سب کی بنا پر یہ کچھ لازم نہیں آتا کہ ریاضی کی تعلیم میں بخل سے کام نہ لیا جائے۔ اس امر کے مدنظر کہ طالب علم کو بالآخر کسی ایک خاص فن میں مہارت حاصل کرنا ہے یہ اور بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی منزلوں میں اُسکی ریاضی کی تعلیم بالکل وہی ہو خواہ بعد میں وہ خالص ریاضی کی تحصیل میں اپنا پورا وقت لگانا چاہئے یا سائنس کی زیادہ عملی شاخوں میں۔ اور یہ خاص طور پر ضروری ہے کیونکہ تحلیل کے اعمال جو کسی حیلی، طبیعی یا کیمیاوی مظہر کے سنجیدہ مطالعہ میں شامل ہوتے ہیں وہ اُن اعمال کے ساتھ بہت کچھ لگاؤ اور اشتراک رکھتے ہیں جو احصا (کیلکولس) کی تعلیم میں منکشف ہوتے ہیں۔

ابتدا میں احصا پر جو کتابیں لکھی گئیں جیسے **مکلارن** اور **سمسن** کے رسالے وہ صرف خالص ریاضی دانوں کے لئے ہی تصنیف نہیں کی گئی تھیں بلکہ اکثر اُنکی توضیحات طبیعی فلسفہ سے حاصل کی گئی تھیں، بعد میں شاید طبیعیات کی وسعت کے بڑھ جانے سے ایسی کتابوں میں احصا کا طبیعی استعمال کم ہوتا گیا اور احصا کی کتابیں ایک حد تک اعلیٰ ہندسہ کے رسالے بن گئے۔ علم ریاضی کی موجودہ صورت حال یہ ہے کہ احصا کی کتابوں کو نہ تو اعلیٰ ہندسہ کی کتب نصاب بن جانا چاہئے اور نہ ہی ان کے لئے طبیعیات انجینیرنگ یا کیمیا کی کتابیں بن جانا درست ہے۔ احصا کے ابتدائی رسالہ سے جو معقول امید کی جاسکتی ہے وہ یہ ہے کہ یہ طالب علم کو احصا کے اصولوں اور اعمال کو آسانی کے ساتھ اپنے ایسے مطالبات میں لگانے کے لئے تیار کرے جن میں احصا عام طور پر استعمال ہوتا ہے۔ اس غرض کو پورا کرنے کے لئے احصا کے مضمون کی توضیح علوم ہندسہ، حیل اور طبیعیات سے ہونی چاہئے جبکہ اِن فنون کی ذاتی اور خصوصی مشکلات کو خاص کتب نصاب

میں تفصیلی بحث کے لئے جگہ دیجائے اور یہ توضیحات اپنا اصل مقصد صرف عام اصولوں پر روشنی ڈالنے کا پورا کریں اور ذہنی مشکلات کو رفع کرنے کی بجائے انہیں اور پیدا نہ کردیں۔ علم کیمیا کے متعلق یہ کہا جاسکتا ہے کہ احصا کے پختہ علم کی اس میں خاص ضرورت ہے کیونکہ کیمیائی تحقیقات میں ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے خواص زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں۔ حال ہیں (Van Laar) کی کتاب [Lehrbuch der Mathematischen Chemie] اس قسم کی تصنیفات کا پیش خیمہ ہے جن سے قطع نظر نہیں ہو سکتی۔

اس میں مذکورہ بالا مقاصد کو حاصل کرنے کی کوشش کی گئی ہے، طالب علم کی ریاضی قابلیت کے متعلق صرف اتنا فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ اس کتاب کے مطالعہ سے پیشتر ہندسہ کے ان مقالوں سے واقف ہے جو اکثر پڑھے جاتے ہیں۔ نیز اسکی استعداد جبر و مقابلہ میں مسئلہ ثنائی تک ہے اور مستوی علم مثلث میں مسئلہ جمع تک ملتف (خیالی) اعداد کو اس کتاب میں استعمال نہیں کیا گیا اور نہ ہی لامتناہی سلسلوں کے علم کو پہلے سے تسلیم کر لیا گیا ہے۔ جدید ریاضی کی باریکیوں کو دیدہ دانستہ جگہ نہیں دی گئی کیونکہ نہ تو وہ مبتدی کے لئے مفید ہیں اور نہ ہی اسکی سمجھ میں آسکتی ہیں۔ ہندسی تخیلات کیطرف متواتر توجہ دلائی گئی ہے اور ساتھ ہی فن کی طبیعی پیدائش کو پیش نظر رکھا گیا ہے۔

شروع کے ابواب میں بہت سا مواد ہے جو نفس مضمون سے تعلق نہیں رکھتا لیکن ترسیموں اور اکائیوں کا نظریہ اسقدر اہمیت رکھتا ہے اور اسقدر نامکمل طور پر پیش کیا جاتا ہے کہ اس کا تذکرہ اس کتاب میں ضروری خیال کیا گیا۔ ہندسہ تحلیلی کے اصولوں کو جہاں تک وہ احصا کے استعمال اور اس کے مبادی اصولوں کی تشریح کے لئے حقیقی طور پر کار آمد ہو سکتے ہیں میں نے بہت تامل کے ساتھ اس کتاب کے متن میں شریک کیا۔ ہندسہ میں احصا کے کثیر استعمال سے اگر قطع نظر کی جائے تو احصا کی تعلیم میں محدودوں کے ہندسہ کے وسیع علم کی چنداں ضرورت نہیں معلوم ہوتی۔ مجھے امید ہے کہ اس ہندسہ کے ابتدائی اصولوں کی کافی تشریح کر دی گئی ہے جو بہت سے طلبہ کی عملی ضروریات کو پورا کرے گی، اعلیٰ مستوی منحنیات اور سطحوں کے نظریہ کی بحث کو میں نے اس کتاب میں جگہ نہیں دی کیونکہ میری رائے میں یہ بحث ابتدائی رسالہ کے موزوں نہیں۔

دوسری جدت اس کتاب میں مساواتوں کے نظریہ کا باب ہے، اس جدت کی صرف

اس لئے ضرورت نہیں محسوس ہوئی کہ اس سے احصا کی علم حساب سے توضیح ہوتی ہے بلکہ اسلئے بھی کہ عملی نقطہ نظر سے یہ مضمون بڑی اہمیت رکھتا ہے اور ماورائی مساواتوں کی بحث پر بہت کم ابتدائی کتابیں موجود ہیں۔

مضمون کی اس عام ترتیب اور ارتقا کو میں نے کئی سالوں سے اپنی جماعتوں کی تدریس میں استعمال کیا ہے، شرح اور انتہا کے تخیلات کی بحث قدرے طولانی ہے لیکن حیلی یا طبیعی سوالات میں احصا کے استعمال کی خاص مشکلات کا مقابلہ کرنے کے لئے تجربہ کی بنا پر میں نے اس طرز عمل کو نہایت سودمند پایا ہے، اگر یہ تخیلات پورے طور پر سمجھ میں آجائیں تو بعد کی ترقی زیادہ سریع اور یقینی ہوتی ہے۔ تفرق اور تکمل کے درمیان کوئی خاص خط فاصل نہیں کھینچا گیا اور تکمل کے کئی ضروری نتائج اس شاخ کا تفصیلی مطالعہ شروع کرنے سے پہلے حاصل کئے گئے ہیں۔ دسویں باب میں رقبوں اور مشتق و تکملی منحنیات کی جو بحث درج کی گئی ہے اس سے محدود تکملہ کی ہندسی تعریف کے لئے ایک حد تک تسلی بخش بنیاد پیدا کرنا ہی مقصود نہیں ہے بلکہ ترسیمی تکمل کے ایک طریقہ کی توضیح کرنا بھی ہے جو انجینیروں کے لئے اہمیت رکھتا ہے اور خالص نظری بحث میں بھی فائدہ سے خالی نہیں۔

حال کی کتب نصاب کی طرح ٹیلر کے مسئلہ کی بحث بہت بعد میں لائی گئی ہے، ابتدائی منزلوں میں اوسط قیمت کا مسئلہ کافی ہے۔ سلسلوں کے استدقاق اور تسلسل کے متعلق ایک حد تک بسیط مسائل اس کتاب کے آخری طرف بحث میں لائے گئے ہیں۔ تاہم مضمون کی بحث ایسی ہے کہ جو اساتذہ معمولی ترتیب کو زیادہ پسند کریں وہ فوراً مسئلہ اوسط قیمت سے لامتناہی سلسلوں اور ٹیلر کے مسئلہ [ابواب پنجم و ششم حصہ دوم] کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل اسقدر تفصیل سے بحث میں نہیں لائے گئے جیسے ایک متغیر کے تفاعل۔ تاہم ان کے نظریہ کے وہ حصے منتخب کرکے پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے جو طبیعی عملیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ کتاب کے اخیر میں ایک چھوٹا سا باب معمولی تفرقی مساواتوں پر ہے جن سے مساواتوں کے ایسے نمونوں کی توضیح ہوتی ہے جو اکثر علم حرکت، طبیعیات، حیلی اور برقی انجینیرنگ میں پائے جاتے ہیں۔

اکثر حصوں کے ساتھ سادہ مشقیں درج ہیں، مثالوں کے ان مستند مجموعوں میں

کئی مسئلے اور نتائج ایسے ملینگے جن کے لئے کتاب کے متن میں جگہ نہیں مل سکتی تھی لیکن اہمیت کے لحاظ سے ان کا بالتصریح بیان کیا جانا ضروری تھا۔ طالب علم کی حوصلہ افزائی کے لئے کہ وہ اپنے تئیں اس مشق و محنت میں ڈالے جو احصا کے استعمال میں سہولت و اعتماد حاصل کرنے کے لئے قطعی طور پر لازمی ہے میں نے زیادہ ضروری امثلہ کے حل کے متعلق بلا تکلف اشارے درج کئے ہیں۔

اس کتاب کی تیاری میں کئی رسالوں کے مطالعہ کرنے کا موقع ہوا اور جہاں کہیں جان بوجھکر کوئی طرز تشریح اختیار کی گئی ہے جو کسی خاص مصنّف کے ساتھ مخصوص ہے اس کا احتیاط سے مناسب اعتراف کر دیا گیا ہے، لیکن جب کوئی شخص سالہاسال سے ایک مضمون پڑھا رہا ہو اس کے لئے اپنے علم کے تمام ماخذوں کا شناخت کر لینا دشوار ہے، پس ممکن ہے کہ میں نے زیادہ وسیع طور پر اقتباس کیا ہو جس کا مجھے علم نہ ہو۔ . . . .

. . . .

. . . .

جارج، اے، گبسن

گلاسگو ستمبر ۱۹۰۱ء

دوسرے ایڈیشن کا دیباچہ

اس ایڈیشن کے لئے کوئی خاص تبدیلیاں پہلے ایڈیشن پر نہیں کی گئیں، تاہم اس میں دو بابوں کا اس غرض سے اضافہ کر دیا گیا ہے کہ یہ کتاب، ریاضی طبیعیات کے طلبہ کے لئے زیادہ مفید بن جائے۔ علامت تکمل کے اندر اعمال کی بحث میں میں نے M. Charles J. de la Vallees Poussin کا طریقہ اختیار کیا ہے جو اُس نے اپنے مکتوب Etude des intégrals à limites infinies میں درج کیا ہے، میری رائے میں اس طریقہ کے اندر سادگی اور صحت نمایاں حد تک موجود ہیں۔ یہ اُمید کیجاتی ہے کہ فوریر کے سلسلوں کا باب اس مضمون کے لئے کافی تمہید ثابت ہوگا لیکن اس امر کی کافی زور سے سفارش نہیں کی جاسکتی کہ طالب علم خود ان دلچسپ صفحات کا مطالعہ کرے اور ان پر پورا عبور حاصل کرے جنمیں خود فوریر کسی اختیاری تفاعل کو موسیقی سلسلوں سے تعبیر کرنے کے عمل کو تکمیل تک پہنچاتا ہے۔

جارج، اے، گبن

گلاسگو نومبر ۱۹۰۵ء

پہلے مطالعہ کیلئے ہدایات

مبتدی احصا کے مطالعہ میں ذیل کی ترتیب اختیار کر سکتے ہیں۔
باب اول تا چہارم۔ پنجم دفعات ۴۴ تا ۴۷، ششم، ہفتم دفعہ ۶۷ (مشق ۱۴ سوالات ۱ تا ۴ اور ۱۱ تا ۱۴)، نہم دفعات ۷۴، تا ۷۶ (مشق ۱۶ ا، ۱۶ ب) دفعہ ۷۸ (مشق ۱۷، سوالات ۱ تا ۶) اس کورس میں جبریہ تفاعلوں کے اساسی خواص معہ انکے دلچسپ استعمال کے شامل ہیں۔
باب پنجم دفعات ۴۸ ۔ ۵۰، ہفتم، ہشتم اور باقی حصہ باب نہم، دہم اور باب اول تا سوم، حصہ دوم
ابواب ا تا ۱۰ پر پورا ملکہ حاصل کر لینے کے بعد ابواب یازدہم، دوازدہم۔ باب چہارم تا ہفتم حصہ دوم کا مطالعہ کیا جائے جیسے ضرورت محسوس ہو۔ جب تکمل کے اعمال میں کچھ استعداد حاصل ہو جائے تو اس کے بعد فوراً آٹھواں باب، حصہ دوم شروع کر دیا جا سکتا ہے۔

فہرست مضامین

(احصا حصۂ اول)

دفعہ	مضمون	صفحہ
	باب اوّل	
	محدد - تفاعل	
۱	سمتی حصے یا قدم	۱
۲	قدموں کا جمع کرنا	۲
۳	تشاکل قدم اور قدموں کی تفریق	۴
۴	نقطہ کا فصلہ - اساسی اصول متعارفہ	۵
۵	قدم کا ناپ	۸
۶	محددوں کے محور - مربع دار کاغذ	۱۰
۷	دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ	۱۴
۸	قطبی محدد	۱۶
۹	متغیر - تسلسل	۱۸
۱۰	مقداروں کی ہندسی تعبیر	۲۰
۱۱	تفاعل - تابع اور متبوع متغیر	۲۰
۱۲	تفاعلوں کے لئے ترقیم	۲۴

۱۳	تصریحی اور تضمینی تفاعل	۲۵
۱۴	کئی قیمتوں والے تفاعل اور مقلوب تفاعل	۲۶
	مشق ۱	۲۹
	باب دوم	
	ترسیمیں۔ منطق تفاعیل	
۱۵	احصا کی غایت۔ ترسیمات	۳۱
۱۶	لا^۲ کی ترسیم	۳۲
۱۷	منحنی کی مساوات۔ تشاکل۔ موڑ کی قیمتیں	۳۵
۱۸	جـ لا^۲ کی ترسیم	۳۸
۱۹	ناپنے کی اکائیاں	۳۹
۲۰	محددوں کا ہندسہ	۴۱
	مشق ۲	۴۴
۲۱	خطی تفاعل۔ مقطوعے	۴۵
۲۲	ڈھال	۴۸
	مشق ۳	۴۹
۲۳	منطق تفاعیل۔ نقطہ عطف یا انعطاف	۵۲
۲۴	متقارب	۵۷
	مشق ۴	۶۲
	باب سوم	
	ترسیمیں۔ جبریہ اور ماورائی تفاعل۔ مخروطی تراشیں	
۲۵	جبریہ تفاعل۔ مقلوب تفاعلوں کی ترسیم۔ قرن	۶۵

۲۶	مخروطی تراشیں	۷۱
۲۷	مبدأ اور محوروں کی تبدیلی	۷۷
	مشق ۵	۸۱
۲۸	ماورائی تفاعل۔ مثلثی تفاعل	۸۵
۲۹	قوت نمائی اور لوکارثمی تفاعل	۸۷
۳۰	ترسیموں کے متعلق عام اشارات	۸۹
	مشق ۶	۹۲

باب چہارم
شرح۔ انتہا

۳۱	شرح	۱۰۰
۳۲	اضافے	۱۰۰
۳۳	یکساں تغیر۔ یکساں شرح کا ناپ	۱۰۳
۳۴	مقداروں کے ابعاد	۱۰۵
۳۵	متغیر شرحیں	۱۰۸
۳۶	اوسط شرح	۱۰۹
۳۷	متغیر شرح کا ناپ	۱۱۲
۳۸	انتہائیں	۱۱۴
۳۹	انتہاؤں کی مثالیں۔ مماس کی تعریف	۱۱۵
۴۰	انتہا کی عام تشریح	۱۲۲
۴۱	انتہا کی تعریف۔ ترقیم۔ انتہا اور قیمت کا فرق	۱۲۳
۴۲	انتہاؤں کے متعلق مسئلے	۱۲۵

۴۳	مثالیں ۔ اسطوانہ اور مخروط کی مساحت	۱۲۸
	باب پنجم	
	تفاعلوں کا تسلسل ۔ خاص انتہائیں	
۴۴	تفاعل کا تسلسل	۱۳۵
۴۵	مسلسل تفاعلوں کے متعلق مسئلے	۱۳۸
۴۶	ابتدائی تفاعلوں کا تسلسل	۱۳۹
۴۷	$\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \dfrac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}}$	۱۴۱
۴۸	$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ ، عدد قو	۱۴۳
۴۹	تفاعل $\text{قو}^{\text{لا}}$	۱۴۸
۵۰	سود مرکب کا کلیہ	۱۵۰
	مشق ۷	۱۵۲
	باب ششم	
	تفرق ۔ جبریہ تفاعل	
۵۱	مشتق ۔ تفرق	۱۵۹
۵۲	بڑھنے اور گھٹنے والے تفاعل ۔ اعلیٰ قیمتیں	۱۶۳
۵۳	مشتق کی ہندسی تعبیر	۱۶۵
۵۴	مشتق تفاعل کی ترسیم بنانے میں کسطرح مدد دیتا ہے	۱۶۸

۵۵	ایسی صورتیں جہاں مشتق، معین عدد نہیں ہے	۱۷۰
۵۶	روانی یا بہاؤ۔ رفتار	۱۷۱
۵۷	قوت کا مشتق	۱۷۵
۵۸	عام مسائل	۱۷۶
	مشق ۸	۱۸۲
۵۹	تفاعل کے تفاعل کا مشتق اور مقلوب تفاعلوں کے مشتق	۱۸۴
	مشق ۹	۱۹۱
۶۰	تفرقہ	۱۹۳
۶۱	ہندسی استعمال۔ مماس، زیر مماس وغیرہ	۱۹۶
۶۲	قوس کا مشتق	۱۹۹
	مشق ۱۰	۲۰۱
	باب ہفتم	
	تفرق (مسلسل)، ماورائی تفاعل، اعلیٰ رتبہ کے مشتق	
۶۳	مثلثی تفاعلوں کے مشتق	۲۰۷
	مشق ۱۱	۲۱۰
۶۴	مقلوب مثلثی تفاعل	۲۱۴
	مشق ۱۲	۲۱۷
۶۵	قوت نمائی اور لوگارتمی تفاعل	۲۱۸
	مشق ۱۳	۲۲۴
۶۶	زائدی تفاعل	۲۲۶

۶۷	اعلےٰ رتبے کے مشتق	۲۳۰
۶۸	لیب نیز کا مسئلہ، مثالیں	۲۳۳
	مشتق ۱۴	۲۳۷
	باب ہشتم	
	مشتق کا طبیعیات میں استعمال	
۶۹	علم حرکت میں مشتقات کا استعمال۔ موسیقی حرکت۔ قوہ	۲۴۲
۷۰	لچک اور پھیلاؤ کی قدریں	۲۵۶
۷۱	ایصال حرارت	۲۵۸
	مشتق ۱۵	۲۶۱
	باب نہم	
	اوسط قیمت کے مسئلے۔ اعظم اور اقل قیمتیں۔ نقاط عطف	
۷۲	رول کا مسئلہ اور اوسط قیمت کے مسائل۔	۲۶۵
۷۳	اوسط قیمت کے مسئلہ کی دیگر شکلیں	۲۶۹
۷۴	اعظم اور اقل قیمتیں	۲۷۲
۷۵	مثالیں۔ تو دلا جب (ب لا + ج) کی ترسیم	۲۷۶
۷۶	ابتدائی طریقے	۲۸۲
۷۷	موڑ کی قیمت کے قریب تغیر	۲۸۶
	مشتق ۱۶ (ا)، ۱۶ (ب)، ۱۶ (ج)	۲۸۸ تا ۲۹۶
۷۸	تقعر و تحدب۔ نقاط عطف	۲۹۶
	مشتق ۱۷	۲۹۹
	باب دہم	

مشتق و تکملی منحنیات۔ تکملی تفاعل۔ گردشی سطح کے حجم اور رقبہ کے مشتق۔ قطبی ضابطے۔ صغارے

۷۹	مشتق منحنی	۳۰۱
۸۰	رقبہ کا مشتق	۳۰۴
۸۱	رقبہ کی تعبیر	۳۰۶
۸۲	تکملی تفاعل	۳۰۷
۸۳	تکملی منحنی	۳۱۱
۸۴	ترسیمی تکمل	۳۱۴
۸۵	گردشی سطحیں	۳۱۴
۸۶	صغارے	۳۱۸
۸۷	اساسی مسائل	۳۲۱
۸۸	قطبی ضابطے	۳۲۷
	مشق ۱۸	۳۲۹

باب یازدہم
جزوی تفرق

۸۹	جزوی تفرق۔ دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کا تسلسل	۳۳۳
۸۹(ا)	تین ابعاد کا ہندسۂ تحلیلی۔ سمتی جیوب التمام۔ خط اور سطح مستوی کی مساواتیں۔ سطح کی مساوات۔	۳۳۴
۹۰	پورا مشتق۔ پورا تفرقہ	۳۴۵
۹۱	ہندسی توضیحات۔ مماسی سطح مستوی، عماد	۳۵۱
۹۲	دی ہوئی سمت میں تغیر کی شرح۔ زاویوں پر نوٹ۔	۳۵۷
۹۳	اعلےٰ رتبہ کے مشتق۔ مبادلہ کی خاصیت، لاپلاس کی مساوات	۳۶۰
۹۴	کامل تفرقے	۳۶۷
۹۵	علم حیل میں استعمال۔ قوہ	۳۶۹

۹۶	حر، حرکیات میں استعمال	۳۷۳
۹۷	چار حر احر کی ارتباط	۳۷۷
۹۸	متغیر کی تبدیلی ۔ اعلے رتبہ کے تفرقے	۳۸۱
۹۹	لف ۲ع کا استحالہ	۳۸۴
	مشق ۱۹	۳۸۹
	باب دوازدہم	
	مساواتوں کے نظریہ میں استعمال	
۱۰۰	منطق تکملی تفاعل ۔ صفر	۳۹۶
۱۰۱	کوئی مسلسل تفاعل	۳۹۸
۱۰۲	مساوات کی تقریبی اصلیں معلوم کرنیکے لئے نیوٹن کا طریقہ	۳۹۹
۱۰۳	درجہ تقرب کی جانچ	۴۰۰
۱۰۴	مثالیں	۴۰۳
۱۰۵	متواتر تقربات	۴۰۵
۱۰۶	اصل کا پھیلاؤ سلسلہ کی شکل میں	۴۰۷
۱۰۷	مساوات لا = مس لا	۴۱۱
	مشق ۲۰	۴۱۳
۱۰۸	اجزائے متناسب	۴۱۶
۱۰۹	چھوٹی تصحیحات	۴۲۰
	مشق ۲۱	۴۲۴
	جوابات	۴۲۷

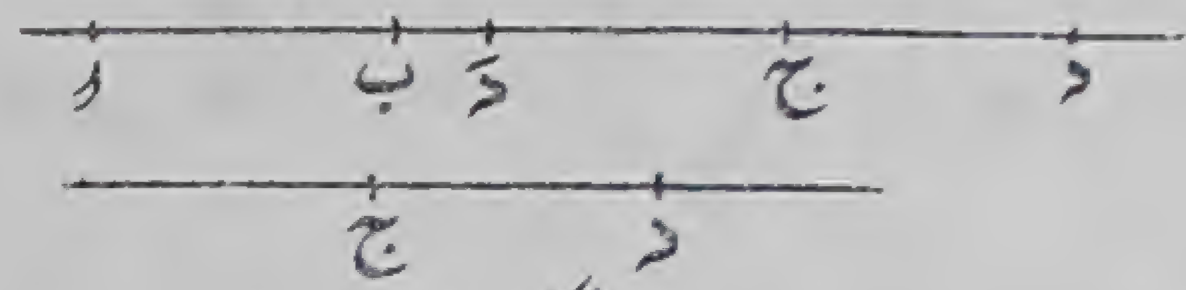
احصا کا ابتدائی رسالہ

باب اول

محدد اور تفاعل

ا۔ سمتی حصے یا قدم۔ فرض کرو کہ ایک خط مستقیم پر دو نقطے ا اور ب ہیں، ملاحظہ ہو شکل (۱)، ابتدائی علم ہندسہ میں خط کے اُس حصے کو جو ا اور ب کے درمیان ہے بلا امتیاز اب یا ب ا سے تعبیر کرتے ہیں اور حروف کی ترتیب کوئی معنی نہیں رکھتی۔ لیکن کئی اغراض کے لحاظ سے یہ زیادہ مفید ہوگا اگر ہم ذیل کے دو حصوں میں تمیز کریں (۱) وہ حصہ جو کوئی متحرک نقطہ ا سے ب تک جانے میں طے کرتا ہے۔ (۲) وہ حصہ جو متحرک نقطہ ب سے ا تک جانے میں طے کرتا ہے۔ جب اس امتیاز کو ملحوظ رکھا جائے تو حصہ کو سمتی حصہ یا محض سمتی یا قدم کہتے ہیں اور اس امتیاز کی تخصیص حصۂ مذکورہ کو تعبیر کرنے والے حروف کی ترتیب کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ مثلاً اب سے وہ حصہ مراد ہے جو ایک نقطہ مقام ا سے ب تک جانے میں مرتسم کرتا ہے اور برعکس اس کے ب ا سے وہ حصہ تعبیر ہوتا ہے جو کوئی نقطہ مقام ب سے ا تک جانے میں

مرتسم کرتا ہے۔ سمتی اب کا مطلق طول تو وہی ہے جو ب ا کا مگر
ان کی سمتیں مختلف ہیں۔



شکل (۱)

دو قدموں اب اور ج د کو مساوی اس وقت کہتے ہیں جبکہ (۱)
وہ ایک ہی خطِ مستقیم یا متوازی خطوطِ مستقیم پر ہوں (۲) اب
اور ج د کے طول مساوی ہوں اور (۳) د ج کے اسی طرف
واقع ہو جس طرف کہ ب، ا سے واقع ہے۔ اگر دَ، ج سے
اتنے ہی فاصلہ پر ہو جتنے فاصلہ پر د ہے لیکن مخالف سمت میں
واقع ہو تو اس صورت میں اب، ج دَ کے مساوی نہیں ہوگا
لیکن دَ ج کے مساوی ہوگا کیونکہ قدم اب کا طول اور سمت
وہی ہے جو ج د کی یا دَ ج کی ہے، برعکس اس کے اگرچہ اب
کا طول ج دَ کے طول کے مساوی ہے لیکن اس کی سمت وہی
نہیں ہے جو ج دَ کی ہے۔ اس لئے سمتوں کی مندرجہ بالا تعریف
کے مطابق اب کو ج دَ کے مساوی نہیں کہا جاسکتا۔

۲۔ **قدموں کا جمع کرنا۔** فرض کرو کہ کسی خطِ مستقیم پر ا،
ب، ج تین نقطے ہیں۔ اب نقاط ا، ب، ج کے اضافی مقامات
خواہ کچھ ہی ہوں وہ نقطہ جو خطِ مستقیم پر پہلے ا سے ب تک
اور پھر ب سے ج تک جاتا ہے وہ بالآخر خطِ مستقیم پر بلحاظ ا
کے اسی مقام پر ہوتا ہے جس مقام پر وہ سیدھا ا سے ج تک
جانے میں ہوتا۔ پس ا ج کو سمتیوں اب اور ب ج کا حاصل
جمع کہتے ہیں۔ اور سمتیوں کی جمع کے عمل کو ذیل کی مساوات
سے تعبیر کرتے ہیں

اب + ب ج = ا ج

جب ب، ا اور ج کے درمیان واقع ہو تو قدموں اب اور ب ج کے طولوں کا مجموعہ قدم ا ج کے طول کے برابر ہوتا ہے، اس لئے اس صورت میں قدموں کی جمع معمولی حصول کی جمع ہائے مہندسی مفہوم کے مطابق ہوتی ہے جن میں کہ محض ان کے مطلق طولوں کو ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ لیکن جب ب، ا اور ج کے درمیان واقع نہ ہو تو قدموں اب اور ب ج کے مطلق طولوں کا مجموعہ قدم ا ج کے طول کے مساوی نہیں ہوتا۔ ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ قدموں کو مثبت اور منفی خیال کیا جا سکتا ہے اور قدموں کی جمع جبریہ جمع کے ساتھ مطابقت رکھتی ہے۔

اگر خط پر ایک چوتھا نقطہ د کہیں واقع ہو تو

اب + ب ج + ج د = ا ج + ج د = ا د

اور اسی طرح سے قدموں کی کسی تعداد کے مجموعہ کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

اب اور ج د کا حاصل جمع اس صورت میں معلوم کرنیکے لئے جبکہ ب اور ج ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں قدم ب ع کو ج د کے مساوی لو، تب

اب + ج د = اب + ب ع = ا ع

اگر لا کوئی مثبت عدد ہو تو لا × اب سے ایک ایسا قدم مراد ہے جس کی سمت وہی ہے جو اب کی ہے اور جس کے طول کو اب کے طول کے ساتھ نسبت لا : ا ہے۔

مثلاً ۳ اب سے اب کی سمت میں اس سے تگنا قدم مراد ہے اور ۵/۲ اب سے ایک ایسا قدم مراد ہے جس کی سمت وہی ہے جو اب کی ہے اور جس کا طول اب کے طول کا ۵/۲ ہے۔

طالب علم آسانی سے دیکھ سکتا ہے کہ عددوں کو جمع کرنیکے قوانین مبادلہ و اجتماع قدموں پر بھی صادق آتے ہیں۔

۴۔ متشاکل قدم اور قدموں کی تفریق۔ اگر دفعہ ماقبل کی پہلی صورت میں یہ فرض کیا جائے کہ نقطہ ج، ا پر منطبق ہو جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ اج صفر قدم اا بن جاتا ہے۔ پس رموزی ترقیم میں

اب + ب ا = اا = ۰۔

اسی طرح اب + ب ج + ج ا = اج + ج ا = ۰۔

الجبرا میں منفی عدد "-ا" کی تعریف ذیل کی مساوات سے کی جاتی ہے

ا + (-ا) = ۰

اسی طرح کسی منفی قدم "-اب" کی تعریف ذیل کی مساوات

اب + ب ا = ۰۔

سے کی جا سکتی ہے، جس سے یہ مراد ہے کہ قدم "-اب" مساوی ہے ب ا کے جو کہ قدم اب کی مقابل سمت میں اسی طول کا ایک قدم ہے، اب ہم قدم اب کے ساتھ مثبت علامت ثبت کر سکتے ہیں اور اس کو مثبت قدم کہہ سکتے ہیں۔ قدموں اب اور -اب (یا ب ا) کو متشاکل قدم کہتے ہیں، صریحاً اگر دو قدم مساوی ہوں تو ان کے متشاکل قدم بھی مساوی ہوں گے۔

قدم کی تفریق گویا متشاکل قدم کا جمع کر دینا ہے، رموز میں

اج - ب ج = اج + ج ب = اب

یا اب - ج د = اب + د ج = اجَ اگر ب جَ = د ج
جیسے الجبرا میں ثابت کیا جاتا ہے اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ قوانین مبادلہ اور اجتماع قدموں کی جمع پر بھی صادق آتے ہیں۔ واضح ہو کہ علامات + اور - کو اعمال جمع اور تفریق، نیز متشاکل قدموں کو تعبیر کرنے میں استعمال کیا جائے گا لیکن ایسا کرنے میں کوئی پریشانی یا اشتباہ واقع نہیں ہوگا۔
اگر ا، ب ایک خط پر کوئی دو نقطے ہوں اور و کوئی تیسرا نقطہ ہو تو تفریق کی تعریف کے مطابق

اب = او + و ب = و ب + او = و ب - و ا

۴ - **کسی نقطہ کا فصلہ۔** فرض کرو کہ کسی خط مستقیم لا و لا پر ایک ثابت نقطہ و ہے اور اسی خط پر دو اور نقطے نَ، ن نقطہ و سے مساوی فاصلوں پر متقابل سمتوں میں واقع ہیں (ملاحظہ ہو شکل ۲)، نیز فرض کرو کہ ایک اور نقطہ ک اسی خط مستقیم پر ہے جو و کے اسی طرف واقع ہے جس طرف کہ ن ہے مثلاً دائیں طرف۔
تب قدم و ک اور و ن دونوں متحد العلامت ہیں اور و ک، و نَ مختلف العلامت ہیں۔
اب و ک کو طول اور سمت کا معیار مقرر کرو۔ مان لو کہ اس کا طول ایک انچ ہے، اسے ہم اکائی قدم کہینگے۔ جو قدم و ک کی طرح دائیں طرف ناپے جائینگے وہ مثبت کہلائیں گے اور جو قدم اس کے خلاف یعنی بائیں جانب ناپے جائیں گے وہ منفی ہونگے مثلاً و ن، نَ ن مثبت قدم ہیں اور و نَ، ن نَ منفی

ہیں -



شکل (۲)

اگر و ن مساوی ہو لا × وک کے تو

و نَ = - نَ و = - و ن = - لا × وک

بلحاظ مبدأ و کے مثبت عدد لا کو ن کا فصلہ کہتے ہیں، اسی طرح منفی عدد "- لا" کو اسی مبدأ کے لحاظ سے نَ کا فصلہ کہتے ہیں۔ نیز خط لاَ و لا کو فصلوں کا محور کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ و کے دائیں طرف کے سب نقطوں کے فصلے مثبت اور و کے بائیں جانب کے سب نقطوں کے فصلے منفی عدد ہیں۔ خود مبدأ کا فصلہ صفر ہے۔ مثلاً اگر و ا = ۲ وک تو ا کا فصلہ + ۲ ہے اور ک کا فصلہ ۱ ہے، نقطے کَ اور اَ نقاط ک اور ا کے متشاکل ہیں، ان کے فصلے بالترتیب - ۱، - ۲ ہیں -

پس اس تعریف کی رو سے کسی نقطہ کے فصلہ سے وہ نسبت مراد ہے جو و ن کو اکائی قدم وک کے ساتھ ہو جہاں اس نسبت کے پہلے مثبت علامت ثبت کرنی چاہئے اگر نقطہ ن مبدأ و سے دائیں جانب واقع ہو اور منفی اگر نقطہ بائیں جانب واقع ہو، اس میں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ نقطہ ک، و سے دائیں جانب واقع ہے۔ جب کسی نقطہ ن کا فصلہ لا ہو تو یہ کہنا سہولت بخش ہوتا ہے کہ نقطہ ن اور یہ عدد ایک دوسرے کے متناظر یا جواب ہیں۔ مثلاً نقطہ ا اور عدد ۲، نقطہ کَ اور عدد - ۱، نقطہ و اور عدد صفر ایک دوسرے کے متناظر ہیں -

اصول متعارفہ۔ علم ہندسہ پر جبر و مقابلہ کا اطلاق جس اصول پر

مبنی ہے وہ یہ ہے ۔ جب مبدأ و اور اکائی قدم و ک مقرر کر لئے جائیں تو محور پر کے نقاط اور حقیقی اعداد کے نظام میں ایک ایک کا تناظر ہوتا ہے یعنی محور پر کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں ایک اور صرف ایک حقیقی عدد ہوتا ہے جسے نقطہ کا فصلہ کہتے ہیں اور ہر عدد کے جواب میں محور پر ایک اور صرف ایک نقطہ ہوتا ہے جس کا فصلہ معلومہ عدد ہوتا ہے ۔

جب و ن کی نسبت و ک کے ساتھ کوئی منطق عدد ہو یعنی کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد یا کسر ہو تو محور پر حسب دستور دائیں جانب (اگر نسبت مثبت ہو) اور بائیں جانب (اگر نسبت منفی ہو) و ک یا و ک کی کسی کسر کے ضعف کو ناپنے سے نقطہ ن کے مقام کا تعین ہو سکتا ہے ۔ مثلاً اگر عدد $-\frac{2}{3}$ کو تعبیر کرنا مقصود ہو تو مبدأ و سے بائیں جانب و ک کے تیسرے حصہ کا ۲ گنا طول لینا پڑے گا ۔ مگر جب و ن کی نسبت و ک کے ساتھ کوئی غیر منطق عدد ہو جیسے $\sqrt{2}$ یا π تو عملیات میں اس غیر منطق عدد کے مساوی اس کی تقریبی منطق قیمت لینے سے نقطہ ن کی تعیین ہو سکے گی ۔ مثلاً π کے لئے ہم اس کی تقریبی منطق قیمت حسب ضرورت اکائی کے ناپ کے لحاظ سے ۳٫۱، ۳٫۱۴ یا ۳٫۱۴۲ لے سکتے ہیں ۔ لیکن ظاہر ہے کہ اکائی طول خواہ کچھ ہی لیا جائے ہم بہت جلد ایک ایسی حد پر پہنچ جاتے ہیں کہ اس سے زیادہ تقریبی قیمتوں کے متناظر نشانوں کو شکل میں ایک دوسرے سے تمیز کرنا مشکل ہو جاتا ہے ، مثلاً اگر اکائی ایک انچ ہو تو شکل میں ان فصلوں ۳٫۱۴ اور ۳٫۱۴۲ والے نشانوں کو ایک دوسرے سے تمیز کرنا مشکل ہو گا ۔ باایں ہمہ غیر منطق اعداد ریاضی عملوں کے لحاظ سے انہی قوانین کے ماتحت ہیں جو منطق اعداد پر عائد ہوتے ہیں اور اگرچہ شکل

میں غیر منطق اعداد کی تقریبی قیمتوں مثلاً π اور ۲۱۴۲۱،۳ کے نشانات کو ایک دوسرے سے تمیز کرنا مشکل ہوتا ہے، لیکن پھر بھی ہم اپنے استدلال میں ان نقطوں کو ایک دوسرے سے بالکل الگ متصور کرتے ہیں، جیسا کہ خط مستقیم کے استدلال میں ہم اپنے خطوں کے متعلق یہ تسلیم کر لیتے ہیں کہ ان کا عرض صفر ہے، حالانکہ ہم کوئی ایسا خطِ مستقیم فی الواقع کھینچ نہیں سکتے، جس میں یہ عرض بالکل صفر ہوتا ہو۔

مشق ۱۔ جن نقطوں کے فصلے حسب ذیل ہیں، اُن کو مرتسم کرو

$$2\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{4}{3},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pi,\ -\tfrac{\pi}{2},\ -\sqrt{\pi}$$

مشق ۲۔ اگر ایک نقطہ کا فصلہ لا ہو تو اُن نقطوں کو مرتسم کرو جو ذیل کی مساواتوں سے متعین ہوتے ہیں۔

۲ لا - ۳ = ۰، ۳ لا + ۵ = ۰، لا^2 - ۴ = ۰، ۳ لا^2 - ۴ لا - ۱ = ۰

قدم کا ناپ۔ اگر نقاط ا اور ب کے فصلے بالترتیب ا$_1$، ب$_1$ ہوں تو

اب = وب - وا = ب$_1$ × وک - ا$_1$ × وک = (ب$_1$ - ا$_1$) × وک

ہم عدد ب$_1$ - ا$_1$ کو اب کا ناپ قرار دے سکتے ہیں، ب$_1$ - ا$_1$ کی عددی قیمت اُس نسبت کو تعبیر کرتی ہے جو اب کے مطلق طول کو اکائی طول یعنی وک کے طول کے ساتھ ہے، اور ب$_1$ - ا$_1$ کی علامت خط اب کی سمت کو تعبیر کرتی ہے، مثلاً اگر وک ایک انچ ہو ب$_1$ = ۵ اور ا$_1$ = ۲ تو اب ۳ انچ کے مساوی ہو گا اور ب، ا کے دائیں جانب واقع ہو گا، اگر ب$_1$ = - ۵، ا$_1$ = - ۲ تو اب، ۳ انچ لمبا ہو گا اور چونکہ - ۵ + ۲ منفی ہے، اس لئے ب، ا کے

بائیں جانب واقع ہوگا۔ اکائی قدم و ک کو عام طور پر محذوف کردیا جاتا ہے اور اب کے طول کو صرف ب۱ - ا۱ لکھا جاتا ہے
یہ جملہ اکثر استعمال ہوتا ہے کہ "ایک مقدار دوسری مقدار سے جبریہ طور پہ بڑی ہے" تعریف کی رو سے ب۱، ا۱ سے جبریہ طور پہ بڑا اسوقت ہوتا ہے جبکہ ب۱ - ا۱ مثبت ہو اس لئے جب ب۱، ا۱ سے جبریہ طور پہ بڑا ہو تو ب، ا کے دائیں جانب واقع ہوگا۔ اسی طرح سے جب ب۱ جبریہ طور پہ ا۱ سے چھوٹا ہو تو ب، ا کے بائیں جانب واقع ہوگا۔ اس سے ہمیں ایک نہایت آسان اور کار آمد ربط حاصل ہوتا ہے کہ کوئی عدد ب۱ جبریہ طور پہ عدد ا۱ سے بڑا ہوتا ہے جبکہ فصلہ ب۱ والا نقطہ فصلہ ا۱ والے نقطہ کے دائیں جانب واقع ہو اور چھوٹا ہوتا ہے جبکہ یہ نقطہ بائیں جانب واقع ہو۔ اس جملہ کی بجائے کہ "وہ نقطہ جس کا فصلہ ا۱ ہے" اگر صرف "نقطہ ا۱" استعمال کیا جائے تو یہ زیادہ مختصر ہوگا اور ویسے ہی مفہوم کو ادا کرے گا۔

مشق ۱- ذیل کی صورتوں میں قدم اب کی قیمت بلحاظ مقدار اور علامت معلوم کرو۔

ا۱ = ۱/۲، ب۱ = ۴، ا۱ = -۱، ب۱ = ۱، ا۱ = -۲، ب۱ = -۵، ا۱ = -√۲، ب۱ = π

مشق ۲- ثابت کرو کہ اب کے وسطی نقطہ کا فصلہ = ۱/۲ (ا۱ + ب۱)

مشق ۳- اگر ان : ن ب = ک : ۱ تو ثابت کرو کہ ن کا فصلہ (ا۱ + ک ب۱)/(ک + ۱) ہے۔

اگر ن کا فصلہ لا ہو تو ان = لا - ا۱، ن ب = ب۱ - لا اور لا - ا۱ = ک (ب۱ - لا)

ک کی علامت معلوم کرو جبکہ (۱) ن نقاط ا، ب کے درمیان واقع ہو (۲) جبکہ ن، ا اور ب کے اندر واقع نہ ہو۔

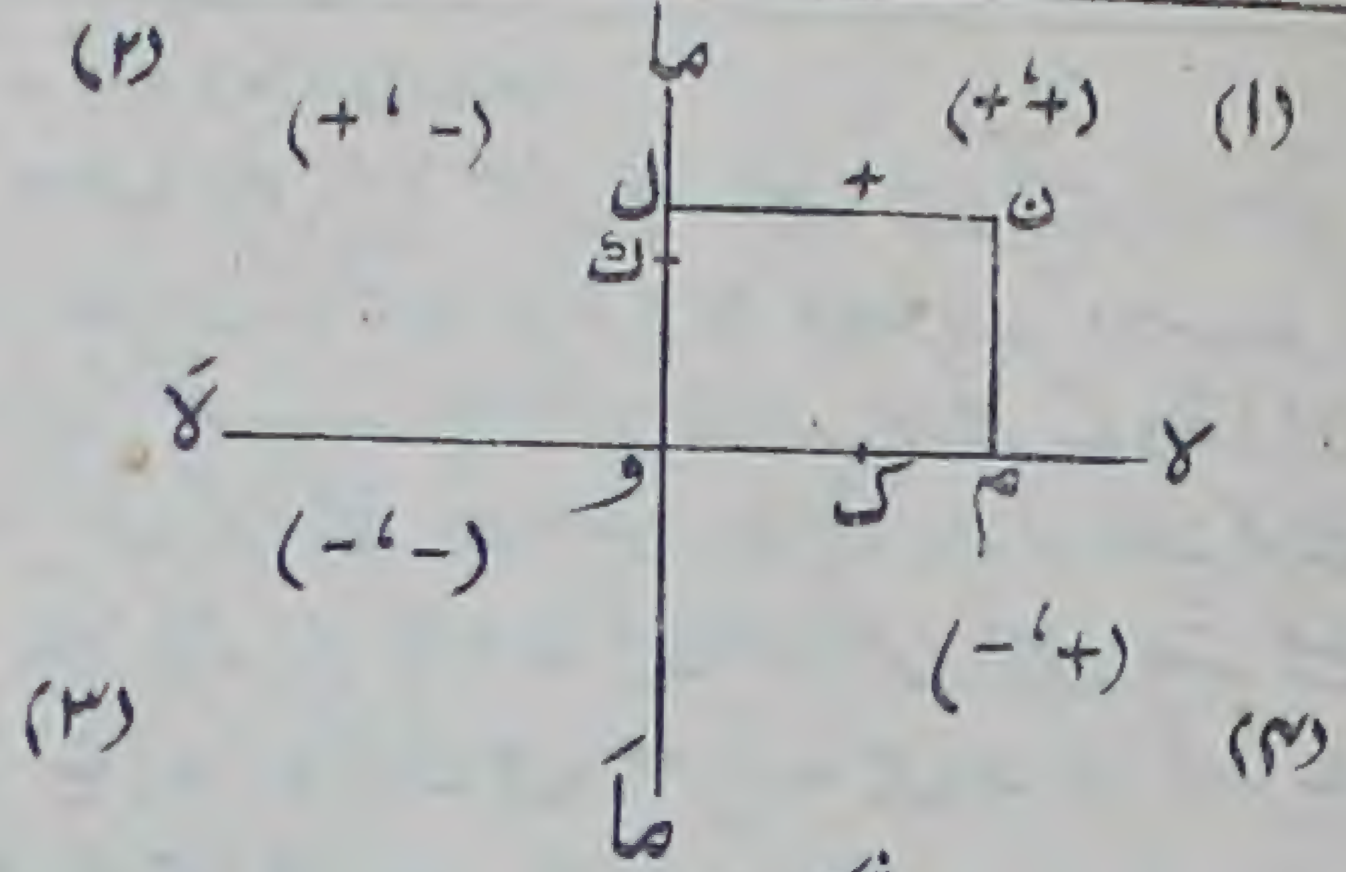
۶۔ محددوں کے محور۔ فرض کرو کہ لاَ و لا، مَا و ما

(شکل ۳) دو غیر محدود خطوطِ مستقیم ہیں جو ایک دوسرے پر عمود وار ہیں اور ن ان خطوط کی سطح مستوی میں کوئی نقطہ ہے، ن سے ن م، ن ل بالترتیب لاَ لا اور مَا ما پر عمود کھینچو۔

جب ن کا مقام معلوم ہو تو ہم قدموں و م، و ل کو پورے طور پر متعین کر سکتے ہیں اور برعکس اس کے اگر قدم و م، و ل دئے ہوئے ہوں تو نقطہ ن کا مقام پورے طور پر معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ عمودوں م ن اور ل ن کا نقطۂ تقاطع ہے۔

فرض کرو کہ سمت لاَ لا کے لئے اکائی قدم و ک ہے اور سمت مَا ما کے لئے اکائی قدم و ك ہے، نیز فی الحال یہ فرض کرو کہ یہ دونوں قدم طول میں مساوی ہیں (مان لو کہ یہ ایک انچ ہیں)۔ قدم و م یا اسکا مساوی قدم ل ن مثبت خیال کیا جائے گا جبکہ ن، مَا ما کے دائیں طرف واقع ہو اور منفی ہوگا اگر ن، مَا ما کے بائیں جانب واقع ہو۔ اسی طرح قدم و ل یا اسکے مساوی قدم م ن مثبت تصور کیا جائیگا جبکہ ن، لاَ لا کے اوپر واقع ہو اور منفی ہوگا اگر ن، لاَ لا کے نیچے ہو۔

ظاہر ہے کہ جس سمت کو ہم چاہیں مثبت تصور کر سکتے ہیں لیکن تاوقتیکہ اس کے برعکس بالتصریح نہ بیان کیا گیا ہو ہم یہ مان لینگے کہ بائیں طرف سے دائیں طرف کی اور نیچے سے اوپر کی سمتیں مثبت ہیں، نیز و م اور م ن کا صرف بلحاظ طول کے



شکل (۳)

مقابلہ کیا جائے گا، کیونکہ ہم صرف اُنہی قدموں کا باہم مقابلہ کر سکتے ہیں جو ایک ہی خط مستقیم یا متوازی خطوطِ مستقیم پر واقع ہوں۔ صریحاً قدموں کے باہمی مقابلہ کے متعلق جو مسئلے ثابت کئے گئے ہیں وہ درست رہتے ہیں خواہ یہ قدم کسی خط مستقیم پر لئے جائیں، لیکن اوپر ہم نے اب تک قدموں کے مساوی ہونے یا ان کے مجموعہ یا فرق کے متعلق کوئی تعریف یا مسئلہ بیان نہیں کیا تا وقتیکہ قدم ایک ہی خط مستقیم یا متوازی خطوط مستقیم پر واقع نہ ہوں۔

اب فرض کرو کہ

وم = ل ن = ا × وک، و ل = م ن = ب × و ک

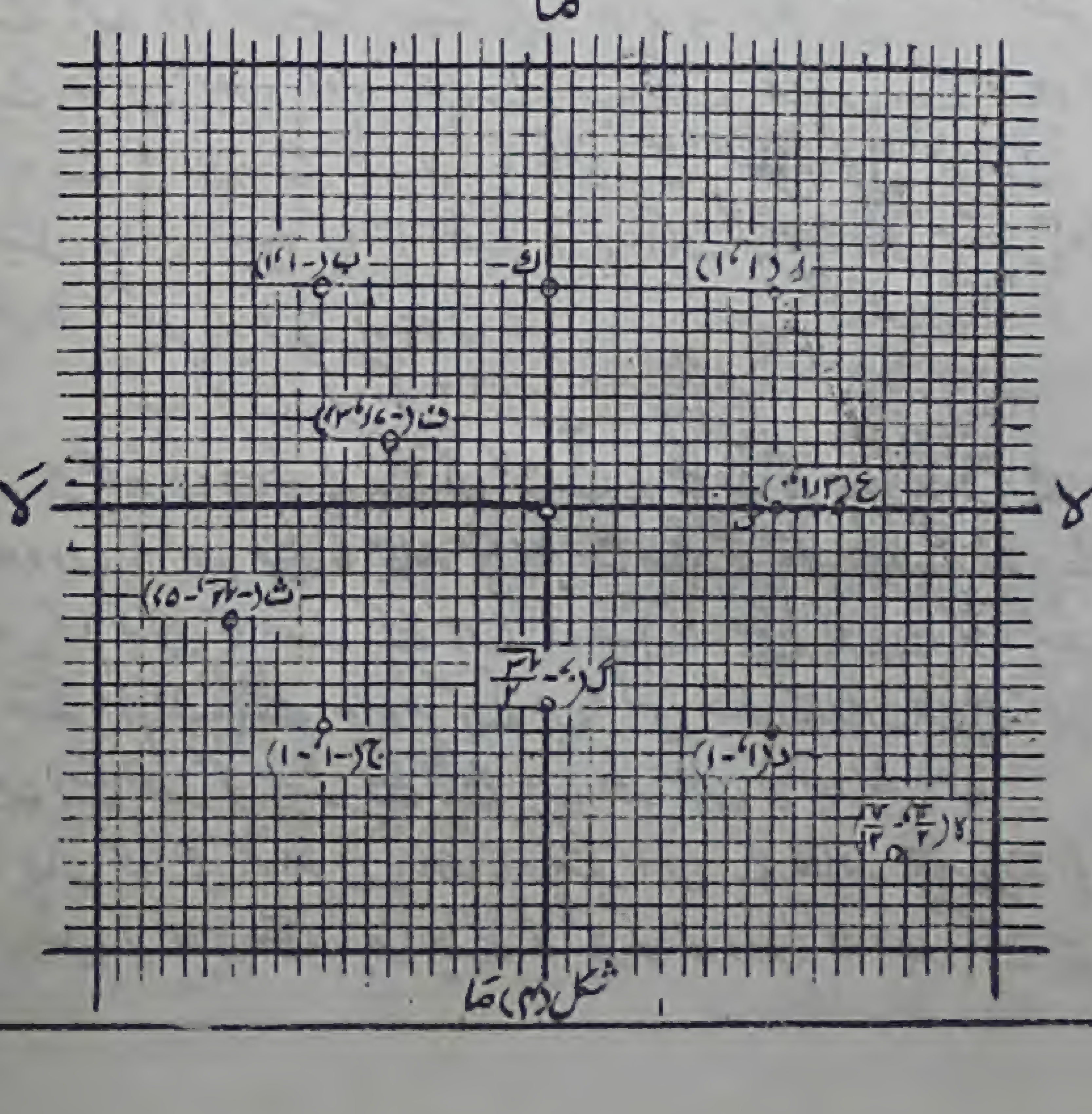
عددوں ا، ب کو بلحاظ محاور لا لَا، مَا ما کے نقطہ ن کے محدد کہتے ہیں، ا کو ن کا فصلہ کہتے ہیں اور ب کو معین اور ن کو اختصاراً "نقطہ (ا، ب)" سے موسوم کرتے ہیں، کسی نقطہ کو اس طرز پر نامزد کرنے میں اسکے فصلہ کو ہمیشہ پہلے لکھتے ہیں اور معین کو بعد میں۔

یہاں محور علی القوائم ہیں اور تا وقتیکہ اس کے خلاف تصریح نہ کی جائے محوروں کو ہمیشہ قائم سمجھا جائے گا، و کو محددوں کا مبدأ کہتے ہیں اور

اس کے محدد (۰، ۰) ہیں۔

محوروں سے سطح مستوی چار ربعوں میں تقسیم ہو جاتی ہے، پہلا ربع وہ ہے جس کے خطوط حائط و لا، و ما ہیں، دوسرے کے و ما، و لاَ ہیں، تیسرے کے و لاَ، و مَا اور چوتھے کے و مَا، و لا۔ محددوں کی علامتوں کو دیکھنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ نقطہ کونسے ربع میں واقع ہے، پہلے ربع لا و ما میں علامتیں (پہلی ہمیشہ فصلے کی علامت ہوتی ہے) +، + ہوتی ہیں، دوسرے میں -، +، تیسرے میں -، - اور چوتھے میں +، -۔

ایسے کاغذ جن پر متساوی الفصل متوازی خطوط کے دو علی القوائم نظام کھنچے ہوتے ہیں بازار سے باآسانی خریدے جا سکتے ہیں۔ ان کاغذوں کو مربع دار کاغذ کہتے ہیں۔ ان پر نقطے مرتسم کرنے میں بہت آسانی ہوتی ہے۔



شکل (۴)

شکل (۴) میں محاور لالا، ماما کے لحاظ سے چند نقطے مرتسم کر کے دکھائے گئے ہیں، چار نقاط ا، ب، ج، د میں سے ہر ایک نقطہ دونوں محوروں سے اکائی فاصلہ پر ہے لیکن ان میں سے کوئی دو نقطے ایک ہی ربع میں واقع نہیں ہوتے کیونکہ محددوں کے کوئی دو جوڑے علامت اور مقدار دونوں کے لحاظ سے ایک دوسرے کے بالکل مساوی نہیں ہو سکتے۔

نقطہ ع، محور لالا پر واقع ہے، اس لئے اس کا معیّن صفر ہے، اسی طرح گ کا معیّن صفر ہے کیونکہ گ، ماما پر واقع ہے۔

چونکہ وک قدرے خفی خطوں کے ذریعہ دس مساوی حصوں میں منقسم ہے اس لئے ان حصوں میں سے ہر ایک حصہ ء۱ کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لئے اس قسم کے کسی طول مثلاً ۱ء۳، -ء۷ کو مرتسم کرنا نہایت آسان ہے۔ اسی طرح $-\sqrt{2}$، $-\frac{1}{2}$، $\sqrt{3}$ بالترتیب -۱ء۴۱، -ء۵، ۱ء۷۳ سے تعبیر ہو سکتے ہیں جہاں اعشاریہ کے دوسرے مقام کا ہندسہ محض اندازاً تعبیر ہو سکتا ہے۔

مشق ۱۔ ذیل کے نقطوں کو مرتسم کرو:-

$(0, 1)$، $(-1, 0)$، $(1, 0)$، $(0, \frac{3}{2})$، $(-3, -2)$، $(-\frac{3}{2}, 0)$، $(1, -2)$

$(0, -1)$، $(\pi, \frac{\pi}{2})$، $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$، $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

مشق ۲۔ اس نقطہ کا طریق کیا ہوگا جس کا فصلہ بالترتیب (۱) ۲، (۲) -۲، (۳) ۰، (۴) ا ہے، نیز اس نقطہ کا طریق بتاؤ جس کے معین یہی ہیں۔

مشق ۳۔ دو نقطوں ن اور ق کو ایک خطِ مستقیم کے لحاظ سے متشاکل اس وقت کہتے ہیں جبکہ یہ خط مستقیم ن اور ق

کے ملانے والے خط کی تنصیف کرے اور اس پر عمود ہو۔ نیز دو نقطے ن اور ق ایک نقطہ و کے لحاظ سے متشاکل کہلاتے ہیں جبکہ و خط ن ق کا وسطی نقطہ ہو۔ اگر ن نقطہ (ا، ب) ہو تو دکھاؤ کہ

(۱) نقطہ (ا، -ب) بلحاظ خط لَا لا کے ن کا متشاکل ہے۔

(۲) نقطہ (-ا، ب) بلحاظ خط ہَا ہا کے ن کا متشاکل ہے۔

(۳) نقطہ (-ا، -ب) بلحاظ مبدأ و کے ن کا متشاکل ہے۔

مشق ۴۔ اگر نقطہ ا (لا_1، ہا_1) ہو اور ب (لا_2، ہا_2) اور نقطہ ن خط ا ب کو نسبت ک : ۱ سے تقسیم کرے تو دفعہ ۵ مشق ۳ کے موافق ثابت کرو کہ نقطہ ن کے محدد

$$\frac{\text{لا}_1 + \text{ک}\ \text{لا}_2}{1 + \text{ک}} \ ، \ \frac{\text{ہا}_1 + \text{ک}\ \text{ہا}_2}{1 + \text{ک}}$$ ہیں۔

ک کی علامت کیا ہوگی جبکہ (۱) ن نقاط ا اور ب کے درمیان واقع ہو اور (۲) ن نقاط ا اور ب کے درمیان واقع نہ ہو۔

۷۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ

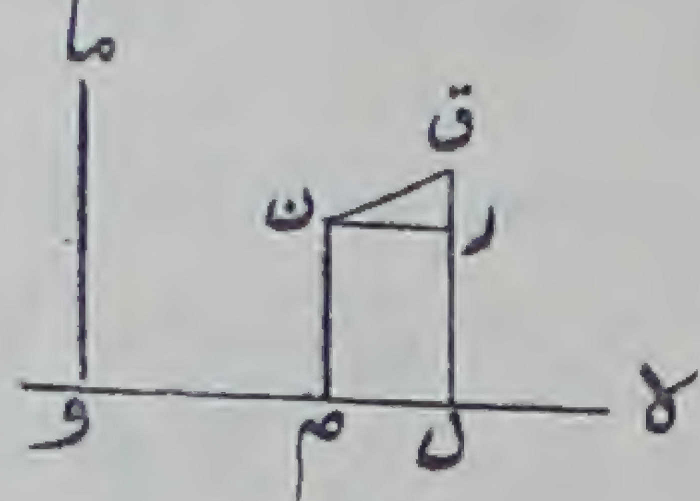
شکل ۵ میں فرض کرو کہ نقطہ ن (لا_1، ہا_1) ہے اور ق (لا_2، ہا_2) ہے، ن اور ق سے بالترتیب ن م، ق ل محور لَا لا پر عمود کھینچو، نیز لَا لا کے متوازی خط ن ر کھینچو جو ل ق (یا لَ ق ممدودہ) سے ر پر ملے۔

ن اور ق کے اضافی مقامات خواہ کچھ ہی ہوں ن ر اور ر ق کے ناپ ہر حالت میں یہ ہوں گے۔

$$\text{ن ر} = \text{م ل} = \text{لا}_2 - \text{لا}_1 \ ، \ \text{ر ق} = \text{ہا}_2 - \text{ہا}_1$$

بلحاظ مطلق طول کے بموجب اقلیدس م ا ش ۴۷

$$\text{ن ق}^2 = \text{ن ر}^2 + \text{ر ق}^2$$



شکل (۵)

اب $\text{لا}_2 - \text{لا}_1$ اور $\text{ما}_2 - \text{ما}_1$ کی علامتیں خواہ کچھ ہی ہوں مثبت ہوں یا منفی، اِن عددوں کے مربعے بالترتیب ن ر اور ر ق پر کے مربعوں میں مربع اکائیوں کی تعداد کو تعبیر کرینگے۔ لہذا

$$\text{ن ق}^2 = (\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2$$

اور اس لئے ن ق کا طول

$$= \sqrt{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2}$$

جہاں جذر کی علامت مثبت لینی چاہئے۔

اگر ق، و یعنی مبدا پر منطبق ہو جائے تو لا_2، ما_2 دونوں صفر ہوں گے اور و ن کا طول $\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}$ کے مساوی ہوگا۔

ن اور ق کے مختلف مقامات کے لئے طالب علم اوپر کے نتیجہ کی تصدیق کرے۔

مشق ۱- نقاط (۳، ۷)، (۹، ۶) کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو

جبکہ اکائی طول ایک انچ کے مساوی ہو۔
فرض کرو کہ فاصلہ مطلوبہ ل انچ ہے، تب

$$ل^۲ = (۳ - ۹)^۲ + (۷ - ۶)^۲ = ۳۷$$

$$\therefore ل = \sqrt{۳۷} = ۶٫۰۸۳$$

پس فاصلہ = ۶٫۰۸۳ انچ

مشق ۲۔ ذیل میں نقطوں کے جو زوج دئے گئے ہیں اُن کے درمیانی فاصلے معلوم کرو اور ہر صورت میں نقطوں کو مرتسم کرو۔

۱۔ (۱،۱)، (۳،۲) ۲۔ (۱-،۱-)، (۳،۲)
۳۔ (۱-،۰)، (۰،۲) ۴۔ (۲-،۳-)، (۲،۳)
۵۔ (π، π-)، (۱-، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}$)

مشق ۳۔ اگر نقطہ (لا، ما) اُس دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ہو جس کا مرکز (۲،۱) ہے اور نصف قطر ۳ ہے، تو ثابت کرو کہ

$$لا^۲ + ما^۲ - ۴ لا - ۲ ما - ۴ = ۰۔$$

۸۔ **قطبی محدد۔** نقطہ ن کا مقام صریحاً متعین ہو جاتا ہے اگر ذیل کے دو اجزا معلوم ہوں، (۱) وہ زاویہ جو و ن ایک ثابت خط مستقیم و لا کے ساتھ بناتا ہے، (۲) نیم قطر و ن کا طول — یہاں ہمیں لفظ "زاویہ" کے مفہوم کی توضیح کر دینی چاہئے۔ علم مثلث کی معمولی قرار داد کے موافق ہم نیم قطر و ن کو ہمیشہ مثبت تصور کرینگے اور "اُس زاویہ سے جو و ن خط و لا کی **مثبت** سمت کے ساتھ بناتا ہے" وہ زاویہ مراد لینگے جس میں سے ایک خط جو ابتداءً و لا پر (او لا پر نہیں) منطبق ہو گھوم کر ن پر پہنچتا ہے۔ زاوئے کو مثبت اُس صورت میں کہتے ہیں جبکہ حرکت مخالف سمت ساعت ہو۔

اگر و ن میں طول کی ر اکائیاں شامل ہوں اور زاویہ لا و ن میں طہ درجے یا نیم قطری ہوں (بموجب اس کے کہ ستینی یا نوسی پیمانہ اختیار کیا جائے) تو دو عددوں ر، طہ کو نقطہ ن کے قطبی محدد کہتے ہیں اور نقطہ ن کو (ر، طہ) لکھتے ہیں، اسی طرح نَ نقطہ (رَ، طَہ) ہے جہاں طَہ منفی ہے۔

قائم محددوں کے معمولی نظام میں و لا کو مخالف سمت ساعت ۹۰° میں سے گھمانا پڑتا ہے تاکہ یہ و ما پر منطبق ہوجائے جو محور ما کی مثبت سمت ہے، اس لحاظ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ن کے قطبی محدد (ر، طہ) اس کے قائم محددوں (لا، ما) کے ساتھ ان مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہیں۔

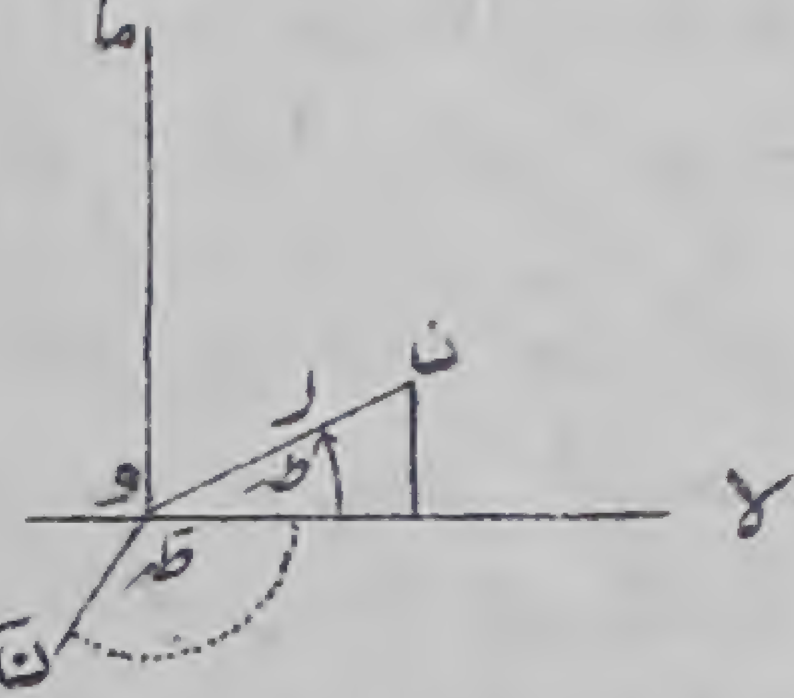
$$لا = ر \; جم \; طہ، \quad ما = ر \; جب \; طہ$$

ان مساواتوں کو ر، طہ کے لئے حل کرنے سے

$$ر = +(لا^{2} + ما^{2})^{\frac{1}{2}} \quad \text{اور} \quad مس \; طہ = \frac{ما}{لا}$$

یہ بات قابل غور ہے کہ مس طہ کی قیمت سے زاویہ طہ کی پورے طور پر تعیین نہیں ہوسکتی کیونکہ اگر مس طہ مثبت ہو تو ن ربع اول میں بھی ہو سکتا ہے اور ربع سوم میں بھی اور اگر طہ منفی ہو تو ممکن ہے کہ ن ربع دوم میں ہو یا چہارم میں، اس امر کی تحقیق کرنیکے لئے ہمیں لا اور ما کی یا جم طہ اور جب طہ کی علامتوں کو دیکھنا چاہئے۔

عام طور پر اس میں سہولت ہوگی کہ طہ کی قیمتیں -۱۸۰° اور +۱۸۰° کے درمیان لی جائیں تاکہ محور لَا لا کے اوپر جتنے نقطے ہیں ان سب کے لئے زاویہ طہ مثبت قرار دیا جا سکے اور نیچے کے نقطوں کے لئے منفی۔



شکل ۶

مشق ۱ ۔ اگر نقطہ ن (۔۳، ۴) ہو تو اس کے قطبی محدد (ر، طہ) معلوم کرو ۔

ر = √(۹ + ۱۶) = ۵ ، مس طہ = ۴/۳- = ۔۱٫۳۳۳۳

اسلئے طہ = ۱۲۶° ۵۲′

چونکہ طہ منفی ہے، اس لئے طہ دوسرے ربع میں واقع ہے یا چوتھے میں، لیکن لا (یا جم طہ) منفی ہے، اس لئے طہ دوسرے ربع میں ہے ۔

مشق ۲ ۔ اگر ن نقطہ (۳، ۔۴) ہو تو ثابت کرو کہ اس کے قطبی محدد (۵، ۔۵۳° ۸′) ہیں ۔

۹ ۔ **تغیر، تسلسل** ۔ فرض کرو کہ ایک خط مستقیم پر (مان لو کہ محور لا لا پر) ایک ثابت نقطہ ا ہے اور ایک نقطہ ن مقام ا سے روانہ ہو کر محور پر بالتدریج دائیں طرف حرکت کرتا ہے یہاں تک کہ وہ ایک دوسرے مقام ب پر پہنچتا ہے ۔ حصہ اب جو نقطہ ن مرتسم کرتا ہے ایک مسلسل مقدار کی بہترین مثال ہے ۔ اس میں کوئی توڑ یا شکستگی نہیں ۔ جیسے ن حرکت کرکے ا سے ب تک پہنچتا ہے تو قدم ان بالتسلسل بڑھتا

ہے پس ا ن، نقطہ ن کی حرکت کے دوران میں ایک مسلسل بڑھنے والی مقدار ہے۔

فرض کرو کہ ا اور ب کے فصلے بالترتیب ا, اور ب, ہیں اور حرکت کے دوران میں کسی منزل پر نقطہ ن کا فصلہ لا ہے۔ اب چونکہ* ا ن = لا - ا, اسلئے جیسے ن ا سے ب تک حرکت کرتا ہے لا بالتسلسل (جبریہ طور پر) ا, سے ب, تک بڑھتا ہے، پس ہم لا کو ایک مسلسل بدلنے والا عدد، یا اختصار کے طور پر مسلسل متغیر، کہہ سکتے ہیں۔

نیز چونکہ ن بالتواتر ا اور ب کے درمیان ہر ایک نقطہ پر منطبق ہوتا ہے اس لئے لا بھی بالتواتر ا, اور ب, کے درمیان ہر ایک قیمت اختیار کرتا ہے، اگر ا, منفی ہو اور ب, مثبت ہو تو ا مبدأ و کے بائیں جانب اور ب مبدأ کے دائیں جانب واقع ہوگا اور جب نقطہ ن مبدأ و میں سے گزرے گا اس وقت لا کی قیمت صفر ہوگی۔ اس سے ظاہر ہے کہ جب، لا منفی قیمتوں سے گزر کر مثبت قیمتیں اختیار کرتا ہے تو یہ صفر قیمت میں سے گزرتا ہے۔ اگر ن ہمیشہ دائیں طرف چلنے کی بجائے، ہر دو جانب آگے پیچھے حرکت کرے تو ہر دفعہ جب ن مبدأ و میں سے گزرے گا اُس وقت لا کی قیمت صفر ہوگی، پس معلوم ہوا کہ جب کبھی لا مثبت سے منفی یا منفی سے مثبت ہوتا ہے تو یہ قیمت صفر میں سے گذرتا ہے۔ پس مسلسل متغیر کی یہ خصوصیت بغیر مزید تشریح کے ہم مان سکتے ہیں کہ جب یہ قیمت ا, سے قیمت ب, تک بدلتا ہے تو کم از کم ایک دفعہ ا, اور ب, کے درمیان کی ہر ایک قیمت کو اختیار کرتا ہے اور اگر اِن قیمتوں میں سے ایک مثلاً ا, منفی ہو اور دوسری مثبت تو جو قیمتیں متغیر اختیار کرے گا ان میں سے ایک قیمت

* [اس صورت میں اور ایسی اور صورتوں میں قدم ا ن کا ناپ ہی صرف خاص اہمیت رکھتا ہے اسطرح ا ن، کو ہم دو معنی میں استعمال کرتے ہیں قدم اور قدم کے ناپ دونوں کے لئے اور ہندسی مسائل میں اکثر ایسا ہی کیا جاتا ہے لیکن ایسا کرنے سے کوئی التباس پیدا نہیں ہوتا]

صفر ضرور ہوگی۔

۱۰۔ **مقداروں کی ہندسی تعبیر**۔ کسی مقدار ا کے ناپ لا سے وہ نسبت مراد ہے جو اِس مقدار کو اسی قسم کی ایک اور مقدار ک سے ساتھ ہو جسکو اکائی تسلیم کرلیا جائے۔ پس اگر کسی محور پر اکائی قدم و ک لیا جائے جو اکائی مقدار ک کو تعبیر کرے تو قدم و م (جہاں و م مساوی ہے لا × و ک کے) مقدار ا کو تعبیر کرے گا۔ اس طرح سے کسی خاص قسم کی مقداروں اور محور پر کے نقطوں کے درمیان ایک طرح کا تناظر قائم ہو جاتا ہے جس کی رو سے نقطہ ۱ اکائی مقدار ک کا جواب ہے اور نقطہ ۲ مقدار ۲ ک کا، وغیرہ وغیرہ۔

علم ہندسہ اور طبیعیات میں جن مقادیر کے متعلق بحث ہوتی ہے مثلاً خط، زاوئے، رفتاریں، قوتیں وغیرہ وہ اکثر اوقات سمتی مقادیر تصور کی جاتی ہیں، جب ایسا ہو تو ان کے ناپ مثبت اور منفی دونوں ہو سکتے ہیں۔ جب ناپ منفی ہوں تو ان مقداروں سے جو نقطے تعبیر ہوں گے وہ و سے اس طرف واقع نہیں ہوں گے جس طرف ک واقع ہوتا ہے، بلکہ اس کی مخالف سمت میں واقع ہوں گے۔ ظاہر ہے کہ کوئی متغیر مقدار ن ایک متغیر حصہ و ن سے تعبیر ہوگی اور جب مقدار بالتسلسل بدلے تو نقطہ محور کا ایک مسلسل حصہ مرتسم کرے گا۔

عملی حسابات میں بالعموم مقدار کا ناپ ہی ایک اہم اور ضروری عنصر ہوتا ہے، طول کلامی سے بچنے کی خاطر ہم اس قسم کے جملے استعمال کرینگے مثلاً "رفتار و" اور اسکے یہ معنی سمجھینگے "ایک رفتار جس کا ناپ رفتار کی و اکائیوں کے مساوی ہے"، لیکن ہر صورت میں اس امر کی احتیاط چاہئے کہ جو اکائیاں استعمال کی گئی ہیں اُن کے متعلق کوئی اشتباہ نہ پیدا ہو۔

۱۱۔ **تفاعل** ۔ تابع اور متبوع متغیر۔ کسی سوال یا مسئلہ میں

جو مقداریں استعمال کی جاتی ہیں وہ بالعموم دو قسم کی ہوتی ہیں :- اول وہ جن کی قیمت دوران بحث میں وہی رہتی ہے اور دوسرے وہ جو مختلف قیمتیں اختیار کرتی ہیں پہلی قسم کی مقداروں کو مستقل اور دوسری قسم کی مقداروں کو متغیر کہتے ہیں۔ رواجاً مستقل مقداروں کو حروف تہجی کے ابتدائی حروف مثلاً ا، ب، ج، د وغیرہ سے اور متغیروں کو آخر کے حروف لا، ما، ہی وغیرہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ لیکن اگر کسی متغیر کو ا سے یا کسی مستقل کو ہی وغیرہ سے تعبیر کرنے میں کوئی خاص سہولت ہو تو ایسا کرنے میں کوئی امر مانع نہیں ہے۔

ہم پہلے صرف دو متغیروں والی صورت پر بحث کریں گے، عام طور پر ایسا ہوگا کہ اگر ایک متغیر کو سلسلہ وار کئی قیمتیں دی جائیں تو ہر ایسی قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک خاص قیمت حاصل ہوگی۔ اس صورت میں دوسرے متغیر کو پہلے متغیر کا تفاعل کہتے ہیں یا اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ دوسرا متغیر پہلے متغیر کے تابع ہے، پہلا متغیر اس صورت میں متغیر متبوع کہلاتا ہے۔ اکثر اوقات متغیر متبوع کی بجائے لفظ وجہ یا دلیل استعمال کرتے ہیں۔ اس صورت میں تابع متغیر کو اس کی وجہ کا تفاعل کہتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم مثلثوں کے ایک ایسے سلسلہ پر غور کریں جن میں سے ہر ایک کا ارتفاع وہی ہو، تو ظاہر ہے کہ ایسے مثلث کا رقبہ اسکے قاعدہ کا تفاعل ہے۔ اسی طرح سے اگر ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے کچھ فاصلہ طے کرے تو فاصلہ وقت کا تفاعل ہوگا جب تک کہ گاڑی اسی رفتار سے چلتی رہے، اسی طرح ایک مقررہ تپش پر گیس کی کسی معلومہ مقدار کا دباؤ اسکے حجم کا تفاعل ہوگا۔ ان مثالوں میں متبوع متغیر قاعدہ، وقت اور حجم ہیں اور تابع متغیر یا تفاعل

رقبہ، فاصلہ اور دباؤ ہیں۔
یہ امر محض سہولت پر مبنی ہے کہ اِن دو متغیروں میں سے کس کو تابع مانا جائے اور کس کو متبوع۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم کرنا ہو کہ ایک ریل گاڑی خاص خاص اسٹیشنوں پر سے کن کن اوقات پر گذری تو اُس صورت میں فاصلہ کو متبوع مانا جائے گا اور وقت کو تابع۔
جب متغیر دو سے زیادہ ہوں اور سوائے ایک کے باقی سب متغیروں کو کوئی اختیاری محدود قیمتیں دی جائیں تو یہ ممکن ہے کہ ایسا کرنے سے اُس ایک متغیر کی قیمت متعین ہو جائے، اس صورت میں اس متغیر کو باقی متغیروں کا تفاعل یا تابع کہتے ہیں اور باقی متغیر سوال زیرِ بحث کے متبوع کہلاتے ہیں۔
مثلاً کسی مثلث کا رقبہ اس کے قاعدہ اور ارتفاع کا تفاعل ہوتا ہے جبکہ قاعدہ اور ارتفاع دونوں بدلیں، نیز گیس کی کسی خاص مقدار کا دباؤ اس کے حجم اور تپش کا تفاعل ہوتا ہے جبکہ حجم اور تپش دونوں بدلیں۔
عام طور پر متغیر ما کو ایک اور متغیر لا کا تفاعل اُس وقت کہتے ہیں جبکہ لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ما کی ایک خاص اور معین قیمت ہو۔ نیز ایک متغیر ما کو دو یا زیادہ متغیروں لا، ی، ... کا تفاعل اُس صورت میں کہتے ہیں جبکہ متغیروں لا، ی، ... کی قیمتوں کے ہر حیث کے جواب میں ما کی ایک متعین قیمت ہو۔
اگرچہ یہ نہایت ضروری ہے کہ تفاعلی انحصار کے اس تخیّل کو ہمیشہ ذہن میں رکھا جائے، تاہم یہ عام طور پر مان لیا جائے گا کہ تفاعل کی تعیین ایک مساوات کے ذریعہ ہوتی ہے (دفعات ۱۲، ۲۶، ۲۷، ۲۸) اور تفاعل کو ترسیم کے ذریعہ تعبیر کر سکتے ہیں۔

اس مفروض میں یہ امور مضمر ہیں (۱) جب دلیل یا وجہ دفعہ ۹ کے مفہوم کے مطابق، مسلسل طور پر ﻟ سے ب تک بدلتی ہے تو تفاعل مسلسل طور پر (فرض کرو کہ ﻟ سے ب تک بدلتا ہے اور (۲) متبوع کی ایک چھوٹی تبدیلی کے جواب میں تفاعل میں ایک چھوٹی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ در اصل اس مفروض میں علاوہ ان دو امور کے اور بہت سی باتیں شامل ہیں لیکن اس منزل پر طالب علم کو چاہئے کہ ان خالص نظری مشکلات کی طرف اتنا متوجہ نہ ہو اور اگلے باب کی ترسیمی مشقوں کو خود حل کرنے سے تغیر اور تفاعلی انحصار کے اساسی اصولوں کو پورے طور پر سمجھنے کی کوشش کرے۔ جانچ اور آزمائش سے معلوم ہوگا کہ سوائے وجہ کی خاص خاص قیمتوں کے خاصیت (۲) فی الحقیقت سب معمولی تفاعلوں میں پائی جاتی ہے، خاصیت (۱) اگرچہ دیکھنے میں آسان معلوم ہوتی ہے لیکن ریاضی نقطہ نظر سے اس کی توضیح زیادہ مشکل ہے۔ کسی تابع متغیر کے تسلسل کی باقاعدہ تعریف ریاضی باب پنجم دفعہ ۴۴ میں دی جائے گی۔

طالب علم کو الفاظ "متعین قیمت" یا "قابل تعین قیمت" کی طرف توجہ کرنی چاہئے، بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ کسی تفاعل کے لئے جو تحلیلی (جبریہ) جملہ ہو وہ متبوع کی کسی مخصوص قیمت یا قیمتوں کے لئے بے معنی ہوجاتا ہے۔ ایسی قیمتوں کے لئے تفاعل غیر متعین کہلاتا ہے۔ مثلاً تفاعل $\frac{(لا^۲ - ۱)}{لا - ۱}$ سوائے قیمت ایک کے باقی لا کی سب قیمتوں کے لئے ایک خاص اور معیّن قیمت رکھتا ہے اور جب، لا = ۱ تو جملہ $\frac{صفر}{صفر}$ کی شکل اختیار کرتا ہے جسکے مطلق کوئی

معنی نہیں۔ ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو لا - ۱ پر تقسیم کرنے سے اس مشکل سے نہیں بچ سکتے کیونکہ لا - ۱ پر تقسیم کرتے میں ہم یہ تسلیم کر لیتے ہیں کہ لا - ۱ صفر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کی رو سے ہم کسی جملہ کو صفر پر تقسیم نہیں کر سکتے۔

اسی طرح تفاعل $\sqrt{۱ - لا^{۲}}$ کی تعیین لا کی صرف اُن قیمتوں کے لئے ہوتی ہے جو تعداداً ایک کے مساوی یا ایک سے کم ہوں۔ اس صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل متبوع کی صرف اُن قیمتوں کے لئے معیّن قیمت رکھتا ہے جو سعت -۱ اور +۱ کے درمیان ہوں (بشمول طرفین)

تفاعل کے متعلق استدلال کرتے وقت اس امر کو ہمیشہ ملحوظ رکھا جائے گا کہ متبوع کی صرف وہ قیمتیں زیر بحث ہیں جن کے جواب میں تفاعل کی معین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی جنکے لئے تفاعل کی قیمتیں ٹھیک طور پر متعین ہو سکتی ہیں۔

تفاعلوں کے لئے ترقیم۔ کسی متغیر کے تفاعل کو تعبیر کرنے کا عام طریقہ یہ ہے کہ متغیر کو خطوطِ وحدانی کے اندر لکھکر، اس کے قبل کوئی حرف علامت لکھ دیا جائے۔ مثلاً ف (لا)، فا (لا)، فہ (لا) وغیرہ لا کے تفاعلوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ اس میں علامات ف، فا، فہ وغیرہ تفاعلی علامات ہیں اور ضارب اجزا نہیں ہیں، پس علامت ف (لا) کو ایک ساتھ لینا چاہئے، اس سے "لا کا کوئی تفاعل" مراد ہوگا اور یہ ساتھ کی عبارت یا بیان سے معلوم ہوگا کہ کون سا خاص تفاعل متصور ہے۔ مختلف تفاعلوں کے لئے جن سے ایک ہی عمل میں کام لینا پڑے صریحاً مختلف تعبیری علامتیں استعمال

کرنی چاہئیں۔

ف (ا) سے مراد ہے "تفاعل ف (لا) کی قیمت جبکہ لا کی قیمت ا ہو" یا تفاعل ف (لا) کی قیمت جبکہ لا کی بجائے ا لکھ دیا جائے۔

مثلاً اگر ف (لا) سے تفاعل

لا^2 - ۳ لا - ۱

تعبیر ہو تو

ف (۰) = -۱، ف (۱) = -۳، ف (ا + ب) = (ا + ب)^2 - ۳ (ا + ب) - ۱

ف (لا^2) = (لا^2)^2 - ۳ لا^2 - ۱ = لا^4 - ۳ لا^2 - ۱

دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے بھی یہی طرز تعبیر اختیار کیا جاتا ہے۔ مثلاً ف (لا، ما)، تفا (د، ح)، فہ (لا، ما، ی) سے بالترتیب لا، ما اور د، ح اور لا، ما، ی کے تفاعل تعبیر ہوتے ہیں۔

اگر ف (لا، ما) = ۳ لا^2 - ۲ لا ما - ما^2 + ۴

تو ف (۱، -۱) = ۳ + ۲ - ۱ + ۴ = ۸

ف (ا، ب) = ۳ ا^2 - ۲ ا ب - ب^2 + ۴

حروف کو علامت (،) کے ذریعہ ایک دوسرے سے الگ کر دینا چاہئے تاکہ یہ معلوم ہو جائے کہ متغیر تعداد میں دو یا زیادہ ہیں اور تفاعل کو دو یا زیادہ متغیروں کے حاصل ضرب کے تفاعل سے تمیز کیا جا سکے۔ مثلاً ف (لا ما) سے مراد وہ تفاعل ہے جس کا متبوع لا، ما کا حاصل ضرب یعنی لا ما ہے اور اگر ف (لا) مساوی ہو ا لا + ب کے تو ف (لا ما) مساوی ہے ا لا ما + ب کے۔

۱۳۔ تصریحی اور تضمینی تفاعل۔ جب ایک متغیر کسی دوسرے

متغیر کا تفاعل ہو تو بالعموم اس تعلق کو ایک مساوات کے ذریعہ بیان کرتے ہیں، تابع متغیر کو اس کی وجہ کا تصریحی تفاعل کہتے ہیں اگر تابع متغیر کو متبوع متغیر کی رقوم میں الگ کھولکر بیان کیا گیا ہو مثلاً مساواتوں ما = لا^2 - ۲لا + ۲،

$$س = جم (ن ط - ع) ، د = \frac{ج}{ح} ،$$

$$ما = ف (لا) ، س = فہ (ت) ، د = فا (ح)$$

میں ما، س، د وغیرہ بالترتیب لا، ت، ح وغیرہ کے تصریحی تفاعل ہیں۔

جب مساوات میں تابع متغیر کو متبوع متغیروں کی رقوم میں بالصراحت نہ بیان کیا گیا ہو تو تابع کو متبوع کا تضمینی تفاعل کہتے ہیں مثلاً مساوات

$$ا لا ما + ب لا + ج ما + د = ۰$$

میں ما، لا کے تضمینی تفاعل کے طور پر معلوم ہے۔
جب اس مساوات کو ما کے لئے لا کی رقوم میں حل کیا جائے تو

$$ما = - \frac{ب لا + د}{ا لا + ج}$$

اب ما، لا کا تصریحی تفاعل ہے۔

۱۴۔ کئی قیمتوں والا تفاعل اور مقلوب تفاعل۔ جب کوئی تفاعل ایک مساوات کے ذریعہ تضمینی طور پر معلوم ہو تو بعض اوقات ایسا اتفاق ہوتا ہے کہ ایک متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی دو یا زیادہ قیمتیں ہوتی ہیں۔ تفاعل کی جو تعریف دفعہ ۱۱ میں دی گئی ہے اس میں یہ تسلیم کرلیا گیا ہے کہ

وجہ کی ایک قیمت کے جواب میں تفاعل کی صرف ایک ہی قیمت ہے اور تفاعل کے متعلق استدلال کرنے میں ہمیں ہمیشہ یہی ماننا چاہئے کہ وجہ کی کسی ایک قیمت کے جواب میں تفاعل کی صرف ایک ہی قیمت ہے یا بالفاظ دیگر یہ ماننا چاہئے کہ تفاعل واحد القیمت ہے۔ جبکہ مساوات سے ایک متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک سے زیادہ قیمتیں حاصل ہوں تو ہمیں بالعموم یہ سمجھنا چاہئے کہ مساوات ایک ایسے تفاعل کی تعیین کرتی ہے جو دو یا دو سے زیادہ تفاعلوں سے مرکب ہے جن میں سے ہر ایک وحید القیمت ہے۔ اس قسم کے تفاعل کو کئی قیمتوں والا تفاعل کہتے ہیں۔

مثلاً اگر لا کا تفاعل ما ذیل کی مساوات سے متعین ہو

$$لا^{۲} + ۲ لا ما - ما^{۲} - ۱ = ۰$$

$$تو ما = لا \pm \sqrt{۲ لا^{۲} - ۱}$$

جس سے ظاہر ہے کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی دو قیمتیں ہیں، پس ما، لا کا دو قیمتوں والا تفاعل ہے۔ دراصل مساوات بالا سے لا کے دو تفاعل حاصل ہوتے ہیں، یعنی

$$ما = لا + \sqrt{۲ لا^{۲} - ۱} \quad اور \quad ما = لا - \sqrt{۲ لا^{۲} - ۱}$$

ان میں سے ہر ایک تفاعل جداگانہ ایک قیمت والا تفاعل ہے اور لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے اس کی تعیین ہو سکتی ہے جن کے لئے ۲ $لا^{۲}$ بڑا ہے یا مساوی ہے ایک کے۔

نیز مساوات

$$لا^{۲} - ما + ۱ = ۰$$

سے اس امر کی تعیین ہوتی ہے کہ ما، لا کا ایک قیمت والا تفاعل ہے۔

لیکن لا، ما کا دو قیمتوں والا تفاعل ہے یعنی

لا، $\sqrt{\text{ما} - ۱}$ کے مساوی ہے یا $-\sqrt{\text{ما} - ۱}$ کے

جب تفاعلوں کی ترسیمی تعبیر پر غور کیا جائے گا تو معلوم ہوگا کہ یہ مختلف تفاعیل ایک ہی منحنی کے مختلف حصوں کو تعبیر کرتے ہیں (مثلاً دیکھو دفعہ ۲۰)

ہم نے دیکھا ہے کہ مساوات $\text{لا}^۲ - \text{ما} + ۱ = ۰$ سے نہ صرف ما، بطور لا کے تفاعل کے متعین ہوتا ہے بلکہ لا بھی بطور ما کے تفاعل کے متعین ہو جاتا ہے۔ زیادہ عام طور پر جہاں مساوات ما = ف(لا) سے ما، لا کے تصریحی تفاعل کے طور پر دیا ہوا ہے وہاں لا، ما کے تضمینی تفاعل کے طور پر بھی متعین ہو سکتا ہے۔ جب دو تفاعل اس طرح ایک ہی مساوات سے متعین ہوں تو وہ ایک دوسرے کے لحاظ سے مقلوب کہلاتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم مساوات $\text{ما} = \text{لا}^۳$ کو لا کے لئے حل کریں تو اس سے حاصل ہوتا ہے $\text{لا} = \sqrt[۳]{\text{ما}}$، اس طرح اس مساوات سے دو تفاعلوں کی تعیین ہوتی ہے جو ایک دوسرے کے مقلوب ہیں یعنی مکعب اور جذر الکعب۔

ریاضی کی انگریزی کتابوں میں جو تفاعل علامت ف سے تعبیر ہوتا ہے اس کے مقلوب کو بالعموم علامت '$\text{ف}^{-۱}$' سے تعبیر کرتے ہیں، پس

$$\text{لا} = \text{ف}^{-۱}(\text{ما}) \quad \text{جبکہ} \quad \text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$$

طالب علم زاویوں کی صورت میں اس قسم کی ترقیم سے واقف ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ $\text{جب}^{-۱}\text{ما}$ سے مراد $\frac{۱}{\text{جب ما}}$ نہیں ہے بلکہ (خاص حدود

کے اندر) وہ زاویہ مراد ہے جس کی جیب ما ہو۔ پس جس طرح ہم متماثلہ

جب {جب^{-۱} (ما)} = ما

سے واقف ہیں اسی کی مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

ف {ف^{-۱} (ما)} = ما

اس متماثلہ کو بالعموم اس طرح بھی لکھتے ہیں

ف ف^{-۱} (ما) = ما

اب ممکن ہے کہ منقلوب تفاعل ایک قیمت والا تفاعل نہ ہو، مثلاً تاوقتیکہ زاویہ کی مقدار کے متعلق کوئی شرائط نہ عائد کی جائیں جب^{-۱} لا سے وہ لاانتہا زاویے مراد ہو سکتے ہیں جن کا جیب لا ہو۔ پس ایسی صورت میں قیمت کی تخصیص کے لئے ضروری ہے کہ متغیر کی سعت پر کچھ قید لگائی جائے مثلاً جب^{-۱} لا میں زاویہ مذکورہ کو $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ (بشمول طرفین) کے درمیانی زاویوں کے لئے محدود کردیا جاسکتا ہے، ایسا کرنے سے جب^{-۱} لا ایک قیمت والا تفاعل ہو جاتا ہے مزید معلومات کے لئے دیکھو دفعات ۲۵، ۲۷، ۲۸۔

مشق ۱

۱۔ اگر ف (لا) = لا^۳ − لا + ۱ تو ف (۰)، ف (۱)، ف (−۱) کی قیمتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

ف (لا + ھ) = ف (لا) + (۳ لا^۲ − ۱) ھ + ۳ لا ھ^۲ + ھ^۳

۲۔ اگر ف (لا) = لا^۲ − لا − ۲ تو ف (ا لا + ب) کیا ہوگا۔

۳۔ اگر ف (لا) = لا^۲ − ۵ لا + ۱ تو ف (لا^۲)، ف (لا^۳)، ف (جب لا)

کی قیمت لکھو نیز ف (جب ۲۲/۴) کی قیمت معلوم کرو۔

۴۔ اگر ف (لا) = لوک لا تو ثابت کرو کہ

ف (لا ما) = ف (لا) + ف (ما)، ف (لا/ما) = ف (لا) - ف (ما)

۵۔ اگر ف (لا) = ا لا^6 + ب لا^4 + ج لا^2 + د تو ثابت کرو کہ ف (-لا) = ف (لا)، اگر ف (-لا) = ف (لا) تو ف (لا) کو اس کی وجہ کا جفت تفاعل کہتے ہیں۔

۶۔ اگر ف (لا) = ا لا^7 + ب لا^5 + ج لا^3 + د لا تو ثابت کرو کہ ف (-لا) = - ف (لا)، اگر ف (-لا) = - ف (لا) تو ف (لا) کو اس کی وجہ کا طاق تفاعل کہتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ جب لا، قتم لا، مس لا، مم لا سب کے سب لا کے طاق تفاعل ہیں اور جم لا، قط لا سب لا کے جفت تفاعل ہیں۔

۸۔ دکھاؤ کہ (قو^{لا} - قو$^{-لا}$)/لا ، لا کا جفت تفاعل ہے

۹۔ اگر ف (لا، ما) = ا لا^2 + ب لا ما + ج تو ان تفاعلوں ف (ما، لا)، ف (لا، لا)، ف (ما، ما) کی قیمتیں لکھو۔

۱۰۔ اگر ما = ف (لا) = (لا + ۲)/(۳ لا + ۴) تو ثابت کرو کہ ف (ما) = (۷ لا + ۱۰)/(۱۵ لا + ۲۲)

۱۱۔ اگر ما = ف (لا) = (ا لا + ب)/(ج لا - ا) تو ثابت کرو کہ لا = ف (ما)

۱۲۔ اگر ف (لا، ما) = لا^2 - ما^2 تو ثابت کرو کہ ف (جم طہ، جب طہ) = جم ۲ طہ اور ف (قط طہ، مس طہ) = ۱

باب دوم

ترسیمیں، منطق تفاعل

۱۵۔ احصاء کا مقصد۔ ترسیمات۔ عام ترین الفاظ میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ احصا کی غایت مسلسل طور پر بڑھنے والے تفاعلوں کی تبدیلیوں کا مطالعہ ہے۔ یہ معلوم کرنا کہ کوئی تفاعل وجہ یا متبوع کی کسی خاص قیمت کے لئے کس شرح سے بدلتا ہے احصائے تفرقات سے متعلق ہے اور اس کا عکس یعنی یہ دریافت کرنا کہ متبوع کی کسی مخصوص تبدیلی کے لئے تفاعل میں کس قدر تبدیلی واقع ہوتی ہے جبکہ تفاعل کی تبدیلی کی شرح معلوم ہو احصائے تکملات سے تعلق رکھتا ہے۔

اِن امور کا مطالعہ کرنے کے لئے تفاعل کی ترسیمی تعبیر کے متعلق معلومات حاصل کرلینا نہایت ضروری ہے۔ اس لئے مناسب معلوم ہوتا ہے کہ اُن طلبہ کی خاطر جن کو تاہنوز ترسیمات کے متعلق تجربہ نہیں ہے یا کم تجربہ ہے یہاں چند اشارات درج کردئے جائیں جو اُن کے لئے مفید اور رہنمائی کا موجب ہوں۔ بعض اوقات ترسیم کا کھینچنا بہت سے دشوار اور طویل حسابات پر مشتمل ہوتا ہے لیکن اگر طالب علم محنت سے اِن منازل کو طے کرکے تفاعل کے تسلسل اور تغیر کے بنیادی تخیلات کو احاطۂ ادراک میں لا سکے تو یہ اُس کی محنت اور جانفشانی کا

کافی صلہ ثابت ہوگا۔ جب وہ احصائے تفرقات میں تھوڑی سی دسترس حاصل کریگا تو اُسے ان پریشان کن حسابات کو مختصر کرنے کے بہت سے قاعدے معلوم ہو جائیں گے۔ ابتدائی نقطۂ نظر سے پروفیسر کرسٹل کی تمہید جبر و مقابلہ (انٹروڈکشن ٹو الجبرا) میں ترسیمات کے متعلق نہایت عمدہ اور مفید بحث مندرج ہے۔

۱۶۔ لا۲ کی ترسیم۔ علم ہندسہ اور طبیعیات میں ہمیں اکثر اوقات ایسے تفاعلوں سے سابقہ پڑتا ہے جو مساوات ما = ج لا۲ سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں ج مستقل ہے، مثلاً دائرہ کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے اسکے نصف قطر کا مربع، وہ فاصلہ جو ایک گرنے والا جسم حالتِ سکون سے طے کرتا ہے، جبکہ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیا جائے، ایسے بدلتا ہے جیسے گرنے کے وقت کا مربع، ایک خاص وقت میں برقی رَو سے جو حرارت پیدا ہوتی ہے وہ ایسے بدلتی ہے جیسے دوَر کے اندر رَو کا مربع، وغیرہ وغیرہ۔ یہ سب بیانات ایسے ہیں کہ جب ان کو جبریہ طور پر بیان کیا جائے تو ان سے اوپر کی شکل کی مساوات پیدا ہوتی ہے جہاں لا ایک قسم کی مقدار کی اکائیوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے، مثلاً فٹوں کی تعداد، سکنڈوں کی تعداد اور امپیروں کی تعداد اور ما دوسری قسم کی مقدار کی اکائیوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے، مثلاً مربع فٹوں کی تعداد، خطی فٹوں کی تعداد، یا ارگوں کی تعداد (یا حرارت کی دیگر اکائیوں کی تعداد) عدد ج مستقل ہے، یعنی جب لا بدلتا ہے تو یہ نہیں بدلتا۔ مگر مختلف سوالوں میں اس مستقل کی قیمت وہی نہیں ہوتی مثلاً دائرہ کے رقبہ کے لئے ج = π، گرتے ہوئے جسم کے لئے ج = $\frac{1}{2}$ج جہاں ج اسراع بجاذبۂ ارض ہے۔ برقی رَو کے لئے ج کی قیمت مزاحمت اور حرارت کی اکائیوں پر موقوف ہوتی ہے۔

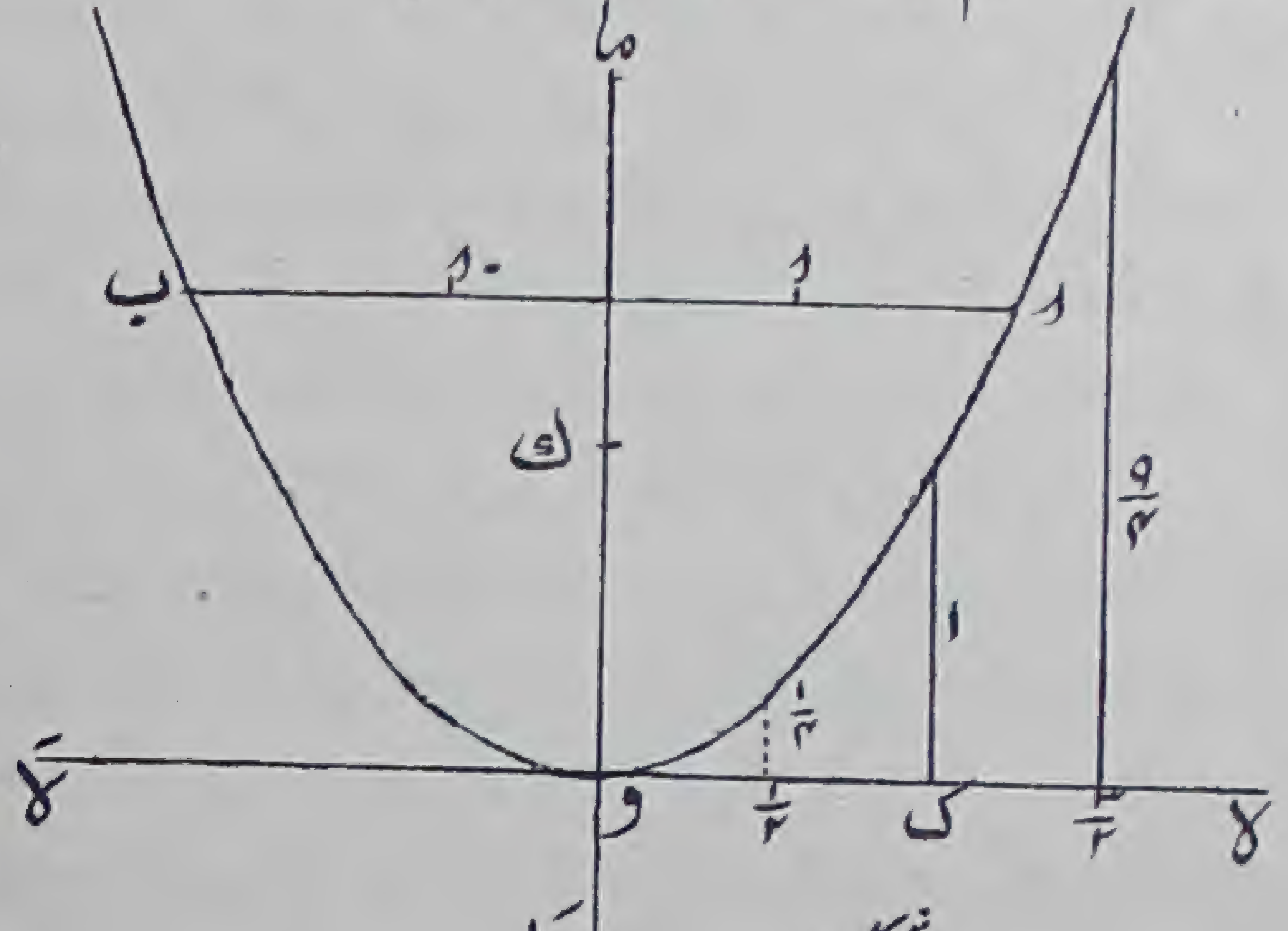
آسانی کے لئے فرض کرو کہ ج = ۱، عام صورت اس سے مستنبط ہو سکتی ہے۔ دو علی القوائم محور لا لا اور ما ما لو (شکل ۷) اور ان محوروں پر اکائی حصے و ک، و کؑ مقرر کرو، لا کو سلسلہ وار کوئی قیمتیں دو اور مساوات ما = لا² سے ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو۔ اس طرح ہمیں لا کی ہر قیمت اور ما کی متناظر قیمت سے عددوں کے کئی زوج حاصل ہوتے ہیں اور ہر زوج کو نقشہ کی سطح مستوی پر نقطہ کے محدد مان کر ایک نقطہ مرتسم ہو سکتا ہے، جبکہ لا کی قیمت کو نقطہ مذکورہ کا فصلہ اور ما کی متناظر قیمت کو معین مانا جائے۔ اگر لا کی قیمتیں عددوں کا ایک گھٹتا ہوا یا بڑھتا ہوا سلسلہ بنائیں اور نیز اگر دو متصل قیمتیں ایک دوسرے کے قریب قریب ہوں تو معلوم ہوگا کہ نقشہ میں جو نقطے مرتسم ہوتے ہیں وہ بھی ایک دوسرے کے کافی طور پر قریب ہیں۔ ان نقطوں میں سے جو منحنی آزادانہ طور پر کھینچا جائے اس کو لا² کا گراف یا ترسیم کہتے ہیں۔

قیمتوں کی جدول مرتب کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

لا	۰، ٫۱، ٫۲، ٫۳ ......۱، ۱٫۱، ....
ما	۰، ٫۰۱، ٫۰۴، ٫۰۹ ......۱، ۱٫۲۱، ....
لا	-٫۱، -٫۲، -٫۳ ......-۱، -۱٫۱، ....
ما	٫۰۱ ، ٫۰۴ ، ٫۰۹ ......۱، ۱٫۲۱، ....

و ک، و کؑ میں سے ہر ایک کو ایک انچ کے مساوی فرض کرو اور ان نقطوں کو مرتسم کرو (۰، ۰)، (٫۱، ٫۰۱)، .... (-٫۱، ٫۰۱)، (-٫۲، ٫۰۴)......، ان نقطوں میں سے گزرنیوالا

منحنی لا² کی ترسیم ہوگا۔ (دیکھو شکل ۷)



شکل ۷

ظاہر ہے کہ نقطوں کی صرف محدود تعداد ہی مرتسم ہو سکتی ہے، لیکن حساب لگانے سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ لا میں ایک خفیف سی تبدیلی ما میں ایک خفیف سی تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالنے کے مجاز ہیں کہ لا کی ایک ایسی قیمت کے جواب میں، جو ترسیم کے نقطے معلوم کرتے وقت استعمال نہیں کی گئی لیکن جو (لا کی) دو اور قیمتوں کے درمیان واقع ہے جو استعمال کی گئی ہیں، ایسی قیمت کے جواب میں ترسیم سے معیّن کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ اُس قیمت سے زیادہ متفاوت نہیں ہو سکتی جو مساوات سے لا کے لئے فی الحقیقت محسوب کرنے سے حاصل ہو۔ جہاں کہیں کچھ اشتباہ ہو، ما کی چند اور قیمتیں قریب قریب کے وقفوں پر محسوب کی جا سکتی ہیں۔

جب لا بہت بڑا ہو تو ما اور بھی بڑا ہوتا ہے اور شکل میں نقطوں کا مرتسم کرنا ناممکن ہو جاتا ہے، اس صورت میں

ہمیں منحنی کی شکل کا اندازہ ذہن میں لگانا چاہئے یا اگر ایسی قیمتوں کے لئے منحنی کی شکل کا ٹھیک طور پر معلوم کرنا ضروری ہو تو اکائیوں دک، و لٹ کو حسب ضرورت چھوٹا لینے سے ترسیم کی شکل معلوم ہوسکتی ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۱۹)

۱۷- منحنی کی مساوات - تشاکل - موڑ کی قیمت

اب ہم خالص ہندسی نقطہ نظر سے لا² کی ترسیم کا مطالعہ کرتے ہیں

(۱) منحنی کی مساوات - سطح مستوی پر کا کوئی نقطہ لا² کی ترسیم پر واقع ہوگا اگر اس نقطہ کا معیّن اس کے فصلہ کے مربع کے مساوی ہو، بالفاظ دیگر کسی نقطہ کے منحنی پر واقع ہونے کی شرط یہ ہے کہ اس نقطہ کے محدد مساوات ما = لا² کو پورا کریں جہاں یہ مساوات اُس قانون کو تعبیر کرتی ہے جسکے موافق منحنی کو مرتسم کیا گیا تھا۔ اس مساوات کو عام طور پر منحنی کی مساوات کہتے ہیں اور منحنی کو "اس مساوات سے تعبیر ہونے والا منحنی" کہتے ہیں۔ بس یہ جملے یعنی "تفاعل لا² کی ترسیم" اور "وہ منحنی جس کی مساوات ما = لا² ہے" یا "وہ منحنی جو مساوات ما = لا² سے تعبیر ہوتا ہے" سب کے سب ہم معنی ہیں۔

زیادہ عام طور پر جملات "تفاعل ف (لا) کی ترسیم" اور "وہ منحنی جس کی مساوات ما = ف (لا) ہے" کے ایک ہی معنی ہیں اور اس کے لئے شرط کہ کوئی نقطہ منحنی یا ترسیم پر واقع ہو یہ ہے کہ اس کے محدد مساوات ما = ف (لا) کو پورا کریں،

مثلاً نقطہ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$، لا² کی ترسیم پر واقع ہوتا ہے اور نقطہ

$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$، اس ترسیم پر واقع نہیں ہوتا، مبدأ لا² کی ترسیم پر واقع ہوتا ہے اور لا² + ۱ کی ترسیم پر واقع نہیں ہوتا۔

(۲) تشاکل۔ لا^۲ کی ترسیم کے اُس نقطہ کا معیّن جس کا فصلہ ۔ ا ہے اُس نقطہ کے معیّن کے مساوی ہے جس کا فصلہ ا ہے کیونکہ ہر ایک معیّن ا^۲ کے مساوی ہے۔ اگر نقطہ ا (ا، ا^۲) ہو اور نقطہ ب (۔ ا، ا^۲) تو ا ب، و ما پر عمود ہوگا اور و ما پر دو مساوی حصوں میں تقسیم ہو جائے گا، نیز ا کوئی عدد ہو سکتا ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ ترسیم و ما کے گرد متشاکل ہے، یا یوں کہو کہ و ما تشاکل کا محور ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۶ مشق ۳ کے ساتھ)۔ پس منحنی کو نقطوں کے ذریعہ مرتسم کرنے کے لئے صرف لا کی مثبت قیمتوں کے لئے ما کی قیمتیں معلوم کرنا کافی ہوگا کیونکہ و ما کے بائیں طرف منحنی کا جو حصہ ہے وہ و ما میں دائیں طرف کے حصہ کا عکس ہے۔ ہم یوں بھی خیال کر سکتے ہیں کہ شکل کی سطح مستوی کو و ما کے گرد دو قائموں میں سے گھما دیا گیا ہے، اسطرح منحنی کا وہ حصہ جو پہلے و ما کے دائیں طرف تھا گردش کرکے، و ما کے بائیں طرف آجاتا ہے۔

ایسا عام طور پر نہیں ہوتا کہ ف (لا) کی ترسیم محور ما یا کسی اور خط کے گرد متشاکل ہو لیکن ہر تفاعل کی جانچ کر لینی چاہئے کہ یہ کسی خط کے گرد متشاکل ہے یا نہیں کیونکہ تشاکل دیکھ لینے سے ہم بہت سی زحمت سے بچ جاتے ہیں۔ ف (لا) کی ترسیم و ما کے گرد متشاکل ہوگی اگر ف (لا) جفت تفاعل ہو (مشق اسوال ۵) کیونکہ اس صورت میں اُس نقطہ کا معیّن ف (۔ ا) جس کا فصلہ ۔ ا، ہے علامت اور مقدار دونوں کے لحاظ سے اُس نقطہ کے معیّن ف (ا) کے مساوی ہوتا ہے جس کا فصلہ ا ہے۔

(۳) تفاعل کا تغیر۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ مبدأ و سے شروع ہوتا ہے اور ترسیم پر حرکت کرتا ہے۔ ابتدا میں نقطہ کا معیّن

بہت آہستہ بڑھتا ہے اور جوں جوں متحرک نقطہ، نقطہ (۱، ۱) کے قریب آتا جاتا ہے معیّن زیادہ سرعت سے بڑھتا ہے اور جب یہ نقطہ (۱، ۱) سے گزر جاتا ہے تو یہ اور بھی جلدی بڑھتا ہے۔ جب، لا صفر سے $\frac{1}{2}$ تک بڑھتا ہے تو معیّن صفر سے $\frac{1}{4}$ تک بڑھتا ہے، جب لا، $\frac{1}{2}$ سے ۱ تک بڑھتا ہے تو معیّن $\frac{1}{4}$ سے ۱ تک بڑھتا ہے، جب لا، ۱ سے $\frac{3}{2}$ تک بڑھتا ہے تو معیّن ۱ سے $\frac{9}{4}$ تک بڑھتا ہے۔ پس ظاہر ہے کہ لا میں مساوی تبدیلی $\frac{1}{2}$ ہونے سے معیّن بالترتیب بقدر $\frac{1}{4}$، $\frac{3}{4}$، $\frac{5}{4}$ کے بڑھ جاتے ہیں۔ ترسیم کی شکل سے صاف ظاہر ہے کہ ایک خاص نقطہ پر پہنچ جانے کے بعد معیّن فصلہ کی نسبت زیادہ جلدی بڑھتا ہے، لیکن مبدأ کے قریب مقابلتہً کم سرعت سے بڑھتا ہے، پس ہم دیکھتے ہیں کہ لا^2 کی ترسیم جس میں تفاعل معیّن سے تعبیر ہوتا ہے تفاعل کے تغیر کی صاف اور صریح تصویر ہے۔

(۲۴) **موڑ کی قیمتیں۔** اگر ایک نقطہ ترسیم پر و ما کے بائیں جانب کے کسی مقام سے روانہ ہو کر اس کے دائیں طرف کے کسی مقام پر آئے تو پہلے نقطہ مذکور کا معیّن بتدریج کم ہوتا جائیگا یہاں تک کہ آخر نقطہ و پر پہنچ جائے گا، اس کے بعد پھر معیّن بڑھنا شروع ہوگا۔ نقطہ و ایسا ہے جہاں پر معیّن کا گھٹنا بند ہو جاتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے، اس کو ترسیم پر موڑ کا نقطہ کہتے ہیں، اسی مشابہت کو ملحوظ رکھتے ہوئے نقطہ و پر جو تفاعل لا^2 کی قیمت ہے یعنے صفر، اس کو تفاعل کی موڑ کی قیمت کہتے ہیں۔ اس صورت میں موڑ پر کی قیمت تفاعل یا معیّن کی کم سے کم قیمت بھی ہے۔

عام طور پر ترسیم کے ان نقطوں کو جن پر معیّن کا گھٹنا بند ہوتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے، یا بڑھنا بند ہوتا ہے اور

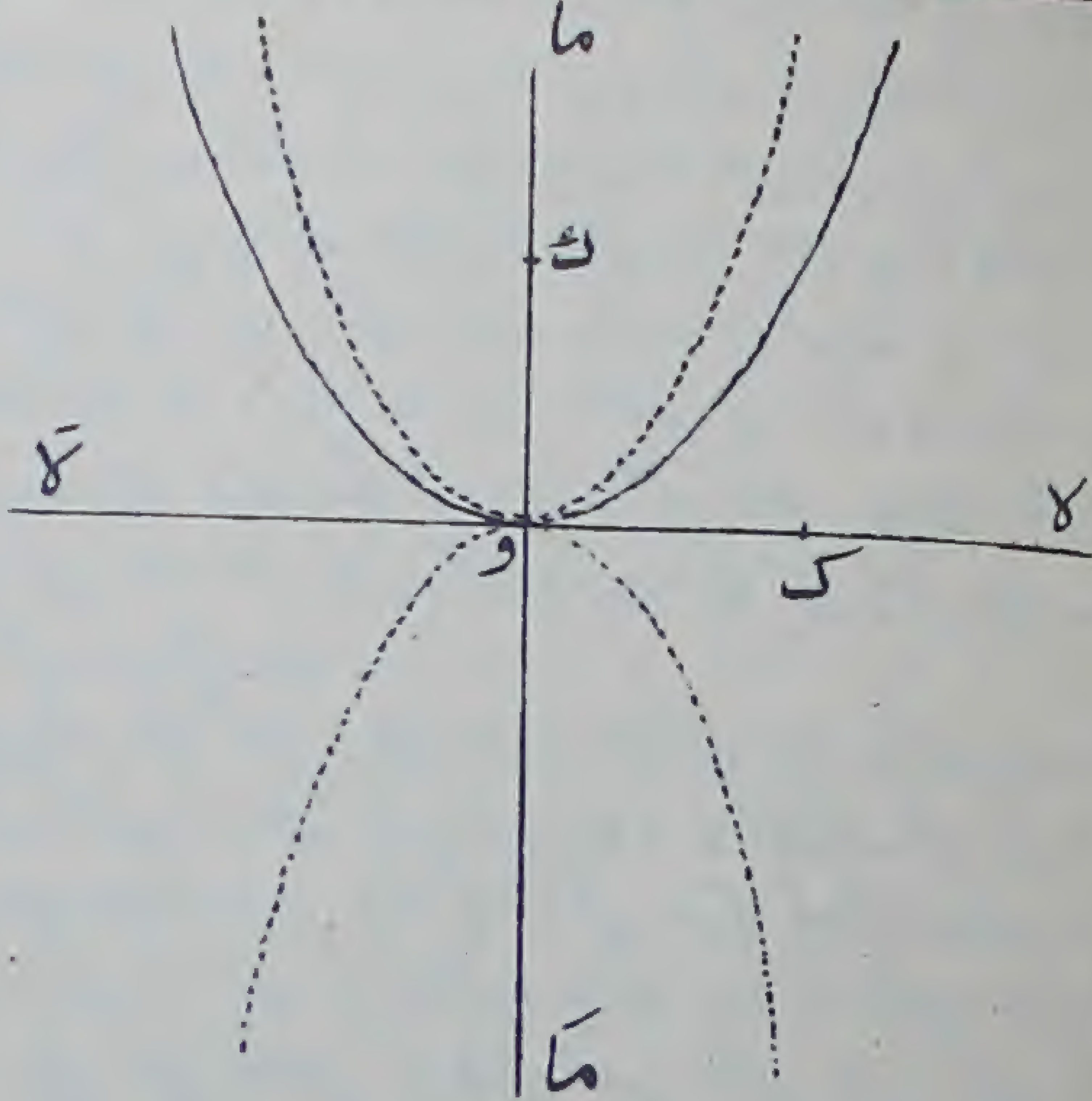
گھٹنا شروع ہوتا ہے ترسیم کے موڑ کے نقطے کہتے ہیں اور ان کے جواب میں تفاعل کی جو قیمتیں ہوتی ہیں ان کو موڑ کی قیمتیں کہتے ہیں، یہ موڑ کی قیمتیں بالترتیب تفاعل کی اقل اور اعظم قیمتیں کہلاتی ہیں، اقل اس لئے کیونکہ اس قیمت کے قریب میں تفاعل کی جو اور قیمتیں ہونگی وہ اس سے زیادہ ہونگی۔ اسی طرح قیمت اعظم کے نزدیک کی اور سب قیمتیں اُس سے کم ہوں گی۔

۱۸- ج لا^{۲} کی ترسیم۔ ہم لا کو مختلف قیمتیں دینے اور مساوات ما = ج لا^{۲} سے ما کی متناظر قیمتیں محسوب کرنے سے حسب معمول ج لا^{۲} کی ترسیم بنا سکتے ہیں لیکن اس ترسیم کے بنانے کے ایک اور طریقہ کا مطالعہ کرنا علم آموز ہوگا۔

پہلے فرض کرو کہ ج مثبت ہے، فرض کرو کہ لا^{۲} کی ترسیم کا کوئی معیّن ہا ہے اور لا کی اسی قیمت کے لئے ج لا^{۲} کی ترسیم کا معین ما ہے، تب ما = ج ہا کیونکہ ہا = لا^{۲} اور ما = ج لا^{۲} اور لا دونوں مساواتوں میں ایک ہی عدد ہے۔ ان دو معینوں کو متناظر معیّن کہا جا سکتا ہے۔

پس ج لا^{۲} کی ترسیم کا کوئی معیّن معلوم کرنے کے لئے صرف لا^{۲} کے متناظر معیّن کو ج سے ضرب دے دینا چاہئے، یا دوسرے لفظوں میں اگر م ن، لا^{۲} کی ترسیم کا کوئی معین ہو تو م ن یا م ن ممدودہ پر نقطہ نَ ایسا معلوم کرو کہ م نَ کو م ن سے وہی نسبت ہو جو ج کو ۱ سے ہے، تب نَ، ج لا^{۲} کی ترسیم پر ایک نقطہ ہوگا۔

اوپر کا نقطہ دار منحنی (شکل ۸) ۲ لا^{۲} کی ترسیم ہے اور لا^{۲} کی پوری ترسیم کے ہر ایک معین کو دگنا کرنے سے حاصل کیا گیا ہے۔ دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ دونوں ترسیموں کی عام روش وہی ہے



شکل ۸

لیکن ۲لا^{2} کی ترسیم لالا̄ سے، لا^{2} کی ترسیم کی نسبت زیادہ سرعت سے پرے ہٹتی ہے اور اس کا اونچان زیادہ ہے؛ عام طور پر ج لا^{2} کی ترسیم لا^{2} کی ترسیم کے اوپر یا نیچے واقع ہوتی ہے اگر بالترتیب ج بڑا ہو یا چھوٹا ہو ایک سے۔

اب فرض کرو کہ ج منفی ہے اور -۲ کے مساوی ہے، -۲لا^{2} کی ترسیم ۲لا^{2} کی ترسیم سے لالا̄ میں اس کا عکس لینے سے حاصل ہو سکتی ہے یا ۲لا^{2} کی ترسیم کو لالا̄ کے گرد دو قائموں میں سے گھمانے سے حاصل ہو سکتی ہے، کیونکہ -۲لا^{2} کی ترسیم کے معین وہی ہیں جو ۲لا^{2} کی ترسیم کے ہیں صرف علامت بدلی ہوئی ہے۔ نیچے کا نقطہ دار منحنی -۲لا^{2} کی ترسیم ہے، نیز و اس ترسیم کا موڑ کا نقطہ ہے اور جبریہ لحاظ سے صفر تفاعل -۲لا^{2} کی بڑی سے بڑی قیمت ہے۔

۱۹۔ ناپنے کی اکائیاں۔ اب ہم ج لا^{2} کی ترسیم پر اس

نقطۂ نظر سے غور کرتے ہیں کہ یہ گرتے ہوئے اجسام کے قانون کی ہندسی تعبیر ہے۔ اس صورت میں جب فضا اور وقت کے پیمانے بالترتیب فٹ اور سکنڈ ہوں تو ہمیں ج کو ۱۶ کے مساوی لے کر ترسیم کھینچنی چاہئے۔ ترسیم کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ گرتے ہوئے جسم کا فاصلہ طئے کردہ وقت کے بڑھنے سے کس سرعت کے ساتھ بڑھتا ہے کیونکہ منحنی محور و لا سے بہت سرعت کے ساتھ اوپر کو اٹھتا ہے۔ اس صورت میں و ما کے بائیں طرف منحنی کا حصہ ہماری مطلوبہ ہندسی تعبیر سے تعلق نہیں رکھتا کیونکہ لا کی منفی قیمتیں ہمارے احاطۂ بحث سے خارج ہیں۔

لیکن اگر و ک اور و ك حسب مفروض بالا مساوی ہوں تو گرنے کے فاصلہ اور وقت کے باہمی ربط کو لا کی قیمت ایک تک بھی معمولی مربع دار کاغذ پر مرتسم کرنا ناممکن ہوگا تاوقتیکہ و ک اور و ك دونوں کو بہت چھوٹا نہ لیا جائے۔ اس کا علاج صرف یہ ہے کہ ان اکائی حصوں کے طول مختلف فرض کئے جائیں۔ فٹ اور سکنڈ مختلف قسم کی مقداریں ہیں، اس لئے اس کی ضرورت نہیں کہ جو طول ایک فٹ کو تعبیر کرتا ہے وہی ایک سکنڈ کو بھی تعبیر کرے اور نہ ہی کسی نقطہ کے محددوں کی تعریف میں اس مفہوم کو مضمر سمجھا گیا ہے کہ و ک اور و ك باہم مساوی ہوں نقطۂ ن میں سے لا لا پر کے عمود کا پائیں م ہے اور ن کے محدد لا، ما ہیں اگر د م = لا × و ک اور م ن = ما × و ك اور ن کا مقام پورے طور پر متعین ہو جاتا ہے خواہ و ک اور و ك مساوی ہوں یا نہ ہوں۔

لہذا ما = ۱۶ لا^2 کی صورت میں ہم و ک کو ایک انچ کے مساوی لے سکتے ہیں اور و ك کو $\frac{1}{16}$ انچ کے۔

اس طرح ایک انچ طول کا فصلہ ایک سکنڈ کو تعبیر کرے گا

اور ایک انچ لمبا معین ۱۶ فٹ کو تعبیر کرے گا اسی طرح ۲ انچ لمبا فصلہ ۲ سکنڈ کو اور ۲ انچ لمبا معین ۳۲ فٹ کو تعبیر کرے گا وغیرہ وغیرہ۔ دیگر صورتوں میں بھی مناسب طور پر پیمانے منتخب کرنے سے ترسیم حدود اعتدال کے اندر آجائے گی۔

جب وہ مقداریں جنکے ربط کو ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرنا مقصود ہو ایک ہی نوعیت کی ہوں تو بھی اکثر اوقات اکائیوں کو مختلف طولوں سے تعبیر کرنا مناسب اور سہولت بخش ہوتا ہے۔ اس سے ترسیم کی خوبی میں کوئی فرق نہیں آتا۔ ترسیم کا مقصد صرف آنکھ کو یہ دکھانا ہے کہ جب ایک مقدار بدلتی ہے تو اس سے مربوط کوئی اور مقدار کس طرح بدلتی ہے۔ ظاہر ہے کہ دو خطوں مثلاً م ن اور ل ق کی نسبت جو مقدار اول کی کسی دو قیمتوں کو تعبیر کرتے ہیں اکائی طول کو تعبیر کرنے والے خط کے ناپ پر منحصر نہیں ہوتی۔ کیونکہ

$$\text{م ن} : \text{ل ق} = ا_۱ \times \text{وك} : ا_۲ \times \text{وك} = ا_۱ : ا_۲$$

جہاں وك مقدار کی اکائی کو تعبیر کرتا ہے اور $ا_۱ \times$ وك، $ا_۲ \times$ وك مقادیر کے طول ہیں۔

مثلاً۔ ایک پہاڑی سڑک کے نقشہ میں اگر اونچائیوں کو اسی پیمانہ پر دکھایا جائے جس پر کہ افقی فاصلوں کو دکھایا جاتا ہے تو اس سے سڑک کا اتار چڑھاؤ ٹھیک طور پر واضح نہیں ہوگا۔ اسلئے اونچائیوں کو افقی فاصلوں کی نسبت بڑے پیمانے پر دکھایا جاتا ہے۔ اگر ترسیم کو اصلی اونچائیاں معلوم کرنے کے لئے استعمال کرنا ہو تو صریحاً ہمیں نقشہ کا پیمانہ معلوم ہونا چاہئے۔

۲۰۔ محددوں کا ہندسہ۔ منحنی کے بہت سے خواص اس کی مساوات کو استعمال کرنے سے نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس

نقطۂ نظر سے منحنیوں پر بحث کرنا ہندسۂ تحلیلی سے تعلق رکھتا ہے۔

ایک طرف تو منحنی کی تعریف اس کی کسی ہندسی خاصیت کی بنا پر متعین کی جاتی ہے۔ پھر منحنی کی اس خاصیت کو منحنی کی مساوات کی شکل میں بیان کیا جاتا ہے: مثلاً دائرہ کے محیط کی خاصیت یہ ہے کہ اس پر کا ہر ایک نقطہ اس کے مرکز سے ایک ہی فاصلہ پر رہتا ہے۔

پس اگر محور علی القوائم ہوں اور دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ر ہو اور اس پر کا کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہو تو دفعہ ، کی رو سے و ن^2 مساوی ہے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2$ کے، نیز و ن مساوی ہے ر کے۔ اس لئے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots(۱)$$

اور یہ مساوات دائرہ پر کے ہر ایک نقطہ کے فصلہ اور معین کیلئے درست ہے، لیکن کسی اور نقطہ کے لئے صحیح نہیں۔ جیسے جیسے ن دائرہ کے گرد حرکت کرتا ہے لا اور ما دونوں کی قیمتیں بدلتی ہیں لیکن ہمیشہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ر^2 کے مساوی رہتا ہے۔ پس مساوات (۱) اس دائرہ کی مساوات کہلاتی ہے جس کا نصف قطر ر ہے۔

بخلاف اسکے اگر لا، ما میں کوئی مساوات ہو تو یہ ما کو لا کے تفاعل کے طور پر بیان کرتی ہے اور اس مساوات کی ترسیم نقطہ بہ نقطہ کھینچی جاسکتی ہے، اس کے متعلق بہت سی مثالیں بعد کی دفعات میں آئینگی۔ فی الحال ایک سادہ مثال کے طور پر ہم مساوات $\text{ما} = \text{لا}^2$ کو لے سکتے ہیں جس سے دفعہ ۱۶ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے یا ہم اوپر کی مساوات (۱) کو لیتے ہیں، اس صورت میں ما، لا کا دو قیمتوں والا تفاعل ہے $\text{ما} = \pm\sqrt{\text{ر}^2 - \text{لا}^2}$، لا کی قیمتوں $\text{لا} = -\text{ر}$ اور $\text{لا} = +\text{ر}$ کے درمیان صریحاً جب، لا تعداداً بڑا ہو ر سے تو ما خیالی ہوگا، ترسیم

محور لا لا کے گرد متشاکل ہے، نیز مقلوب تفاعل لا = ± ا√(ا - ما) کو دیکھنے سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ ترسیم محور ما کے گرد بھی متشاکل ہے۔ پس ہم صرف اُن نقطوں کو مرتسم کرنے سے جن کے لئے لا اور ما دونوں مثبت ہیں پورے منحنی کی شکل معلوم کر سکتے ہیں۔

دو تفاعلوں + √(ا² - لا²) اور - √(ا² - لا²) سے بالترتیب محور لا کے اوپر اور نیچے کے نصف دائرے تعبیر ہوتے ہیں۔

بعد کی دفعات کے مطالعہ سے معلوم ہو گا کہ آسان تفاعلوں کی ترسیموں کے ہندسی خواص کس طرح اِن کی مساواتوں سے مستنبط ہو سکتے ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۲۶)

مساوات (۱) سے جو ترسیم تعبیر ہوتی ہے اُس کے مرتسم کرنے میں اگر اکائیاں و ک اور و ک' مختلف طولوں کی لی جائیں تو یہ معلوم ہو گا کہ ترسیم دائرہ نہیں ہے بلکہ قطع ناقص ہے (مشق ۵، سوال ۴) مثلاً اگر و ک'، و ک کے نصف کے مساوی ہو تو ہر ایک معین دائرہ کے معین کے اصلی طول کے نصف کے مساوی ہو گا۔ لیکن جب تک و ک اور و ک' کے طول مساوی ہونگے ترسیم کی شکل میں کوئی فرق نہیں آئے گا۔ اکائیوں کے ناپ کی تبدیلی سے بشرطیکہ اکائیوں کے طول باہم مساوی رہیں شکل صرف کشادہ یا تنگ ہو جاتی ہے کیونکہ سب خط ایک ہی نسبت سے بدل جاتے ہیں۔

منحنیوں کے ہندسی خواص کا مطالعہ کرنے میں بھی اکثر اوقات مختلف طولوں کی اکائیاں منتخب کرنا ضروری ہوتا ہے تاکہ منحنی ایک مناسب ناپ کے تختہ پہ مرتسم ہو سکے۔ اس صورت میں یہ یاد رکھنا چاہئے کہ جو خط معینوں کو تعبیر کرتے ہیں گراف کی شکل سے صرف ان کی باہمی نسبتوں کا اندازہ ہو سکیگا ان کے اصلی طول نہیں

معلوم ہو سکینگے۔ سب صورتوں میں اکائیاں ایسی منتخب کرنی چاہئیں جن سے ترسیم حتی الوسع کشادہ حاصل ہو۔ چھوٹی سی ترسیم بالعموم اپنے وجود کی غرض کو پورا نہیں کرتی۔

مشق ۲

۱۔ کیا نقاط ا($\frac{1}{2}$، ۱)، ب($\frac{1}{3}$، $\frac{1}{2}$)، ج($-\frac{1}{4}$، $\frac{1}{4}$)، د(۵، ۱۰۰)، ع(۳، ۴۰) اُس منحنی پر ہیں جسکی مساوات $ما = ۴لا^{2}$ ہے؟

۲۔ کیا ذیل کے تفاعلوں میں سے کسی کی ترسیم کے لئے ما کا محور، محورِ تشاکل ہے؟

(۱) $۲لا^{2} - ۳لا^{4}$ (۲) $۲لا^{3} - ۳لا^{5}$ (۳) $لا^{۲ن}$ (۴) $لا^{۲ن+۱}$ (ن صحیح عدد)

(۵) $\frac{لا+۱}{لا^{2}+۱}$ (۶) $\frac{۱}{لا^{2}+۱}$ (۷) $ا + ب لا^{2} + ج لا^{4} + د لا^{6}$

کیا نقطہ (۱، −۱) کسی ترسیم پر واقع ہوتا ہے، ا کی قیمت کیا ہونی چاہئے اگر مبدأ (۷) کی ترسیم پر واقع ہو؟

۳۔ لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو −۲ اور ۲ کے درمیان ہیں ذیل کے تفاعلوں کی ترسیمیں بناؤ، نیز ترسیموں کے موڑ کے نقطے اور اُن نقطوں کے فصلے معلوم کرو جہاں ترسیمیں فصلوں کے محور سے ملتی ہیں۔

(۱) $لا^{2} - ۱$ (۲) $۲لا^{2} - ۱$ (۳) $-۲لا^{2} + ۱$

(۴) $۳لا - ۲لا^{2}$ (۵) $۱ - لا - لا^{2}$ (۶) $-۱ + ۳لا - ۲لا^{2}$

بتاؤ کہ ترسیمیں (۱)، (۲)، (۳) بغیر حساب لگائے $لا^{2}$، $۲لا^{2}$، $-۲لا^{2}$ کی ترسیموں سے کس طرح حاصل کیجا سکتی ہیں۔ نیز بتاؤ کہ ترسیم (۳) ترسیم (۱) سے کس طرح حاصل ہو سکتی ہے اور ترسیم (۶) ترسیم (۴) سے کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔

۴۔ اگر تفاعل ف(لا) کی ترسیم دی ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اس کی مدد سے مساوات ف(لا)=٠ کی اصلیں کس طرح معلوم ہو سکتی ہیں۔ سوال (۳) کی ترسیموں سے توضیح کرو۔

[فرض کرو کہ ترسیم پر کے کسی نقطہ ن کا فصلہ ا ہے، تب ترسیم کے مفہوم کی رو سے ن کا معین ف(ا) ہوگا، پس اگر ف(ا) صفر ہو تو ن لازماً فصلوں کے محور پر واقع ہوگا۔ لیکن اگر ف(ا)=٠ تو ا مساوات ف(لا)=٠ کی اصل ہے۔ اس لئے مساوات ف(لا)=٠ کی اصلیں اُن نقطوں کے فصلے ہیں جہاں ف(لا) کی ترسیم فصلوں کے محور کو قطع کرتی ہے۔]

۵۔ جب منحنی کی مساوات $ما = لا^{۳}$ ہے اُسے مرتسم کرو۔ منحنی پر کے ہر ایک نقطہ ن کے جواب میں منحنی پر ایک اور نقطہ نَ ایسا ہے جو بلحاظ مبدا کے ن کا تشاکل ہے (دفعہ ۶ مثال ۲)۔ کیونکہ اگر نقطہ ن (ا، ب) ہو تو نَ (-ا، -ب) ہوگا اور جب $ب = ا^{۳}$ تو $(-ب) = (-ا)^{۳}$، پس جب مثال ہذا کی مانند کسی منحنی کی مساوات میں لا، ما کی بجائے بالترتیب -لا، -ما رکھنے سے مساوات میں فرق نہ آئے تو مبدا کو منحنی کے تشاکل کا مرکز کہتے ہیں۔

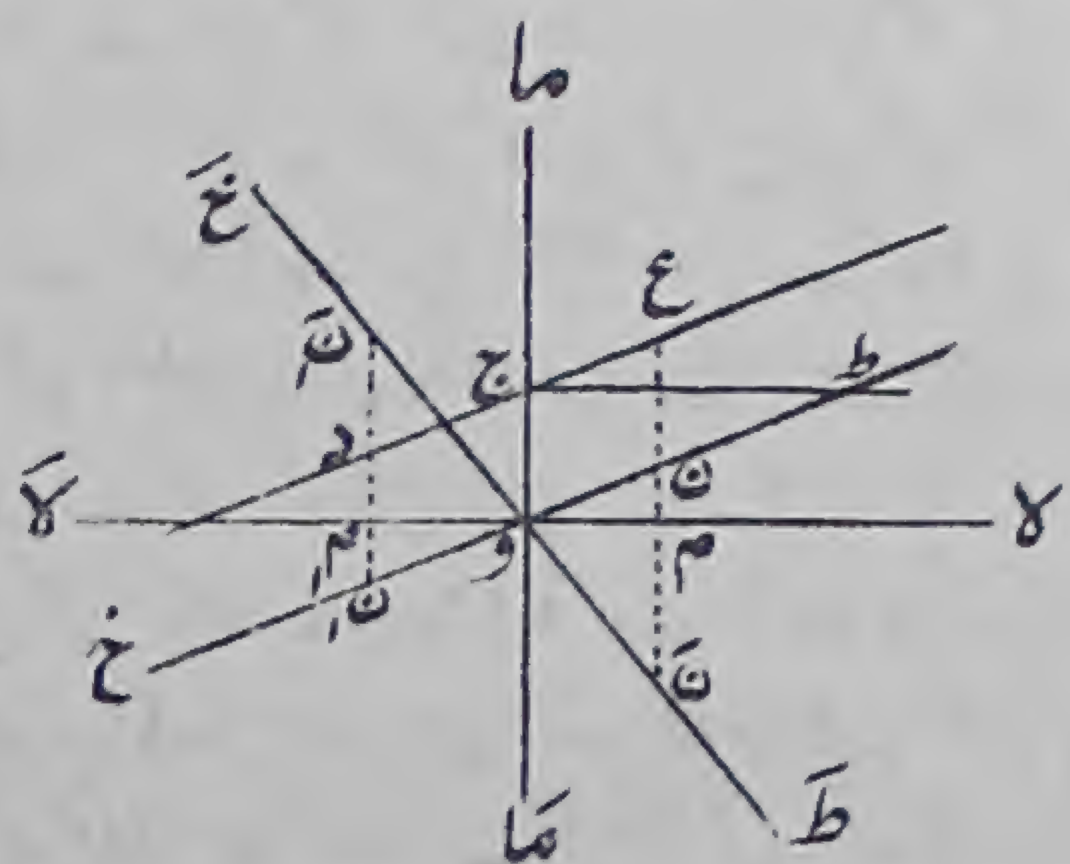
۶۔ ذیل میں جن منحنیوں کی مساواتیں دی گئی ہیں ان میں سے کن کے لئے مبدا تشاکل کا مرکز ہے۔

(۱) $ما = ا\,لا^{۳} + ب\,لا^{۵}$ (۲) $ما = لا^{\frac{۵}{۳}}$ (۳) $ما = لا^{\frac{۲}{۳}}$

(۴) $ا\,لا^{۲} + ب\,ما^{۲} = ج$

۲۱۔ **خطی تفاعل**۔ اگر زاویہ لا و ما کے منصف پر کوئی نقطہ کہیں لیا جائے تو اس نقطہ کا معیّن بلحاظ علامت اور عددی قیمت دونوں کے نقطہ مذکورہ کے فصلہ کے مساوی ہوگا۔ لیکن اگر کوئی اور نقطہ لیا جائے جو اِس منصف پر واقع نہ ہو تو اس نقطہ کا

معین بلحاظ علامت و عددی قیمت دونوں کے اسکے فصلہ کے مساوی
نہیں ہوگا۔ اس لئے منصف کی مساوات ما = لا ہے یعنی منصف
تفاعل لا کی ترسیم ہے۔
اسی طرح ما = -لا زاویہ ما و لاَ کے منصف کی مساوات ہے



شکل ۹

اگر ن خطِ مستقیم خ و ط (شکل ۹) پر کوئی نقطہ ہو اور نقطہ ن کے محدد (لا، ما)
ہوں تو ما = لا مس لا و ط۔ یہ ربط ہر صورت میں صحیح ہوگا خواہ
ن کے محدد دونوں مثبت ہوں یا دونوں منفی ہوں جیسا کہ نَ کے
محل میں ہے۔ برعکس اس کے اگر نقطہ ن خط خ و ط پر واقع نہ ہو تو
مساوات ما = لا مس لا و ط نقطہ کے محددوں کے لئے پوری نہ
ہوگی۔ پس خطِ مستقیم خ و ط کی مساوات ما = لا مس لا و ط
ہے یا خ و ط تفاعل لا مس لا و ط کی ترسیم ہے۔
اسی طرح ما = لا مس لا و طَ خط مستقیم خَ و طَ کی مساوات ہے
زاویہ لا و طَ اور مس لا و طَ دونوں منفی ہیں۔
پس مساوات ما = ا لا ہمیشہ مبدأ میں سے گزرنے والے خطِ
مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جہاں ا اُس زاویہ کا مماس ہے جو خطِ مذکور

ولا کے ساتھ بناتا ہے۔
اگر نقطہ ج میں سے ایک خط د ج ع، ح وط کے متوازی کھینچا جائے تو

م ع = م ن + ن ع = وم مس لا وط + وج

م، د = م، ن، + ن، د = وم، مس لا وط + وج

قدموں کو جمع کرنے کے طریقہ کی رو سے (دفعہ ۲)
پس اگر لا، ما نقطہ ع کے محدد ہوں اور و ج، ب کے مساوی ہو تو

ما = لا مس لا وط + ب

اور یہ مساوات قائم رہتی ہے اگر لا، ما نقطہ ع کے محدد ہونے کی بجائے د ع پر کے کسی اور نقطہ کے محدد ہوں۔
اگر ج کو و مَا پر لیا جائے تو فرق صرف یہ ہوگا کہ اس کا ناپ ب کوئی منفی عدد ہوگا۔
پس اس شکل ا لا + ب کے کسی تفاعل کی ترسیم خط مستقیم ہوتی ہے جہاں ا اس زاویہ کا مماس ہے جو خط مذکور محور لا کے ساتھ بناتا ہے اور ب اس نقطہ کا فاصلہ ہے مبدأ و سے جس پر خط مذکور ما کے محور کو قطع کرتا ہے۔ اسکو بالعموم محور ما پر کا مقطوعہ بھی کہتے ہیں۔ (دیکھو مشق ۳ سوال ۲)
اگر ا = ۰ تو خط محور و لا کے متوازی ہوگا بشرطیکہ ب صفر نہ ہو، اگر ب بھی صفر ہو تو خط خود محور لا ہو جاتا ہے۔
مساوات لا = ص محور ما کے متوازی کسی خط کو تعبیر کرتی ہے بشرطیکہ ص صفر نہ ہو۔ اگر ص = ۰ تو مساوات محور مَا ما کو تعبیر کرتی ہے۔ اس صورت میں خط محور و لا پر عمود ہوتا ہے اور جو زاویہ یہ محور لا کے ساتھ بناتا ہے اس کا مماس لامتناہی ہوتا ہے۔

چونکہ ا لا + ب کی ترسیم خطِ مستقیم ہے اس لئے ا لا + ب کو بالعموم متغیر لا کا خطی تفاعل کہتے ہیں۔
یہ نہایت ضروری ہے کہ طالب علم ذیل کے جملہ کا مفہوم متعین کرلے۔ جملہ یہ ہے "وہ زاویہ جو خطِ مستقیم فصلوں کے محور کے ساتھ بناتا ہے"۔ اس غرض سے ہم اس جگہ ایک دستور قائم کرتے ہیں جس کو بار بار دہرانے کی ضرورت نہیں ہوگی۔ یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ خط محور لا کے ساتھ زاویہ قائمہ نہیں بناتا۔ مبدأ و میں سے ایک خط کھینچو جو خط مذکور کے متوازی ہو۔ اب فرض کرو کہ ایک خط و لا سے شروع ہوکر (و لا سے نہیں) و کے گرد اوپر یا نیچے کی جانب اتنا گھومتا ہے کہ یہ و میں سے گذرنے والے متوازی خط پر منطبق ہو جاتا ہے۔ اس طرح جس مثبت یا منفی حادہ زاویہ میں سے خط کو گھومنا پڑے اس زاویہ سے ہم خطِ مذکورہ کا وہ زاویہ مراد لینگے جو یہ محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔ یا جو ایک ہی بات ہے کہ اگر معلومہ خط پر کے کسی نقطہ سے و لا کے متوازی ایک خط کھینچا جائے اور اس خط کو اتنا گھمایا جائے کہ یہ معلومہ خط پر منطبق ہو جائے تو جس زاویہ (مثبت، منفی) میں سے یہ خط گھومیگا وہ زاویہ زیر بحث ہوگا۔
پس جو زاویہ خط د ع محور و لا کے ساتھ بناتا ہے وہ لا و ط ہے یا ط ج ع، جہاں ج ط، و لا کے متوازی ہے، یہ زاویہ مثبت ہے، جو زاویہ ط ج محور و لا کے ساتھ بناتا ہے وہ منفی ہے
ڈھال۔ کسی خط کے ڈھال سے اُس زاویہ کا مثلثی مماس مراد ہوتا ہے جو یہ فصلوں کے محور و لا کے ساتھ بناتا ہے، اسلئے ڈھال مثبت ہوگا اگر زاویہ مثبت ہو اور منفی ہوگا اگر زاویہ منفی ہو۔ ڈھال کی بجائے بعض اوقات لفظ "سلامی" بھی استعمال ہوتا ہے۔
اگر ہم فصلوں کے محور و لا کو افقی اور معینوں کے محور و ما کو انتصابی فرض کریں اور ان کی مثبت سمتیں بالترتیب دائیں جانب

اور اوپر کی طرف لیں تو ہم خط مذکورۂ بالا (دفعہ سابق) پر کسی نقطہ کی حرکت کو اختصاراً یوں بیان کر سکتے ہیں :- جب متحرک نقطہ کا ظل محور لا پر دائیں طرف حرکت کرتا ہے تو نقطہ مذکورہ خط پہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اور جب اس کا ظل بائیں طرف حرکت کرتا ہے تو نقطہ خط پر نیچے اترتا ہے ۔ یا یوں کہئے کہ اگر نقطہ مفروضہ کے محدد (لا، ما) ہوں اور نقطہ لا دائیں طرف حرکت کرے تو نقطہ (لا، ما) اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اور جب نقطہ لا بائیں جانب حرکت کرے تو نقطہ مفروضہ خط پہ نیچے اترتا ہے ۔

جب ڈھال مثبت ہو جیسا کہ خط د ع کی صورت میں تو ہم دیکھتے ہیں کہ جب نقطہ لا دائیں طرف کو حرکت کرتا ہے تو نقطہ (لا، ما) خط پر اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے لیکن جب ڈھال منفی ہو جیسا کہ خط مستقیم ح ط میں تو ہم دیکھتے ہیں کہ جب نقطہ لا دائیں طرف حرکت کرتا ہے تو نقطہ (لا، ما) خط پر نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ ہر دو صورتوں میں ظاہر ہے کہ جب نقطہ (لا، ما) کی حرکت کی سمت بدلتی ہے تو نقطہ لا کی حرکت کی سمت بھی بدلتی ہے ۔ اس جملہ یعنی "خط یا منحنی پر نقطہ لا، ما" کی بجائے بعض اوقات اختصار کی خاطر ہم "ترسیمی نقطہ" استعمال کرینگے ۔ جس سے وہ نقطہ مراد ہوگا جو منحنی کو مرتسم کرتا ہے ۔

مشق ۳

۱- ذیل میں جن خطوں کی مساواتیں دی گئی ہیں ان کے ڈھال اور مقطوع محور ما پر معلوم کرو ۔

(۱) ما = - لا + ۲ (۲) ما = ۳/۲ لا - ۱ (۳) ما = - ۳/۲ لا - ۱

ان خطوں کو نقشہ پر کھینچو ۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات ۲ ما + ۳ لا - ۱ = ۰ سے ایک خطِ مستقیم تعبیر ہوتا ہے، اِس خط کا ڈھال بھی معلوم کرو۔

مساوات بالا یوں لکھی جا سکتی ہے $ما = -\frac{۳}{۲} لا + \frac{۱}{۲}$، اس لئے یہ ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جسکا ڈھال $-\frac{۳}{۲}$ ہے۔

اسی طرح سے دیکھا جا سکتا ہے کہ مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ...(۱) ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اگر ب صفر نہ ہو تو ڈھال $-\frac{ا}{ب}$ ہے، اگر ب صفر ہو تو مساوات ہو جاتی ہے $لا = -\frac{ج}{ا}$ جس سے ایک ایسا خطِ مستقیم تعبیر ہوتا ہے جو محور لا پر عمود ہے، اس صورت میں ڈھال لامتناہی ہے۔

اگر ا اور ب دونوں میں سے کوئی بھی صفر نہ ہو اور اگر خط محور لا کو نقطہ ق پر کاٹے اور محور ما کو نقطہ ط پر، تو

$و ق = -\frac{ج}{ا}$ اور $و ط = -\frac{ج}{ب}$ کیونکہ ق کے محدد (وق، ۰) ہیں اور یہ مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں، اس لئے

$$ا \times وق + ج = ۰ \quad یا \quad وق = -\frac{ج}{ا}$$

اسی طرح نقطہ ط کے محدد ہیں (۰، وط) اس لئے ب × وط + ج = ۰۔ وق اور وط کو محوروں پر کے مقطوعے کہتے ہیں جو خط مستقیم محوروں سے کاٹتا ہے۔

ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم کے مرتسم کرنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے محوروں پر کے مقطوع وق، اور وط معلوم کر لئے جائیں اور پھر ق اور ط کو ملا دیا جائے۔

۳۔ معلوم کرو کہ ذیل کے نقاط

ا (۱، ۱)، ب (۲، -۱)، ج (۹، -۴)

میں سے کون کون سے خطِ مستقیم ۲ لا + ۳ ما = ۶ پر واقع ہوتے ہیں

۴- دکھاؤ کہ ا کی مستقل قیمت خواہ کچھ ہی ہو نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اس خطِ مستقیم پر واقع ہوتا ہے جس کی مساوات $\text{ما} - \text{ما}_1 = \text{ا}\,(\text{لا} - \text{لا}_1)$ ہے۔

یہ مساوات پوری ہوتی ہے جب ہم ما کی بجائے ما_1 اور لا کی بجائے لا_1 رکھیں۔

۵- مشق ۴ میں مستقل مقدار ا کی کیا قیمت ہو کہ نقطہ $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ بھی خط مستقیم پر واقع ہو۔

چونکہ محددوں $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ سے مساوات کو پورا ہونا چاہئے، اسلئے

$$\text{ما}_2 - \text{ما}_1 = \text{ا}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) \quad \text{یا} \quad \text{ا} = \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}$$

اس لئے اس خط کی مساوات جو نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ میں سے گذرتا ہے یہ ہے

$$\text{ما} - \text{ما}_1 = \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}\,(\text{لا} - \text{لا}_1)$$

۶- نقطوں کے ازواج ذیل میں سے گزرنے والے خطوط کی مساواتیں معلوم کرو۔

(۱) (۱، ۲)، (۳، ۱) (۲) (-۱، ۲)، (۲، -۱)

(۳) (۰، ۰)، (۱، -۱) (۴) (۰، ۳)، (-۲، ۰)

۷- اس خط کی مساوات معلوم کرو جس کا ڈھال ۲ ہو اور جو نقطہ (۳، ۱) میں سے گزرے۔

۸- اس خط کی مساوات معلوم کرو جس کا ڈھال ج ہو اور جو نقطہ (ا، ب) میں سے گزرے۔

۹- ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

(۱) لا + ۲ ما = ۳　　　(۲) ۳ لا + ما = ۴

چونکہ نقطۂ تقاطع دونوں خطوں پر واقع ہے، اس لئے محدد دونوں مساواتوں کو پورا کرینگے۔

پس ان مساواتوں کو بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے سے نقطۂ تقاطع کے مطلوبہ محدد لا = ۱ اور ما = ۱ حاصل ہوتے ہیں۔ تصویر کھینچ کر اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

۱۰۔ ایک ہی شکل میں دو منحنی کھینچو جن کی مساواتیں بالترتیب ۲ لا + ما − ۳ = ۰ اور ما = لا^{۲} ہیں۔ پیمائش سے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو اور ان مساواتوں کو بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کر کے اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات ۲ لا + لا^{۲} − ۳ = ۰ کی اصلیں منحنیات سوال ماقبل کے نقاطِ تقاطع کے فصلے ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات ف (لا) = ج کی اصلیں منحنیات

ما = ج اور ما = ف (لا)

کے نقاط تقاطع کے فصلے ہیں۔

شق ۲ کے سوال ۴ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۲۳۔ منطق تفاعل۔ اس شکل

ا + ب لا + ج لا^{۲} + ... + ک لا$^{ن-۱}$ + ل لا^{ن} ....(۱)

کے جملہ کو جس میں سر ا، ب، ج، ... ک، ل مستقل ہیں اور لا کے قوت نما سب کے سب مثبت صحیح عدد ہیں (اور جن میں ن سب سے بڑا ہے) لا میں ن ویں درجہ کا منطق صحیح تفاعل کہتے ہیں۔

لا کے دو منطق صحیح تفاعلوں کے خارج قسمت کو لا کا منطق

کسری تفاعل کہتے ہیں۔
مساواتوں کے نظریہ سے ہمیں معلوم ہے کہ (۱) کی شکل کا کوئی جملہ بالعموم لا کی ن قیمتوں کے لئے صفر ہوگا جس کا یہ مطلب ہے کہ تفاعل (۱) کی ترسیم بالعموم محور لا کو ن مرتبہ کاٹے گی۔ (دیکھو مشق ۲ سوال ۴)۔ مگر ممکن ہے کہ لا کی بعض قیمتیں جن کے لئے (۱) صفر ہوتا ہے خیالی ہوں، ایسی صورت میں فصلوں کی ان قیمتوں کے جواب میں محور پر کوئی حقیقی نقطے نہیں ہوں گے یعنی ترسیم محور کو ن مرتبہ قطع نہیں کرے گی۔ جب لا کی دو قیمتیں جن کے لئے جملہ (۱) صفر ہوتا ہے مساوی ہوں تو طالب علم دیکھیگا کہ منحنی متناظر نقطہ پر محور لا سے مس کرتا ہے۔

جفت قوتوں کی ترسیمیں۔ لا کی جفت قوتوں یعنی لا^۲، لا^۴،... کی ترسیمیں سب کی سب ایک ہی نوعیت کی ہیں، یہ سب محور لا کو مبدأ و پر مس کرتی ہیں اور محور صا سب میں تشاکل کا محور ہے۔ لیکن لا کا قوت نما جس قدر بڑا ہوگا ترسیم مبدأ کے قریب، محور لا سے اسیقدر آہستہ آہستہ اوپر کو اٹھے گی، لیکن لا کے ایک سے بڑے ہونے کی صورت میں، قوت نما جتنا زیادہ ہوگا اتنی سرعت سے ترسیمی نقطہ محور لا سے اوپر کو ہٹیگا۔

ترسیموں ا لا^۲، ا لا^۴،.... کی عام شکل متناظر تفاعیل لا^۲، لا^۴،... کی ترسیموں کے معینوں کو نسبت ا : ۱ میں زیادہ کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔ ملاحظہ ہو دفعہ ۱۸ ۔

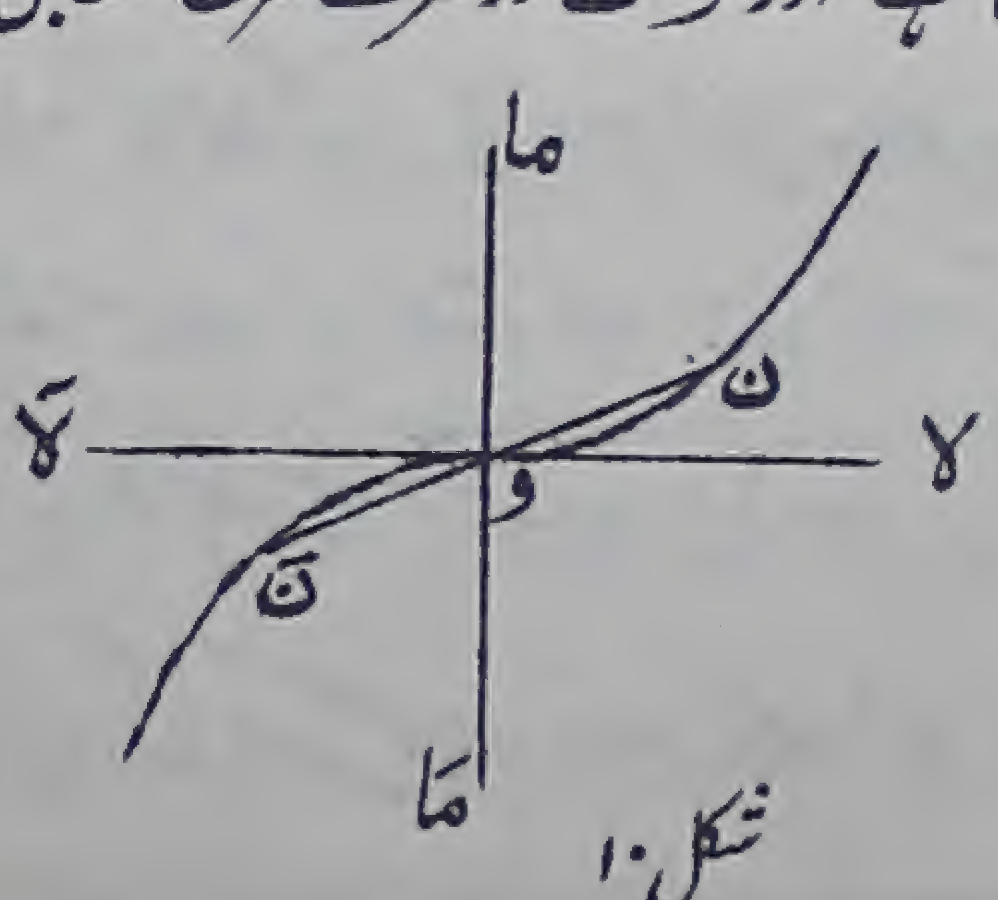
طاق قوتوں کی ترسیمیں۔ ایک سے بڑی طاق قوتوں

لا^{3}، لا^{5}، ... کی ترسیمیں محور لا کو مبدأ پر مس کرتی ہیں، لیکن ان میں ما کا محور تشاکل کا محور نہیں ہوتا۔ البتہ مبدأ تشاکل کا مرکز ہوتا ہے (دیکھو مشق ۲ سوال ۵)

لا کی مثبت قیمتوں کے لئے طاق قوتوں کی ترسیمیں جفت قوتوں کی ترسیموں کی مانند ہوتی ہیں، مبدأ کے قرب میں لا^{3} کی ترسیم لا^{2} کی ترسیم کی نسبت زیادہ چپٹی ہوتی ہے، لیکن اتنی چپٹی نہیں ہوتی جتنی کہ لا^{4} کی ترسیم، لیکن لا کی ان قیمتوں کے لئے جو ایک سے زیادہ ہوں لا^{3} کی ترسیم لا^{2} کی ترسیم کے اوپر اور لا^{4} کی ترسیم کے نیچے ہوتی ہے۔

لا کی منفی قیمتوں کے لئے لا^{3} کی ترسیم اس طرح بن سکتی ہے:- لا کی مثبت قیمتوں کے لئے جو ترسیم بنائی گئی ہے اس پر کوئی نقطہ ن لو اور ن و کو مبدأ کے دوسری طرف اتنا خارج کرو کہ ن و = و نَ، تب نَ ترسیم کا ایک نقطہ ہوگا جو بلحاظ و کے ن کا جواب ہوگا (دیکھو شکل ۱۰)۔ اسی طرح کا عمل ہر منحنی کے لئے کار آمد ہو سکتا ہے جو مبدأ کے لحاظ سے تشاکل ہو۔

پس لا کی طاق قوتوں کی ترسیمیں مبدأ پر محور لا سے مس بھی کرتی ہیں اور اسکو قطع بھی کرتی ہیں اور و کے ایک طرف ان کی خمیدگی ایک سمت میں ہوتی ہے اور و کے دوسری طرف متقابل سمت میں۔



شکل ۱۰

تعریف — وہ نقطہ (مثلاً و) جس پر منحنی اپنے مماس کو قطع کرتا ہے اور مماس کے ایک طرف ایک سمت میں اور دوسری طرف متقابل سمت میں جھک جاتا ہے نقطہ عطف کہلاتا ہے، اس نقطہ پر کے مماس کو عطفی مماس کہتے ہیں۔

طالب علم کو چاہئے کہ ایک ہی تصویر میں لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو -۱ اور +۱ کے درمیان ہوں لا^{۲}، لا^{۳}، لا^{۵} کی ترسیمیں بڑے پیمانہ پر بنائے، اس طرح اُسے لا کی کسری قیمتوں کے لئے لا کی قوتوں کی اضافی مقداروں کے متعلق نہایت مفید معلومات حاصل ہونگی نیز اس کو لا کی قیمتوں صفر اور ایک کے درمیان اس قسم کے تفاعل (مثلاً لا$^{\frac{۵}{۲}}$) کی ترسیم کی روش کے متعلق عام اندازہ ہوسکیگا لا$^{\frac{۵}{۲}}$ کی ترسیم لا^{۲} کی ترسیم کے نیچے اور لا^{۳} کی ترسیم کے اوپر واقع ہوگی۔ اگر لا منفی ہو تو لا$^{\frac{۵}{۲}}$ خیالی ہوگا اور محور صا کے بائیں جانب ترسیم کا کوئی حصہ واقع نہیں ہوگا۔

اسی طرح لا کی قیمتوں ۱ سے ۳ تک کے لئے انہی تفاعلوں کی ترسیمیں کسی چھوٹے پیمانہ پر بنانے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر لا ایک سے بڑا ہو تو لا کی اعلیٰ قوتیں کس سرعت کے ساتھ بڑھتی ہیں۔ نیز اِن ترسیموں کے ذریعہ اس ضروری اور اہم اصول کی تصدیق باسانی ہوسکتی ہے کہ لا کی قیمت کو کافی بڑا لینے سے کسی منطق صحیح تفاعل میں سب سے بڑی قوت والی رقم تعداداً باقی سب رقموں کے مجموعہ سے بڑی بنائی جاسکتی ہے اور اس لئے لا کی بڑی قیمتوں کے لئے تفاعل کی علامت بڑی سے بڑی قوت والی رقم کی علامت سے متعین ہوتی ہے۔

کسی عام منطق صحیح تفاعل کی ترسیم کا بنانا بالعموم دقت طلب اور دشوار عمل ہوتا ہے، لیکن جب طالب علم کسی تفاعل کو تفرقی

کرنا سیکھ لیگا تو وہ دیکھیگا کہ یہ زحمت ایک حد تک کم ہو سکتی ہے۔
مثال کے طور پر تفاعل ف (لا) کو لو جہاں

$$ف (لا) = لا^{۳} - ۳ لا + ۱$$

$$تب\ ف (لا) = لا^{۳} \left(۱ - \frac{۳}{لا^{۲}} + \frac{۱}{لا^{۳}}\right)$$

اب ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ اگر لا تعداداً مساوی ہو یا بڑا ہو ۲ سے تو خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مثبت ہوگا اس لئے اگر لا مثبت ہو اور مساوی ہو یا بڑا ہو ۲ سے تو تفاعل ف (لا) مثبت ہوگا اور اگر لا منفی ہو اور تعداداً بڑا ہو ۲ سے تو تفاعل ف (لا) منفی ہوگا کیونکہ لا^۳ منفی ہوگا اور خطوطِ وحدانی کے اندر کا جملہ مثبت ہوگا۔ اسلئے ترسیم محور لا کو اُن نقطوں کے درمیان جن پر لا = -۲ اور ۲ کم از کم ایک دفعہ ضرور عبور کریگی مزید معائنہ کرنے سے

$$ف (-۲) = -۱،\ ف (-۱) = +۳،\ ف (۱) = -۱،\ ف (۲) = +۳$$

اس لئے ترسیم محور کو تین مرتبہ عبور کرے گی۔
ایک دفعہ نقاط -۲ اور -۱ کے درمیان، پھر نقاط -۱ اور ۱ کے درمیان اور پھر نقاط ۱ اور ۲ کے درمیان۔ نیز چونکہ مساوات تیسرے درجہ کی ہے اس لئے منحنی تین سے زیادہ مرتبہ عبور نہیں کر سکتا۔ لہذا موڑ کے نقطے صرف دو ہیں۔

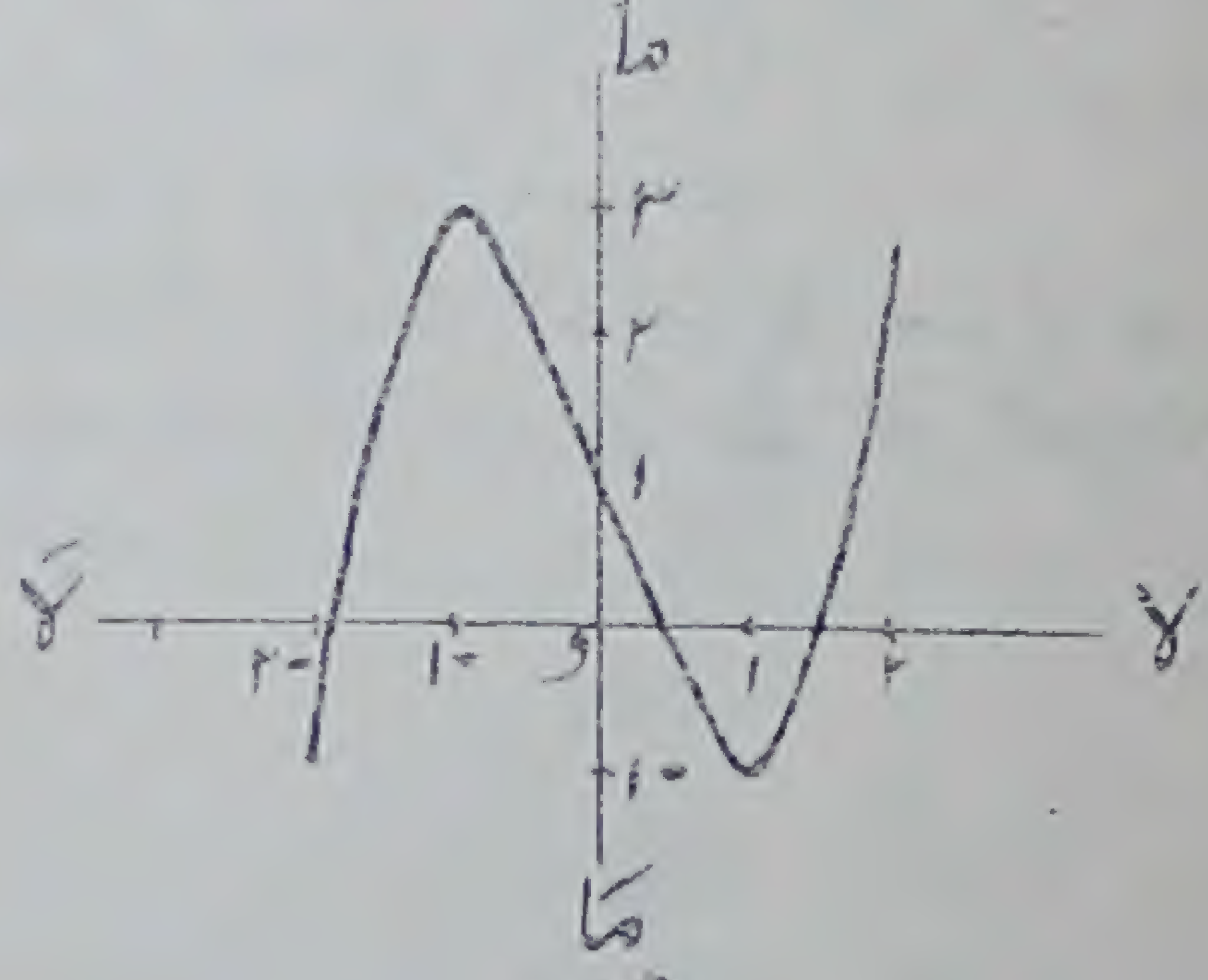
$$نیز\ ف (-۱٫۹) = -۰٫۱۵۹$$

$$ف (-۱٫۸) = +۰٫۵۶۸$$

پس ترسیم محور لا کو نقاط -۱٫۹ اور -۱٫۸ کے درمیان عبور کرتی ہے۔

$$اگر\ لا = -۱٫۸۸\ تو\ ف (لا) = -۰٫۰۰۵$$

پس ترسیم نقطہ لا = −۱٫۸۸ کے بالکل قریب سے عبور کرتی ہے اور لا کی یہ قیمت مساوات لا³ − ۳ لا + ۱ = ۰ کی ایک تقریبی اصل ہے اسی طرح سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ باقی دو اصلیں تقریباً ۰٫۳۵ اور ۱٫۵۳ ہیں ۔



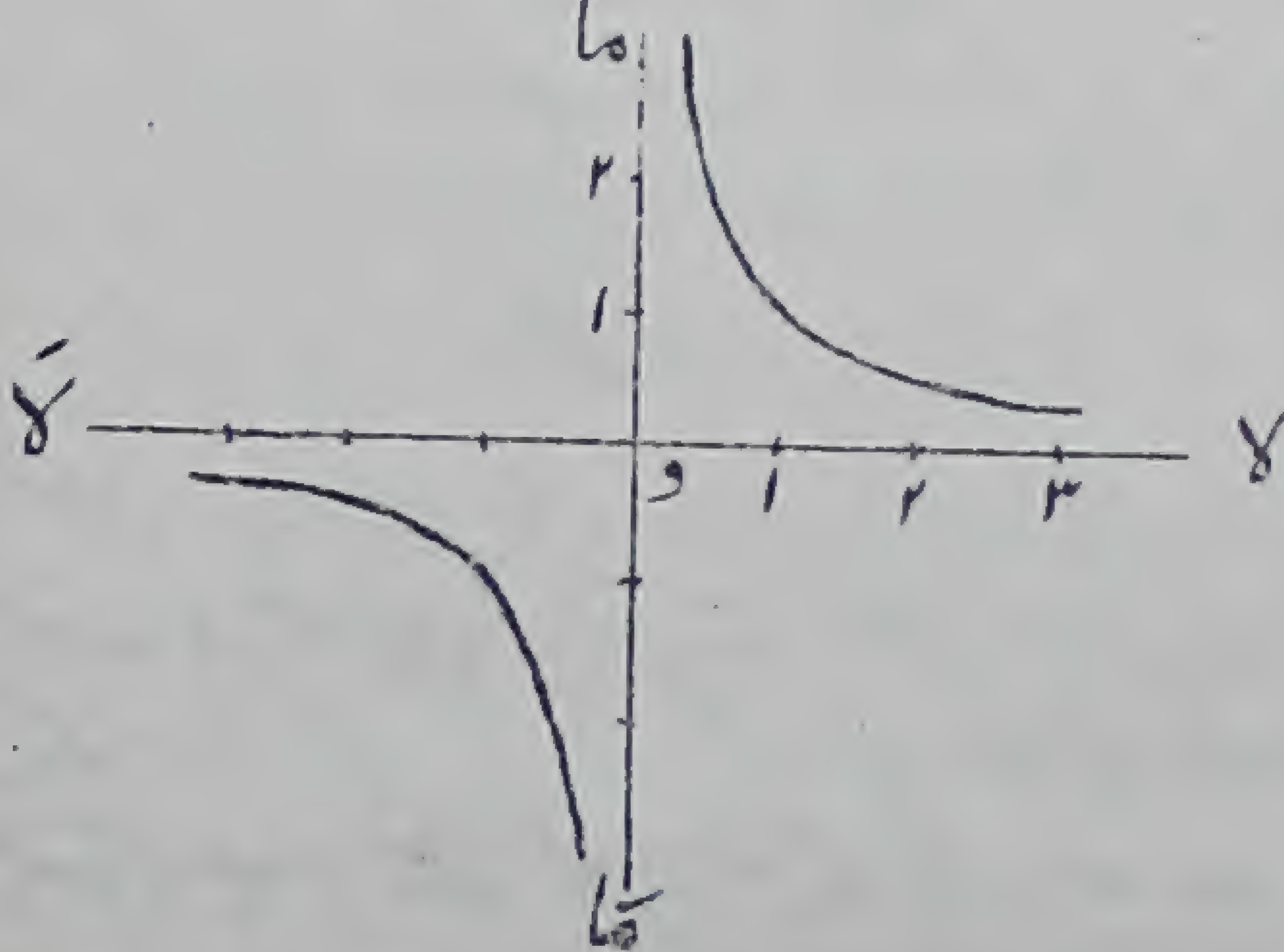
شکل ۱۱

موڑ کے نقطوں کے فصلے لا = −۱ اور لا = ۱ ہیں ۔ ف(لا) کی چند قیمتوں کو محسوب کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ترسیم کی شکل ایسی ہے جیسی اوپر کی شکل میں دکھائی گئی ہے ۔

۴۲ ۔ **متقارب** ۔ منطق کسری تفاعل کی سادہ سے سادہ مثال ۱/لا ہے، جب لا چھوٹا ہو اور مثبت ہو تو تفاعل ۱/لا بڑا اور مثبت ہوتا ہے اور جیسے لا مائل بہ صفر ہوتا ہے ۱/لا بہت بڑا ہو جاتا ہے یا اصطلاح میں ۱/لا مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے ۔ مثلاً اگر لا بالترتیب ۱، ۰٫۱، ۰٫۰۱، ...... قیمتیں اختیار کرے تو ان کے جواب میں تفاعل ۱/لا کی قیمتیں ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ...... ۔

ہو جاتی ہیں۔ اس لئے جوں جوں نقطہ لا دائیں طرف سے و کی طرف آتا جاتا ہے اور بالآخر و پر منطبق ہونے کو ہوتا ہے تو ترسیمی نقطہ اوپر ہٹتے ہٹتے محور لا سے بہت دور چلا جاتا ہے اور ساتھ ہی محور ما کے قریب آتا جاتا ہے، جب لا صفر ہو جاتا ہے یعنی جب نقطہ لا مبدا پر آجاتا ہے تو ترسیمی نقطہ گویا لاتناہی پر پہنچ جاتا ہے۔ اس کو ریاضی کی زبان میں یوں بیان کرتے ہیں کہ محور ما ترسیم کا متقارب ہے۔

اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ جب لا بہت بڑا ہو اور مثبت ہو تو $\frac{1}{لا}$ بہت چھوٹا اور مثبت ہوتا ہے، یعنی محور لا بھی ترسیم کا متقارب ہے۔



شکل ۱۲

ظاہر ہے کہ ترسیم بلحاظ مبدا کے متشاکل ہے اور محوروں کے دونوں سروں کے متقاربانہ طور پر نزدیک آتی جاتی ہے (شکل ۱۲)

تعریف۔ عام طور پر جب کسی منحنی کی کوئی شاخ لاتناہی تک وسعت پانے والی ہو تو یہ شاخ متقاربانہ طور پر ایک خطِ مستقیم کے

قریب آنے والی کہلاتی ہے یا یوں کہو کہ خطِ مستقیم شاخ مذکور کا متقارب ہوتا ہے جبکہ شاخ مذکور پر ترسیمی نقطہ کے لا تناہی کی طرف حرکت کرنے سے اس نقطہ کا فاصلہ خط مذکور سے مسلسل طور پر صفر کے قریب آتا جائے یعنی بالآخر اس کا جو فاصلہ خط مذکور سے ہے وہ کسی چھوٹے سے چھوٹے معینہ طول سے بھی کم ہو سکے اور اسکی مزید حرکت کی اثنا میں اس طول سے کم رہے۔ اگر کسی منطق کسری تفاعل کے نسب نما میں ایک جزو ضربی لا - ا ہو جبکہ اسے مفرد ترین رقوم میں بیان کرلیا جائے تو تفاعل مائل بہ لا تناہی ہوگا جبکہ لا مائل بہ ا ہو اور وہ خط جسکی مساوات لا = ا ہے متقارب ہوگا۔ نیز اگر لا کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے تفاعل ما کی قیمت ایک محدود مقدار ب کی طرف مائل ہو تو ما = ب ایک متقارب کی مساوات ہوگی۔ یہ متقارب محدودوں کے محوروں کے متوازی ہیں یا اُن پر منطبق ہوتے ہیں، لیکن ایسے متقارب بھی ہوسکتے ہیں جو کسی محور کے متوازی نہ ہوں مثلاً ذیل کی مثال میں

$$\text{ما} = \frac{\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} + ۱}{\text{لا}^{۲}}$$

جس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \text{لا} + ۱ + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}$$

اگر ہم ترسیم کے معیّن کو ما سے اور خطِ مستقیم ما = لا + ۱ کے متناظر معیّن کو $\text{ما}_{۱}$ سے تعبیر کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ما} = \text{ما}_{۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}$$

اس لئے لا خواہ مثبت ہو خواہ منفی، ما ہمیشہ $\text{ما}_{۱}$ سے بڑا ہوگا اور بنابریں تفاعل کی ترسیم ہمیشہ خطِ مستقیم کی ترسیم سے اوپر ہوگی۔

نیز جب لا تعداداً بہت بڑا ہو تو $\frac{1}{لا^2}$ نہایت چھوٹا ہو گا اور
ما اور ما کا فرق جبکہ نقطہ لا محور کا پر بہت دور دائیں طرف یا بہت دور بائیں طرف چلا جائے کسی دی ہوئی کسر سے چھوٹا ہو جائے گا، پس ترسیم خطِ مستقیم ما = لا + ۱ کے دونوں سروں کے متقاربانہ طور پر نزدیک آتی جاتی ہے۔

ما کا محور بھی متقارب ہے، جب لا چھوٹا ہو اور مثبت ہو یا چھوٹا ہو اور منفی ہو تو ما مثبت ہوتا ہے۔ اس لئے ترسیم محور ما کے منفی سرے کے قریب نہیں جاتی ہاں لیکن یہ دائیں اور بائیں دونوں جانب سے مثبت سرے کے بالتدریج متقاربا طور پر نزدیک آتی ہے۔

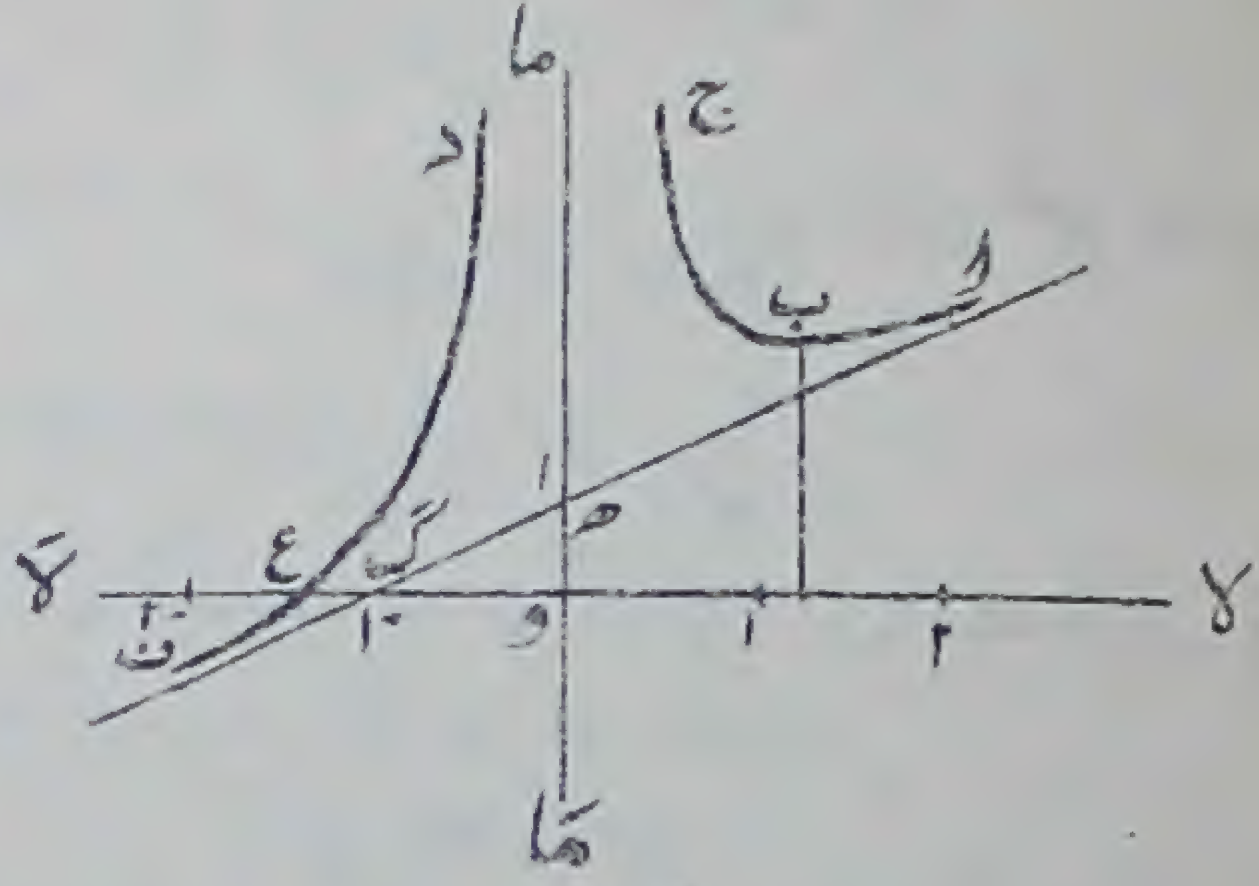
ترسیم محور کا کو ان نقطوں پر عبور کرے گی جن کے لئے شمار کنندہ لا³ + لا² + ۱ صفر ہو جائے۔ چند مختلف قیمتیں، لیکر آزمائش کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے کہ شمار کنندہ صرف ایک قیمت کے لئے صفر ہوتا ہے یعنی جبکہ لا = - ۷۴ء۱ تقریباً، جب لا جبریہ طور پر - ۷۴ء۱ سے کم ہو تو ما منفی ہوتا ہے، لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے معیّن مثبت ہوتا ہے۔

جب لا = ۱، ما = ۳

جب لا = ۲، ما = $\frac{1}{4}$۳

جہاں لا = ۳ء۱ تقریباً، وہاں ایک موڑ کا نقطہ ہے۔

یہ ترسیم شکل ذیل میں دکھائی گئی ہے۔ فصلوں کی اکائی معینوں کی اکائی سے دُگنی لی گئی ہے۔ اگر اکائیاں مساوی لی جائیں تو ترسیم کا حصہ ا ب ج محور کا کا سے بہت اوپر ہو گا اور اس حصہ کو نمایاں طور پر دکھانے کے لئے بہت بڑی شکل کھینچنے کی ضرورت ہو گی۔



شکل ۱۳

منحنی متقارب گ ھ کے بہت سرعت کے ساتھ قریب آتا ہے لیکن محور ما کے نزدیک مقابلتہً آہستہ آہستہ آتا ہے۔

کسی کسری تفاعل کی ترسیم بنانے کے لئے اکثر اوقات یہ زیادہ موجب سہولت ہوگا کہ تفاعل کو جزوی کسور میں تحلیل کر لیا جائے جیسا کہ ذیل میں کیا گیا ہے۔ مثلاً اگر

$$ما = \frac{لا^2 + 1}{(لا - 1)(لا - 2)}$$

تو ہم اسے یوں لکھ سکتے ہیں $ما = 1 - \frac{2}{لا - 1} + \frac{5}{لا - 2}$

سے ظاہر ہے کہ تفاعل کی ترسیم کے تین متقارب ہیں جنکی مساواتیں ہیں

$$ما = 1،\ لا = 1،\ لا = 2$$

اس صورت میں ترسیم افقی متقارب کو اس نقطہ پر عبور کرتی ہے جس کا فصلہ $\frac{1}{3}$ ہے کیونکہ جب کہ $ما = 1$ تو

$$\text{ا} = \frac{\text{لا}^{۲} + ۱}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۲)} \quad \text{یا} \quad \text{لا} = \frac{۱}{۳}$$

اسی طرح مساوات $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{۳} + ۱}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۲)}$ یوں لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ما} = \text{لا} + ۳ - \frac{۲}{\text{لا} - ۱} + \frac{۹}{\text{لا} - ۲}$$

اس میں بھی تین متقارب ہوں گے جن میں سے دو محور ما کے متوازی ہیں اور تیسرے متقارب کی مساوات

$$\text{ما} = \text{لا} + ۳$$

ہے اور یہ تیسرا متقارب ترسیم سے دوبارہ اُس نقطہ پر ملتا ہے جس کا فصلہ $\frac{۵}{۷}$ ہے۔

مشق ۴

تفاعیل ۱ تا ۶ کی ترسیمیں بناؤ۔

۱۔ $۳\text{لا}^{۲} - ۵\text{لا} - ۱$ ۲۔ $\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} + ۲$

۳۔ $\text{لا}^{۳} - \text{لا}$ ۴۔ $\text{لا}^{۳} - \text{لا} + ۲$

۵۔ $\frac{۲\text{لا} - ۳}{\text{لا} - ۱}$ ۶۔ $\frac{۲\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۱}{\text{لا} - ۱}$

۷۔ ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{۳} - \text{ا}\,\text{لا} - \text{ب} = ۰$ کی اصلیں تفاعیل $\text{لا}^{۳}$ اور $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}$ کی ترسیموں کے نقاط تقاطع کے فصلے ہیں۔

۸۔ معادلات ذیل کی اصلیں اعشاریہ کے دوسرے مقام تک معلوم کرو۔

(۱) $\text{لا}^{۳} - ۷\text{لا} + ۳ = ۰$ (۲) $\text{لا}^{۳} - ۷\text{لا} + ۹ = ۰$

اِن تفاعلوں کی ترسیمیں بناؤ۔

۹- اگر ف (لا) = لا^4 - ۴ لا^3 - ۴ لا^2 + ۱۲ لا + ۱ تو ثابت کرو کہ
مساوات ف (لا) = ۰ کی چار حقیقی اصلیں ہیں، اِن کو اعشاریہ کے
دوسرے مقام تک معلوم کرو۔
[ف (لا) کی قیمتیں معلوم کرو جبکہ لا = -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ اسطرح
معلوم ہو گا کہ معین ف (-۲) مثبت ہے اور ف (-۱) منفی ہے،
جس سے ظاہر ہے کہ ترسیم فصلوں کے محور کو نقاط -۲ اور -۱ کے
درمیان عبور کرتی ہے۔ باقی اصلوں کے لئے بھی یہی عمل کرو۔]

۱۰- ایک نقطہ ایک سطح مستوی میں حرکت کر رہا ہے اور ایک مقررہ
آن کے ت سکنڈ بعد اس کے محدد دو قائم محوروں کے لحاظ سے جو
اسی سطح میں واقع ہیں لا، ما فٹ ہیں۔ ذیل کی صورتوں کے لئے
نقطہ مذکورہ کا راستہ معلوم کرو۔

(۱) لا = ت + ۱، ما = ۲ ت (۲) لا = ا + ب ت، ما = ج + د ت
(۳) لا = ۲ ت، ما = ۸ ت^2 (۴) لا = ت، ما = ت^3

[کسی خاص آن میں ت کی جو قیمت ہو اس کے لئے لا اور ما
کی قیمتوں کو محسوب کرنے سے نقطہ کا مقام معلوم ہو سکتا ہے،
اس طرح بہت سے نقطے معلوم کرنے سے حسب معمول ترسیم بنائی
جاسکتی ہے یا ہم مساواتوں میں سے ت کو ساقط کر سکتے ہیں۔ مثلاً
(۱) میں ہم ت کو لا کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں یعنی ت = لا - ۱
لیکن ما ہمیشہ ۲ ت کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے ما اور لا میں
ہمیشہ یہ ربط ما = ۲ (لا - ۱) پایا جاتا ہے۔ پس ایسی صورت میں
راستہ ایک خطِ مستقیم ہے (۲) میں بھی راستہ خطِ مستقیم ہے، (۳)
اور (۴) میں راستوں کی مساواتیں ما = ۲ لا^2 اور ما = لا^3 ہیں،
کسی نقطہ کے راستہ کو دو مساواتوں کے ذریعہ تعبیر کرنے کا یہ طریقہ
علم ہندسہ اور علم حیل میں بہت مستعمل ہے]

۱۱- دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

(۱) $\text{ما} = \text{م لا} + \text{ج}$ (۲) $\text{ما} = \text{مَ لا} + \text{جَ}$

ہیں، ان کا درمیانی زاویہ طہ مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{۱} + \text{م مَ}}$$

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

[فرض کرو کہ پہلی مساوات محور لا ۔ لا سے زاویہ عہ اور دوسری زاویہ بہ بناتی ہے، نیز فرض کرو کہ عہ > بہ، تب طہ = عہ − بہ

$$\text{اور مس طہ} = \frac{\text{مس عہ} - \text{مس بہ}}{\text{۱} + \text{مس عہ مس بہ}} = \frac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{۱} + \text{م مَ}}$$

اگر $\frac{\text{م} - \text{مَ}}{\text{۱} + \text{م مَ}}$ کی عددی قیمت لی جائے تو ان خطوں کے درمیان کا حادہ زاویہ حاصل ہوگا خواہ عہ > بہ یا عہ < بہ

۱۲۔ جو خطوط مستقیم ان مساواتوں

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ} = 0$$

سے تعبیر ہوتے ہیں، ان کا درمیانی زاویہ مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}{\text{ا اَ} + \text{ب بَ}}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ مشق ۱۲ کے خط

(۱) متوازی ہونگے اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}$

اور (۲) عمود ہونگے اگر $\text{ا اَ} + \text{ب بَ} = 0$

باب سوم

ترسیمیں۔ جبریہ اور ماورائی تفاعل۔ مخروطی تراشیں

۲۵۔ جبریہ تفاعل۔ جب، ما کی تعیین اِس قسم کی مساوات

ا ما^{ن} + ب ما$^{ن-۱}$ + ... + ک ما + ل = ۰

سے ہو جس میں ما کے قوت نما مثبت صحیح عدد ہیں اور سر ا، ب ...... ک، ل منطق صحیح تفاعل لا کے ہیں تو ما کو لا کا جبریہ تفاعل کہتے ہیں۔ اِس سے ظاہر ہے کہ منطق تفاعل جبریہ تفاعلوں کی خاص صورتیں ہوتی ہیں۔

اوپر کی مساوات سے عام طور پر ما کئی قیمتوں والا تفاعل ہوگا اور اسکی ترسیمی تعبیر منطق تفاعل کی تعبیر کی نسبت زیادہ مشکل ہوگی، مگر چند مشہور صورتیں مقابلۃً آسان ہیں اور وہ حسب ذیل ہیں۔

نمونہ ۱۔ ما^{ن} ۔ لا = ۰ یا ما = لا$^{\frac{۱}{ن}}$

جب، ن جفت صحیح عدد ہو تو لا کو لازماً مثبت ہونا چاہئے، اِس صورت میں ما دو قیمتوں والا تفاعل ہوگا، لیکن جب، ن طاق صحیح عدد ہو تو لا کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے مثبت یا منفی، اِس صورت میں ما وحید القیمت ہوگا۔ لا$^{\frac{۱}{ن}}$ کی ترسیم لا^{ن} کی ترسیم سے بآسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

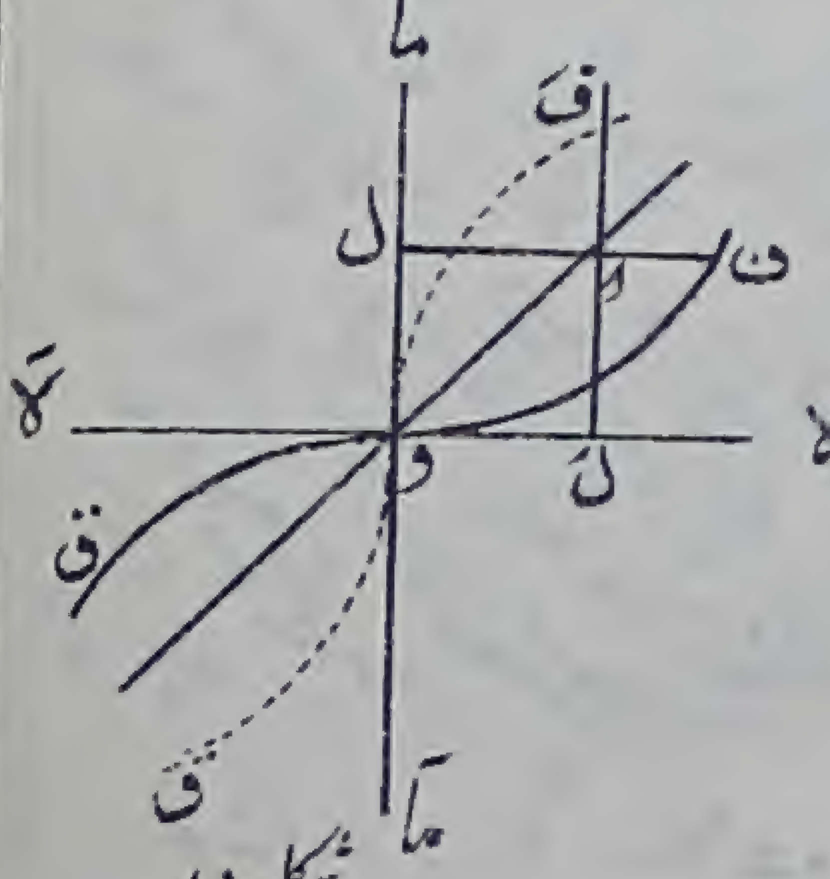
فرض کرو کہ ق و ف، لا^{ن} کی ترسیم ہے (ملاحظہ ہوں اشکال ۱۴ و ۱۵)

نوٹ۔ مبتدی کو شائد یہ دفعہ مشکل معلوم ہوگی، اسکو چاہئے کہ اِس دفعہ کے آخر پر جو سادہ مثالیں مندرج ہیں انکو حل کرے اِس طرح یہ بحث واضح اور معین ہو جائیگی، لیکن پہلی مرتبہ کے مطالعہ میں اسے اِس پر زیادہ وقت نہیں صرف کرنا چاہئے۔

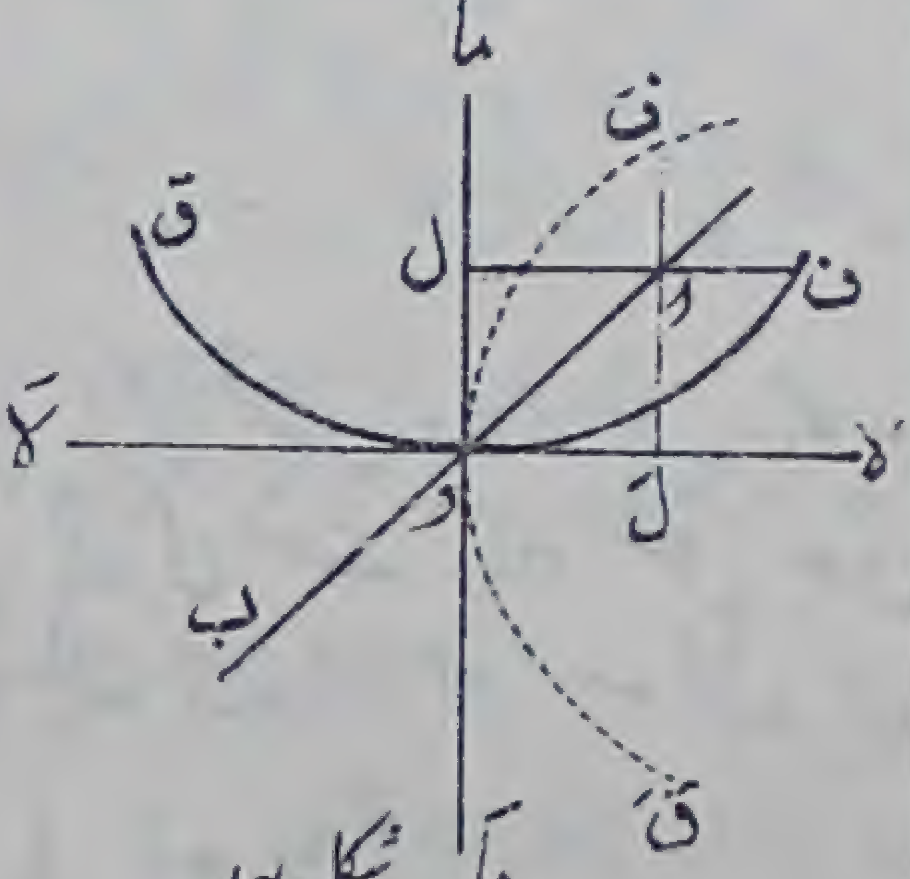
ف ل، ما ما پر عمود کھینچو، تب و ل = ل ف^۲ یا ل ف = و ل^{۱/۲}

پس اگر و ما کو فصلوں کا یعنی وجہ کا محور مانا جائے اور و لا کو معینوں کا یعنی تفاعل کا تو منحنی ق و ف تفاعل و ل^{۱/۲} کی ترسیم ہوگا۔

لیکن چونکہ ہم و لا کو فصلوں کا اور و ما کو معینوں کا محور رکھنا چاہتے ہیں، اسلئے ساری شکل کو اتنا گھمانا چاہئے کہ و ما افقی ہو جائے اور موجودہ شکل کے و لا کے محل پر منطبق ہو جائے اور و لا انتصابی ہو جائے اور اس شکل کے و ما کے محل پر چلا جائے۔



شکل ۱۵



شکل ۱۴

اس مقصد کو حاصل کرنے کا سہل طریقہ یہ ہے کہ زاویہ لا و ما کے منصف ب و ا کو محور مان کر پوری شکل کو اس کے گرد دو قائموں میں سے گھما دیا جائے، ایسا کرنے سے ل ا ف، لَ ا فَ کے محل میں آجائے گا اور ق و ف، قَ و فَ کے مقام پر چلا جائے گا۔ تب قَ و فَ، لا^{۱/۲} کی ترسیم ہوگا کیونکہ لَ فَ = و لَ^{۱/۲}

اور یہ اس لئے کہ لَ فَ = ل ف اور وَ لَ = و ل

ن کے جفت ہونے کی صورت میں جو ترسیم ہوگی وہ شکل ۱۴ میں دکھائی گئی ہے، اس صورت میں لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو قیمتیں ہوں گی، بخلاف اس کے جب ن طاق ہو تو لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی صرف ایک قیمت ہو گی، یہ ترسیم شکل ۱۵ میں دکھائی گئی ہے۔

کسی مقلوب تفاعل کی ترسیم کا بنانا۔ کسی دئے ہوئے تفاعل کے مقلوب تفاعل کی ترسیم اسی استحالہ سے حاصل ہوسکتی ہے، اگر ما = لاⁿ اور لا کو وجہ مانا جائے تو ق و ف، لاⁿ کی ترسیم ہوگا۔ اب ما کا مقلوب تفاعل لا ہے جہاں لا = ما^(۱/ن) اور اگر ما کو دلیل مانا جائے تو ق و ف، ما^(۱/ن) کی ترسیم ہوگا۔ لیکن مناسب یہ ہے کہ وجہ کو ہمیشہ ایسے خطوں سے تعبیر کیا جائے جو وَلا کے متوازی ناپے جائیں اور اس لئے مقلوب تفاعل کی صورت میں بھی وجہ کو ہمیشہ اُسی حرف لا سے تعبیر کیا جائے جس سے ابتدائی تفاعل کی وجہ تعبیر ہوتی ہے۔ پس جب مقلوب تفاعل بن جائے تو ہمیں لا کو ما سے اور ما کو لا سے بدل دینا چاہئے اور اس تبدیلی کے بعد مقلوب تفاعل کی ترسیم وہی ہوگی جو ابتدائی تفاعل کی ترسیم ہے جب کہ اس ترسیم کو زاویہ لا و ما کے منصف کے گرد دو قائموں میں سے گھما دیا جائے۔

اس ترقیم کی رو سے لاⁿ کی ترسیم ق و ف ہے اور مقلوب تفاعل جو حسب بالا ما^(۱/ن) ہے اب لا^(۱/ن) ہوگا اور اس کی ترسیم قَ وفَ

ہو گی۔
نیز جب تفاعل کی ترسیم بن جائے تو اس سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ متغیروں کی سعت کو کس طرح منتخب کیا جائے کہ مقلوب تفاعل ایک قیمت والا تفاعل ہو جائے۔ جب ن جفت ہو تو و فَ ، $لا^{\frac{1}{ن}}$ کی ترسیم ہوگا اور و قَ ، $- لا^{\frac{1}{ن}}$ کی۔ یعنی ن کے جفت ہونے کی صورت میں و فَ ، و قَ دو شاخیں ہیں دو قیمتوں والے تفاعل کی ترسیم کی جو $لا^{ن}$ کا مقلوب ہے۔

نمونہ ۲۔ $ما^{ن} - لا^{م} = ۰$. جہاں م اور ن غیر مساوی ہیں اور دونوں جفت نہیں ہیں۔
اگر م اور ن دونوں جفت ہوں تو مساوات دو مساواتوں $ما^{\frac{ن}{۲}} - لا^{\frac{م}{۲}} = ۰$ اور $ما^{\frac{ن}{۲}} + لا^{\frac{م}{۲}} = ۰$ کے معادل ہوگی اور اس لئے ترسیمیں دو ہوں گی جن میں سے ہر ایک ترسیم ذیل کے زمروں میں سے ایک نہ ایک کے تحت میں آئے گی۔

طالب علم کو چاہئے کہ $لا^{\frac{۵}{۲}}$ کی قسم کے تفاعل کی ترسیم کے متعلق جو کچھ دفعہ ۲۳ میں درج کیا گیا ہے اُسے دوبارہ غور سے دیکھ لے۔ اس سے عام مساوات کے متعلق مختلف زمروں پر بحث کرنے میں اُسے مدد ملے گی۔

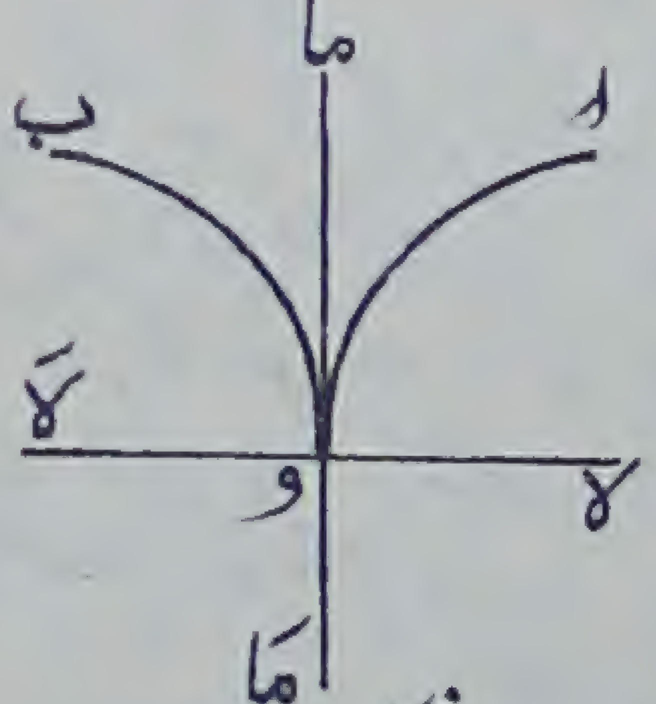
(۱) م > ن ، $ما = لا^{\frac{م}{ن}}$ جہاں $\frac{م}{ن}$ کوئی غیر واجب کسر ہے

(ا) م ، ن دونوں طاق۔ ترسیم کی شکل ف و فَ ہوگی (ملاحظہ ہو شکل ۱۵)، و نقطۂ عطف ہے اور کا و لا ، و پر کا مماس ہے

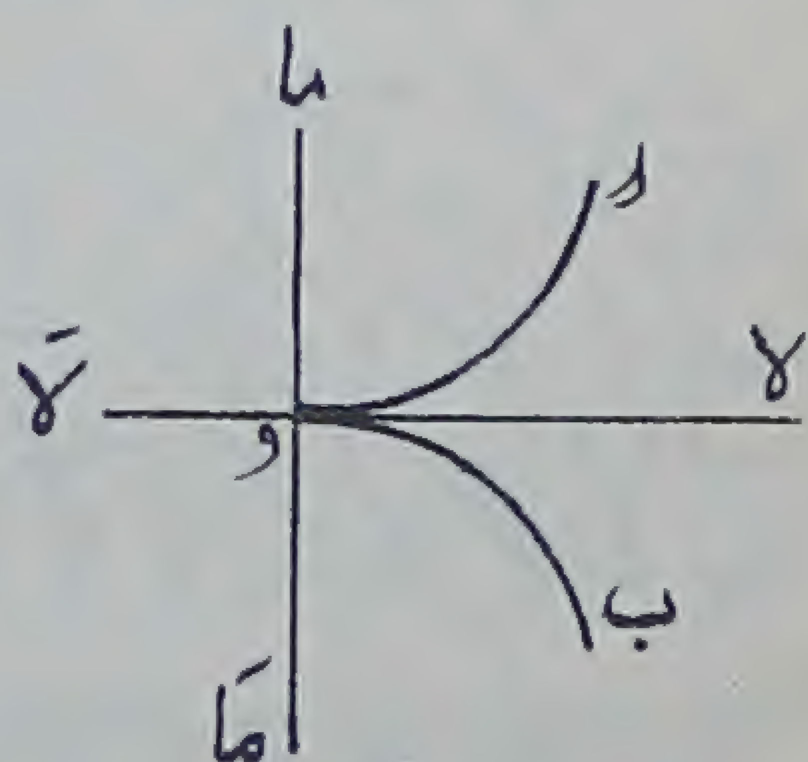
(ا۲) م جفت اور ن طاق ۔ ترسیم کی شکل ق و ف شکل ۱۴ کی طرح ہوگی، و ما تشاکل کا محور ہے اور لاَ و لا، و پر کا مماس ہے ۔

(ا۳) م طاق اور ن جفت ۔ جب لا منفی ہو تو ما خیالی ہوگا نیز و لا تشاکل کا محور ہوگا اور دونوں شاخیں (ایک دوسرے کو اور) محور لا کو و پر مس کریں گی ۔

تعریف ۔ منحنی پر و کی قسم کا کوئی نقطہ جس پر دو شاخوں و ا اور و ب کا ایک ہی مماس ہو اور شاخیں و کے آگے نہ گزریں تو ایسے نقطہ کو قرن کہتے ہیں ۔ اگر کوئی نقطہ مقام ا سے منحنی پر حرکت کرکے و پر پہنچے تو و سے شاخ و ب پر جانے کے لئے اسے واپس الٹی سمت میں آنا پڑے گا ۔



شکل ۱۷



شکل ۱۶

(ب) م > ن، ما = لا^(م/ن) جہاں م/ن کوئی کسر واجب ہے ۔

(ب۱) م اور ن دونوں طاق ۔ ترسیم کی شکل قَ و فَ ہوگی (شکل ۱۵) و عطف کا نقطہ ہوگا اور مَا و ما، و پر کا مماس ہوگا ۔

(ب۲) م طاق اور ن جفت، جب لا منفی ہو تو ما خیالی ہوتا ہے

و لا تشاکل کا محور ہے اور ما و ما نقطہ و پر کا مماس ہے، ترسیم کی شکل ق و ق ہے (دیکھو شکل ۱۴)

(ب$_{۲}$) م جفت اور ن طاق، و ما تشاکل کا محور ہے اور و پر کا مماس ہے، و قرن ہے (شکل ۱۷)

مثلاً اگر م = ۲ اور ن = ۵ تو چونکہ $\frac{۲}{۵}$، $\frac{۲}{۴}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۲}{۶}$ یعنی $\frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے، اس لئے لا کی مثبت قیمتوں کے لئے لا$^{\frac{۲}{۵}}$ کی ترسیم لا$^{\frac{۱}{۲}}$ اور لا$^{\frac{۱}{۳}}$ کی ترسیموں کے درمیان واقع ہوگی اور موخرالذکر ترسیمیں و ق، کی شکل کی ہیں (شکل ۱۵)، ترسیم میں شاخ و ب بھی موجود ہوگی کیونکہ و ما تشاکل کا محور ہے۔

جب مساوات اِس شکل ما^{ن} + لا^{م} = ۰ کی ہو تو اس صورت میں بھی طالب علم کو ترسیمیں بنانے میں کوئی دقت نہ ہوگی کیونکہ یہ ترسیمیں ما^{ن} − لا^{م} = ۰ کی ترسیموں سے موخرالذکر کو حوالہ کے ایک محور کے گرد گھمانے سے حاصل ہوسکتی ہیں۔ مثلاً (ا$_{۱}$) اور (ب$_{۱}$) کے مماثل جو ترسیمیں ہیں وہ کا لا کے گرد گھمانے سے حاصل ہوسکتی ہیں۔

زیادہ عام صورت ما^{ن} − ا لا^{م} = ۰ کی ترسیمیں ما^{ن} − لا^{م} = ۰ کی ترسیموں کے معینوں کو نسبت ا$^{\frac{۱}{ن}}$: ۱ میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوسکتی ہیں۔

مشقیں

۱ — نمونہ ا کی ذیل کی صورتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) ما^{۲} = لا (۲) ما^{۳} = لا، (۳) ما^{۲} = − لا، (۴) ما^{۳} = − لا

۲ — نمونہ ۲ (ا) کی ذیل کی صورتوں کی ترسیمیں بناؤ۔

(۱) ما^{۲} = لا^{۵} (۲) ما^{۳} = لا^{۲} (۳) ما^{۲} = لا^{۳}

(۴) $ما^{۳} = -لا^{۵}$ (۵) $ما^{۳} = -لا^{۲}$ (۶) $ما^{۲} = -لا^{۳}$

۳۔ نمونہ ۲ (ب) کی ذیل کی صورتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) $ما^{۵} = لا^{۲}$ (۲) $ما^{۳} = لا^{۲}$ (۳) $ما^{۴} = لا^{۳}$

(۴) $ما^{۵} = -لا^{۲}$ (۵) $ما^{۳} = -لا^{۲}$ (۶) $ما^{۴} = -لا^{۳}$

۴۔ ذیل کی مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) $ما^{۲} = ۹\,لا^{۳}$ (۲) $ما^{۲} = -۹\,لا^{۳}$ (۳) $ما^{۳} = ۲۷\,لا^{۲}$

۵۔ ذیل کے تفاعلوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) $\frac{۱}{لا^{\frac{۳}{۲}}}$ (۲) $\frac{۱}{لا^{\frac{۲}{۳}}}$ (۳) $\frac{۱}{لا^{\frac{۵}{۳}}}$

۲۶۔ **مخروطی تراشیں**۔ اُن طلبہ کے لئے جو مخروطی تراشوں سے چنداں واقف نہ ہوں ہم اس دفعہ میں مخروطی تراشوں کی مساواتیں درج کرتے ہیں اور اُن اصطلاحی الفاظ کی تعریف کرتے ہیں جو عام طور پر ان کی بحث میں استعمال ہوتے ہیں۔

تعریف۔ ایک سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ ہے اور ایک ثابت خط مستقیم، اس سطح میں ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ ثابت نقطہ سے اُس عمودی فاصلہ کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جو متحرک نقطہ اور ثابت خط کے درمیان ہو۔ متحرک نقطہ کے طریق کو مخروطی تراش کہتے ہیں۔

ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں، مستقل نسبت کو خروج المرکز اور ثابت خطِ مستقیم کو مرتب سے موسوم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ س (شکل ۱۸) ماسکہ ہے ک ل مرتب اور س ک، ک ل

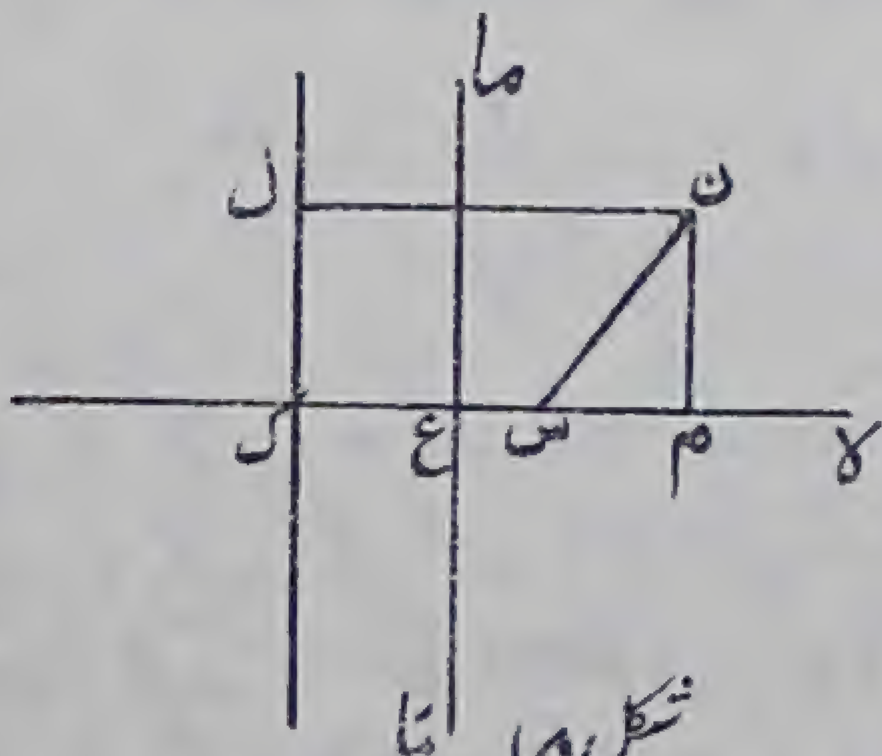
پر عمود ہے۔

نیز فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے، ک س پر ع ایک ایسا نقطہ لو کہ ع س = ز × ک ع، تب نقطہ ع مخروطی پر واقع ہوگا۔

خط ک ع س اور ع میں سے گزرنے والے اس خط کو جو ک ع س پر عمود ہو حوالہ کے محور مانو۔

فرض کرو کہ ن تراش پر کا کوئی نقطہ (لا، ما) ہے، ن سے ن م، ک س پر عمود کھینچو، تب لا = ع م اور ما = م ن

اگر ک ع = ط تو ع س = ز ط



شکل ۱۸

اب س م = ع م - ع س = لا - ز ط

ل ن = ک م = ط + لا

لیکن س ن = ز × ل ن مخروطی کی تعریف کی رو سے

اس لئے س ن^2 = ز^2 × ل ن^2

یا س م^2 + م ن^2 = ز^2 × ل ن^2

پس س م، م ن، ل ن کی قیمتیں مندرج کرنے سے

(لا - ز ط)^2 + ما^2 = ز^2 (لا + ط)^2

جو اس شکل میں تحویل ہو جاتی ہے

$$(۱ - ز^۲) لا^۲ - ۲ ز (۱ + ز) ط لا + ما^۲ = ...(۱)$$

ہر ایک نقطہ جس کے محدد مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں مخروطی تراش پر واقع ہے۔ مستقلوں ز اور ط کی مختلف قیمتوں کے لئے مختلف مخروطیاں حاصل ہونگی۔ ع س صریحاً تشاکل کا محور ہے۔
اگر ع ک کی سمت کو فصلوں کے محور کی مثبت سمت مانا جائے تو مساوات (۱) میں رقم ۲ ز (۱ + ز) ط لا کی علامت مثبت ہو گی کیونکہ محور کی سمت کی تبدیلی لا کی بجائے - لا لکھ دینے کے مرادف ہے۔

مخروطیوں کی خاص شکلیں۔ (۱) اگر ز = ۱ تو مخروطی کو قطع مکافی کہتے ہیں۔ اس صورت میں مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ما^۲ = ۴ ط. لا ....(۲)$$

ع کو راس اور ع لا کو مکافی کا محور کہتے ہیں۔
جب کہ ز = ۱ تو ع س = ط اور اگر س خ معین ہو س پر تو مساوات بالا سے ظاہر ہے کہ س خ = ۲ ط = ک س
س خ کو مکافی کا معدل یا نیم وتر خاص کہتے ہیں، ہر ایک مخروطی تراش میں ماسکہ میں سے گذرنے والے دوہرے معین کو وتر خاص کہتے ہیں۔ بعض اوقات ۴ ط مکافی کا متبدل کہلاتا ہے۔

بہ آسانی معلوم ہوگا کہ منحنی کی شکل ایسی ہے جیسی کہ شکل ۱۹ میں دکھائی گئی ہے منحنی دائیں طرف لاتناہی تک پھیلتا ہے۔ لا^۲ کی ترسیم ایک مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے (دیکھو دفعہ ۱۶) اس کا وتر خاص ایک ہے اور اسکا ماسکہ $(۰, \frac{۱}{۴})$، اور اس کا مرتبہ فصلوں کے محور کے متوازی نقطہ $(۰, -\frac{۱}{۴})$ میں سے گذرنیوالا خط ہے۔

۲۔ اگر ز ایک سے کم ہو تو مخروطی کو قطع ناقص کہتے ہیں۔ اس صورت میں مساوات (۱) کی یہ شکل ہو جاتی ہے

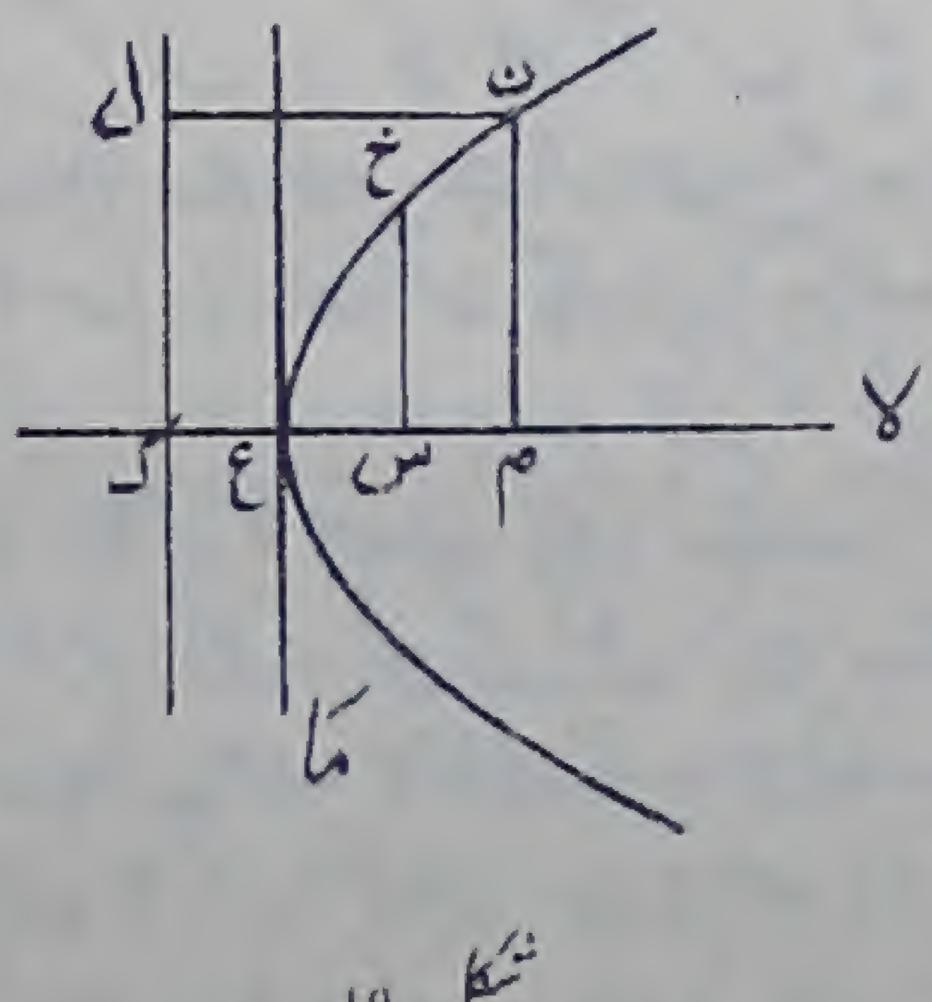
$$\text{لا}^2 - \frac{\text{۲ زط}}{\text{۱} - \text{ز}}\,\text{لا} + \frac{\text{ما}^2}{\text{۱} - \text{ز}^2} = \text{۰}$$

یا $\frac{\text{زط}}{\text{۱} - \text{ز}}$ کی بجائے ا اور ا² (۱ ـ ز²) کی بجائے ب² رکھنے سے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{۲ لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$

۳۔ اگر خروج ز ایک سے بڑا ہو تو مخروطی کو قطع زائد کہتے ہیں، اس صورت میں اگر $\frac{\text{زط}}{\text{ز} - \text{۱}}$ کی بجائے ا اور ا² (ز² ـ ۱) کی بجائے ب² لکھا جائے تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{۲ لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$



شکل ۱۹

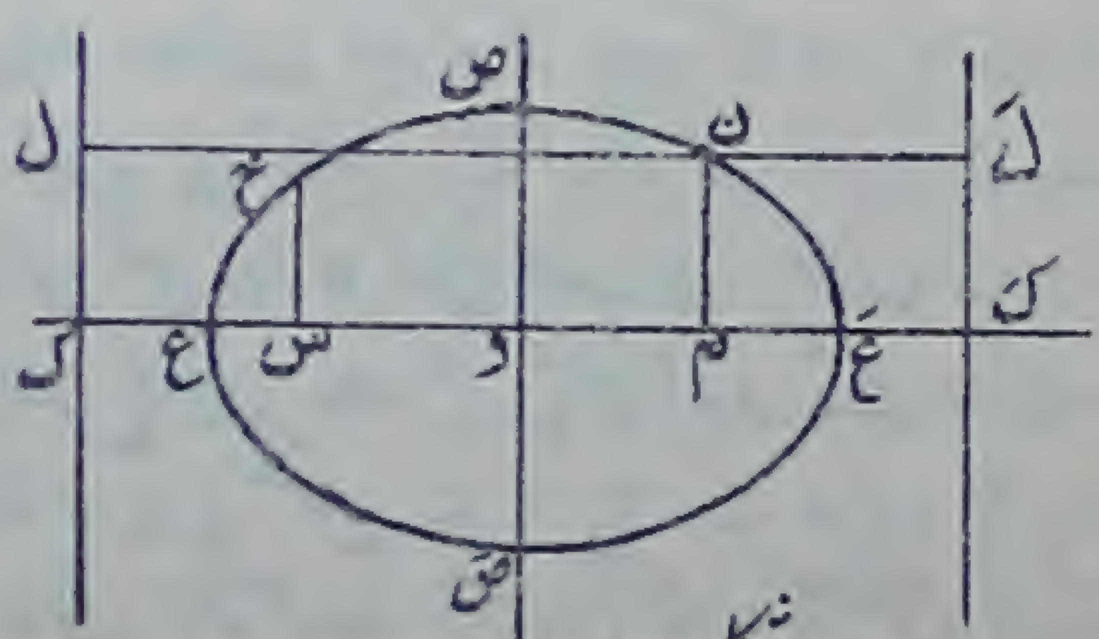
قطع ناقص اور زائد کی مساواتیں زیادہ سادہ شکل میں اسطرح حاصل

ہوسکتی نہیں، ناقص کی مساوات (۳) میں ما = ۰ رکھو، تب لا = ۰ یا ۲ ا،
پس ناقص محور لا کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے، ایک نقطہ ع جہاں
لا = ۰ اور دوسرا نقطہ عَ، جو ع کے دائیں جانب فاصلہ ۲ ا پر
واقع ہے۔ ع عَ کو محور اعظم کہتے ہیں اور ع، عَ ناقص کے راس کہلاتے ہیں
اسی طرح قطع زائد کی مساوات (۴) سے یہ معلوم ہوسکتا ہے کہ قطع زائد محور لا
کو ع پر کاٹتا ہے اور نیز ایک اور نقطہ عَ پر جو ع کے بائیں جانب
فاصلہ ۲ ا پر واقع ہے۔ ع عَ کو قاطع محور کہتے
ہیں اور نقاط ع، عَ کو قطع زائد کے راس کہتے ہیں۔
ناقص کی شکل دریافت کرنے کے لئے ہم محددوں کے مبدا کو و
پر جو ع عَ کا وسطی نقطہ ہے منتقل کرتے ہیں (دیکھو شکل ۲۰)
حصوں کی علامات کو ملحوظ رکھنے سے ع م = ع و + و م
ہر صورت میں، فرض کرو کہ و م = لاَ، ع م = لا، تب چونکہ
ع و = ا

∴ لا = ا + لاَ

قطع ناقص کی مساواتِ بالا میں لا کی بجائے ا + لاَ رکھنے اور
اختصار کرنے سے

$$\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$$



شکل ۲۰

اسی طرح قطع زائد کی مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

اگر ہم یاد رکھیں کہ اب فصلے و سے ناپے جا رہے ہیں اور ع سے نہیں ناپے جاتے تو ہم ذ بہ کو ترک کر سکتے ہیں۔ اسطرح ناقص اور زائد کی مساواتیں بالترتیب ہو جائیں گی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \ldots\ldots(5)$$

اِن کو معیاری شکلیں مانا جاتا ہے۔

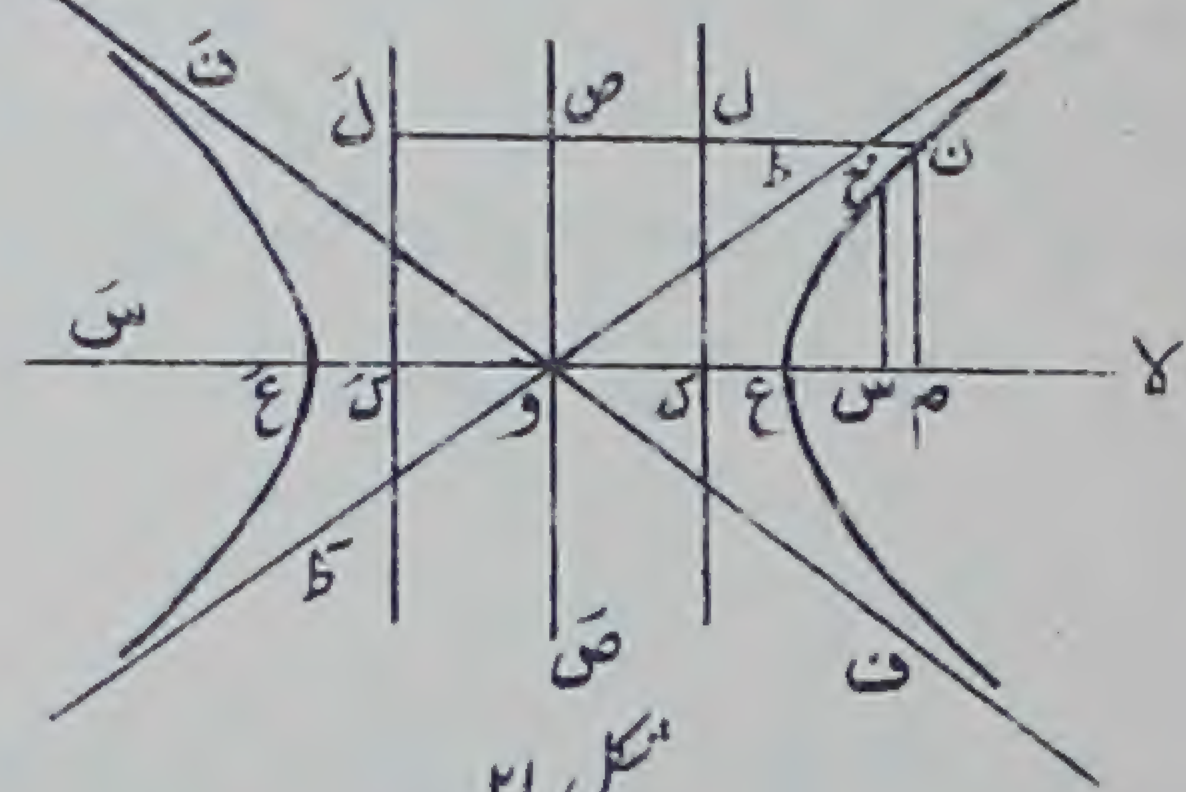
اِن مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں منحنی دونوں محوروں کے گرد متشاکل ہیں، مبدأ و تشاکل کا مرکز ہے، و کو مخروطی کا مرکز کہتے ہیں۔ ناقص اور زائد مرکز والی تراشیں ہیں، قطع مکافی کا مرکز نہیں ہوتا۔

معیلنوں کا محورِ ناقص (شکل ۲۰) سے دو نقاط ص، صَ پر ملتا ہے، ص صَ کو محور اصغر کہتے ہیں۔

مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو دیکھنے سے بآسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ لا کبھی ا سے اور ما کبھی ب سے زیادہ نہیں ہو سکتا، پس ناقص ایک بند منحنی ہے۔ دائرہ ناقص کی ایک خاص شکل ہے جس میں ب = ا اور ز = ۰،

معیلنوں کا محور زائد سے نہیں ملتا کیونکہ جب لا = ۰ تو $\text{ما}^2 = -\text{ب}^2$ یعنی ما خیالی ہے، نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر لا تعداداً ا سے کم ہو تو ما خیالی ہوتا ہے یعنی قطع زائد کا کوئی حصہ اُن خطوں کے درمیان واقع نہیں ہوتا جو ع اور عَ میں سے ع عَ پر عمود کھینچے جائیں۔

منحنی دو شاخوں پر مشتمل ہے جو غ کے دائیں جانب اور عَ کے بائیں جانب دونوں بالترتیب لاتناہی تک پھیلتی ہیں۔



شکل ۲۱

طالب علم کے لئے یہ عمدہ مشق ہوگی اگر وہ ثابت کرے کہ خطوط ط طَ اور ف فَ جن کی مساواتیں ما = ب لا / ا اور ما = - ب لا / ا ہیں منحنی کے متقارب ہیں (شکل ۲۱)

اگر ب = ا تو زائد کو قائم زائد کہتے ہیں، کیونکہ اس صورت میں متقارب علی القوائم ہیں۔

چونکہ مرکز دار تراشیں و میں سے گزرنے والے معینوں کے محور کے گرد متشاکل ہیں، اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مرکز و کے لحاظ سے ماسکہ س اور مرتب ک ل کے جواب میں مخروطی کا ایک اور ماسکہ سَ اور ایک اور مرتب کَ لَ ہوگا۔ پس جس طرح منحنی ماسکہ س اور مرتب ک ل کے لحاظ سے مرتسم کیا گیا تھا اسی طرح ماسکہ سَ اور مرتب کَ لَ کے لحاظ سے بھی مرتسم کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ خروج المرکز ذ وہی رہے۔

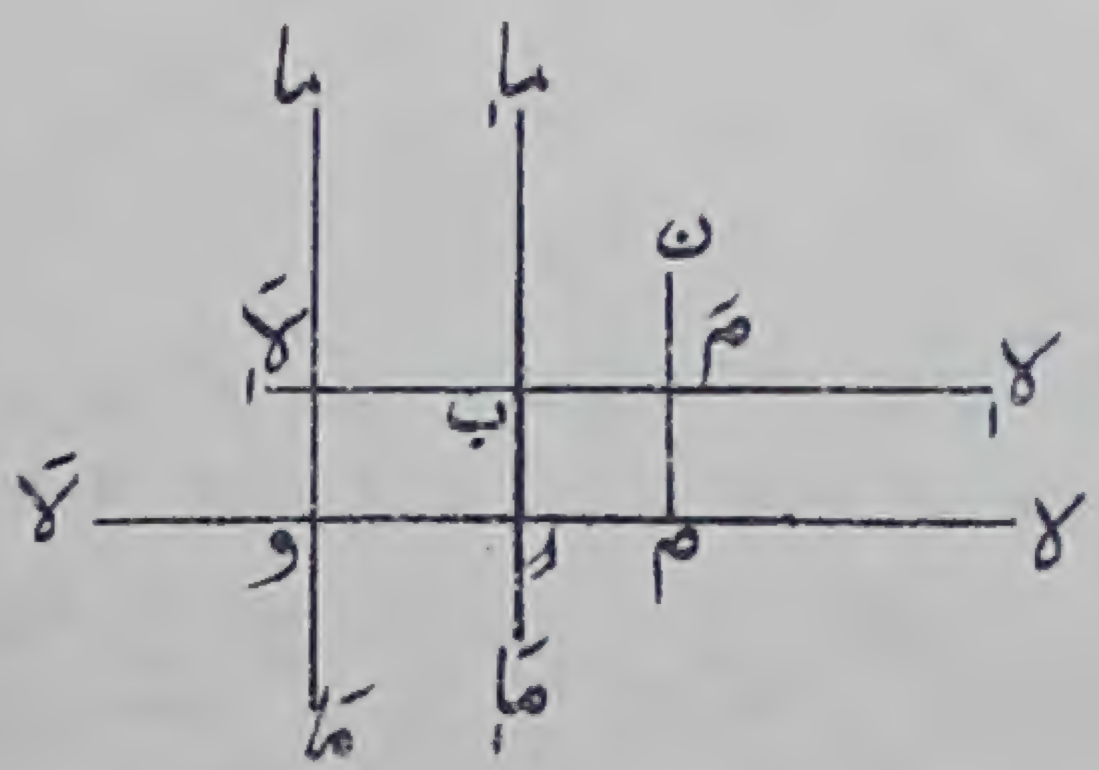
مخروطی تراشوں کے چند مشہور خواص مشقوں ۵ اور ۶ میں ملینگے۔

۲۷۔ مبدأ اور محوروں کی تبدیلی۔ مبدأ اور محوروں کو تبدیل

کرنے سے ہم اکثر اوقات منحنی کی مساوات کو زیادہ سادہ شکل میں لا سکتے ہیں جس سے منحنی کا بنانا مقابلتہً آسان ہو جاتا ہے۔

۱۔ نئے محور پرانے محوروں کے متوازی۔ شکل ۲۲ میں فرض کرو کہ ب نیا مبدأ ہے اور لاَ و لا اور ماَ و ما کے متوازی بالترتیب

لاَ1 ب لا1 اور ماَ1 ب ما1 نئے محور ہیں۔



شکل ۲۲

فرض کرو کہ ب کے محدد (ا1، ب1) ہیں اور کسی اور نقطہ ن کے محدد بلحاظ پرانے محوروں لاَ و لا اور ماَ و ما کے (لا، ما) ہیں۔ فرض کرو کہ نقطہ ن کے محدد بلحاظ نئے محوروں

لاَ1 ب لا1 اور ماَ1 ب ما1 کے (لاَ، ماَ) ہیں۔

تب و ا = ا1، ا ب = ب1، و م = لا، م ن = ما، ب مَ = لاَ، مَ ن = ماَ

اور و م = و ا + ا م = و ا + ب مَ

م ن = م مَ + مَ ن = ا ب + مَ ن

اس لئے لا = ا1 + لاَ، ما = ب1 + ماَ .... (۱)

اور برعکس اسکے لاَ = لا − ا1، ماَ = ما − ب1 .... (آ)

جب لا اور ما کی بجائے بالترتیب $ا_1$ + لاَ اور $ب_1$ + ماَ لکھ دیا جائے تو زیروں کو حذف کیا جاسکتا ہے، لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ زیروں کو گرانے کے بعد مبدأ ب ہے اور لا سے مراد و م نہیں بلکہ ب مَ ہے، نیز ما سے مراد م ن نہیں بلکہ مَ ن ہے

مثال - مساوات $ما^2 - ۴ لا - ۲ ما - ۱ = ۰$ کو اس طرح

$$(ما - ۱)^2 = ۴ (لا + \frac{۱}{۲})$$

کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے -

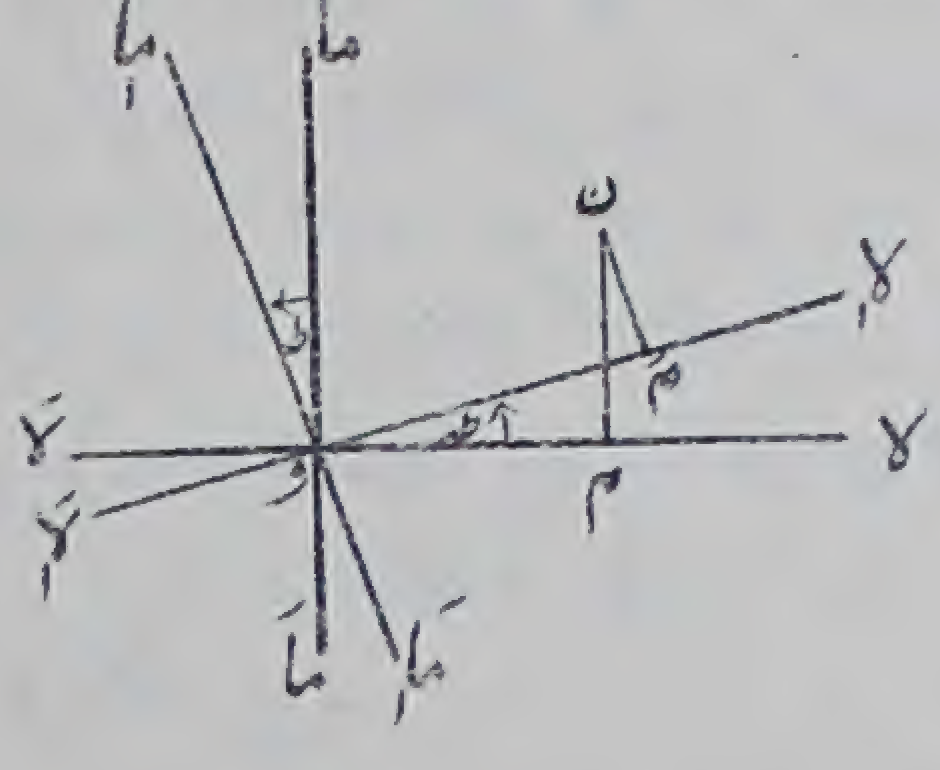
لا + $\frac{۱}{۲}$ کی بجائے لاَ یعنی لا = - $\frac{۱}{۲}$ + لاَ اور ما - ۱ کی بجائے ماَ یعنی ما = ۱ + ماَ لکھو، بالفاظ دیگر اس سے مراد ہے کہ مبدأ کو نقطہ (- $\frac{۱}{۲}$، ۱) پر منتقل کرو -

اس طرح مساوات ہو جاتی ہے $ماَ^2 = ۴ لاَ$

یہ مساوات اور اس لئے ابتدائی مساوات مکافی کو تعبیہ کرتی ہے جس کا رأس نئے مبدأ پر ہے اور جس کا محور فصلوں کا نیا محور ہے نیز وتر خاص ۴ ہے اور نئے محوروں کے لحاظ سے نقطہ (۱، ۰) اسکا ہے، اس لئے پرانے محوروں کے لحاظ سے ماسکہ نقطہ ($\frac{۱}{۲}$، ۱) ہوگا کیونکہ پرانے محوروں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدد، نئے محددوں میں نئے مبدأ کے محدد جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں -

۲ - محوروں کی تبدیلی جبکہ مبدأ نہ بدلا جائے لیکن نئے محور پرانے محوروں کو کسی مثبت یا منفی زاویہ طہ میں سے گھمانے سے حاصل ہوں -

شکل (۲۲، ا) میں فرض کرو کہ نقطہ ن کے محدد پرانے محوروں وَلا اور وَما کے لحاظ سے (لا، ما) اور نئے محوروں وَلاَ اور وَماَ کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) ہیں -



شکل ۲۲(ا)

یعنی لا = وم، ما = م ن، لاَ = ومَ، ماَ = مَ ن

∠ لا و لاَ = طہ = ∠ ما و ماَ

علم مثلث کے ابتدائی اصولوں سے

وم = ومَ جم طہ - مَ ن جب طہ، م ن = ومَ جب طہ + مَ ن جم طہ

یعنی لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ، ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ ... (۲)

برعکس اس کے لاَ اور ماَ کو لا اور ما کی رقوم میں حل کرنے سے

لاَ = لا جم طہ + ما جب طہ، ماَ = -لا جب طہ + ما جم طہ ... (۲اَ)

بعض صورتوں میں طہ کی ایسی قیمت منتخب کرلینا ممکن ہوتا ہے کہ نئی مساوات پرانی مساوات کی نسبت آسان ہو یا نئی مساوات ایسی مساوات نکل آئے جس کی ترسیم معلوم ہو۔

مثال - محوروں کو ۴۵° کے زاویہ میں گھمانے سے مساوات لا ما = ج² ہو جاتی ہے

$$\frac{لاَ - ماَ}{\sqrt{۲}} \times \frac{لاَ + ماَ}{\sqrt{۲}} = ج^۲ \quad یا \quad لاَ^۲ - ماَ^۲ = ۲ ج^۲$$

کیونکہ (۲) سے لا = ۱/√۲ لاَ - ۱/√۲ ماَ اور ما = ۱/√۲ لاَ + ۱/√۲ ماَ
نئی شکل سے ظاہر ہے کہ منحنی قائم زائد ہے اور اس کا نیم متقاطع محور
جس کو دفعہ ۲۶ میں ا سے تعبیر کیا گیا تھا √۲ ج ہے، اس لئے
معلوم ہوا کہ ج²/لا کی ترسیم قائم زائد ہے جہاں اس کے
متقارب محددوں کے محور ہیں۔

۳۔ مبدأ کو نقطہ (ا، ب) پر منتقل کیا جائے اور محوروں کو زاویۂ
طہ میں سے گھمایا جائے۔ گذشتہ دونوں صورتوں کو ملانے سے
ہمیں زیادہ عام تبدیلی حسب ذیل حاصل ہوتی ہے۔

لا = ا + لاَ جم طہ - ماَ جب طہ، ما = ب + لاَ جب طہ + ماَ جم طہ
.... (۳)

لاَ = (لا - ا) جم طہ + (ما - ب) جب طہ، ماَ = -(لا - ا) جب طہ + (ما - ب) جم طہ
.... (۳َ)

مشق ۵

تاوقتیکہ اس کے خلاف نہ بیان کیا گیا ہو اس مجموعۂ سوالات
میں مخروطی تراشوں کی مساواتیں ان کی معیاری شکلوں میں فرض
کی جائینگی، ملاحظہ ہو دفعہ ۲۶۔

۱۔ مرکز دار مخروطی تراشوں میں ثابت کرو کہ
دس = ز × وع، وع = ز × وک
ناقص کیلئے س ع : ع ک = ز = عَ س : عَ ک
اس لئے ز = عَ س - س ع : عَ ک - ع ک = سَ س : ا عَ ع = دس : وع
ز = عَ س + س ع : عَ ک + ع ک = عَ ع : کَ ک = وع : وک

زائد کے لئے عَ س - ع س : عَ ک - ک ع = و ع : و ک

عَ س + ع س : عَ ک + ک ع = و س : و ع

۲- شکل ۲۰ میں س نقطہ (- و ز، ۰) ہے اور سَ نقطہ (و ز، ۰) ہے -

شکل ۲۱ میں س نقطہ (اُ ز، ۰) ہے اور سَ نقطہ (- اُ ز، ۰) ہے -

شکل ۱۹ میں س نقطہ (ط، ۰) ہے -

۳- ثابت کرو کہ مرکزہ دار تراش کا وتر خاص یا متبدل ۲ب²/ا ہوتا ہے

۴- ع عَ (شکل ۲۰) کو قطر مان کر اس پر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، اگر م ن ممدودہ دائرہ سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ

م ن : م ق = ب : ا = مستقل

کیونکہ م ق² = و ع² - و م² = ا² - لا²، م ن² = (ب²/ا²) (ا² - لا²)

اس دائرہ کو ناقص کا امدادی دائرہ کہتے ہیں - اس مسئلہ سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر کسی دائرہ کے معین م ق کو داخلاً ن پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ نسبت م ن : م ق = مستقل، تو ن کا طریق قطع ناقص ہوتا ہے جس کا محور اعظم دائرہ کا قطر ہوتا ہے

طالب علم ثابت کرے کہ اگر ن، م ق ممدودہ پر واقع ہو تو طریق ایک قطع ناقص ہوگا جس کا محور اصغر دائرہ کا قطر ہوگا۔

۵- ثابت کرو کہ نقطہ (ا جم طہ، ب جب طہ) ہمیشہ قطع ناقص پر واقع ہوتا ہے خواہ طہ کی قیمت کچھ ہی ہو -

ناقص کی مساوات پوری ہوتی ہے جبکہ لا = ا جم طہ اور ما = ب جب طہ

جب طہ ۰° سے ۳۶۰° تک بدلتا ہے تو نقطہ ناقص کے گرد پورا چکر لگاتا ہے۔

مشق ۴ کی ترقیم کے مطابق اگر ن نقطہ (ا جم طہ، ب جب طہ) ہو تو طہ زاویہ ع و ق ہوگا، اس کو ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ نقطہ (ا ت^۲، ۲ ا ت) جہاں ا کوئی مستقل ہے ت کی ہر ایک قیمت کے لئے مکافی پر واقع ہوتا ہے۔

۷۔ شکل ۲۰ میں اگر و م = لا تو ثابت کرو کہ س ن = ا + زلا، سَ ن = ا - زلا اور س ن + سَ ن = ۲ ا

کیونکہ س ن = ز × ل ن = ز × ک و + ز × و م = ا + زلا

سَ ن = ز × ن لَ = ز × و کَ - ز × و م = ا - زلا

س ن اور سَ ن کو ن کے ماسکی فاصلے کہتے ہیں، لہذا قطع ناقص میں ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے اور یہ مستقل محور اعظم کے طول کے مساوی ہوتا ہے۔

۸۔ شکل ۲۱ میں اگر و م = لا تو ثابت کرو کہ س ن = زلا - ا، سَ ن = زلا + ا، اسلئے سَ ن - س ن = ۲ ا، اس لئے زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل ہوتا ہے۔

۹۔ قطع مکافی (شکل ۱۹) میں ثابت کرو کہ

س ن = ک ع + ع م = ع س + ع م = ط + لا جہاں لا نقطہ ن کا فصلہ ہے۔

۱۰۔ کسی مخروطی (شکل ۱۹، ۲۰، ۲۱) پر کوئی نقطہ ق لیا گیا ہے اور وتر ن ق (ممدودہ بشرط ضرورت) مرتب ک ل سے ے پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ س ے، ن س ق کے بیرونی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ن اور ق زائد

کی مختلف شاخوں پر واقع ہوں جس صورت میں س ے
اندرونی زاویہ کی تنصیف کریگا۔
ق ز عمود کھینچو ک ل پر، تب

س ن : ن ل = ز = س ق : ق ز

اس لئے س ن : س ق = ن ل : ق ز = ن ے : ق ے
پس اقلیدس م ۶ ش ۳ سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۱۱۔ جو مخروطیاں ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہوتی ہیں انہیں مرتسم کرو اور ان میں سے ہر ایک کا خروج المرکز معلوم کرو

(۱) لا² + ۴ ما² = ۴ (۲) ۲ لا² − ۳ ما² = ۶

(۱) میں اَ² = ۴، ب² = ۱ اور ب² = اَ²(۱ − ز²) اسلئے ز² = (اَ² − ب²)/اَ² وغیرہ

۱۲۔ مبدأ کو نقطہ (۰، − ب) پر منتقل کرنے سے ثابت کرو کہ اگر حق کو مبدأ اور حق ص کو معینوں کا محور مانا جائے تو ناقص کی مساوات یہ ہوگی

لا²/اَ² + ما²/ب² − ۲ ما/ب = ۰

اگر مبدأ نقطہ ص پر ہو اور صَ ص کو معینوں کا محور مانا جائے تو مساوات لا²/اَ² + ما²/ب² + ۲ ما/ب = ۰ ہوگی۔

۱۳۔ ل، م کی قیمتیں ط، اَ، ب کی رقوم میں معلوم کرنے سے ثابت کرو کہ جب ل مثبت ہو تو مساوات

ما² = ل لا + م لا²

تعبیر کرتی ہے (۱) قطع مکافی کو اگر م صفر ہو (۲) قطع

ناقص کو اگر م منفی ہو اور یہ قطع ناقص دائرہ ہو جاتا ہے اگر م = - ۱ (۳) قطع زائد کو اگر م مثبت ہو
ثابت کرو کہ اگر م منفی ہو اور تعداداً ایک سے بڑا ہو تو ناقص کا محور اعظم، معینوں کے محور پر واقع ہوتا ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر ل منفی ہو تو بھی مندرجہ بالا نتائج برقرار رہتے ہیں۔ [دفعہ ۲۶ مساوات (۱) میں لا کی علامت پر نوٹ ملاحظہ ہو]

۱۴- ذیل کی مساواتوں سے جو قطع ناقص تعبیر ہوتے ہیں اُن کو مُرتسم کرو

(۱) ما^۲ = ۴ لا - ۱/۲ لا^۲ (۲) ما^۲ = ۴ لا - ۲ لا^۲

اور ان کا خروج المرکز دریافت کرو۔

۱۵- ثابت کرو کہ مساوات

۴ ما^۲ - لا^۲ + ۸ ما + ۶ لا - ۵ = ۰

نقطہ (۳، - ۱) میں سے گزرنے والے دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

ماورائی تفاعل۔ وہ سب تفاعل جو جبریہ تفاعل نہ ہوں ماورائی تفاعل کہلاتے ہیں۔

ابتدائی قسم کے ماورائی تفاعل یہ ہیں (۱) مثلثی تفاعل، راست و مقلوب (۲) قوت نمائی تفاعل اور اس کا مقلوب لوکارثمی تفاعل۔ راست مثلثی تفاعلوں جب لا، جم لا، مس لا، مم لا، قط لا، قم لا کی ترسیمیں علم مثلث کی اکثر درسی کتابوں میں دی ہوئی ہوتی ہیں۔ ان تفاعلوں کی خصوصیت یہ ہے کہ یہ دوری ہوتے ہیں یعنی اگر ف (لا) ان میں سے کسی تفاعل کو تعبیر کرے اور اگر ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہو تو

ف (لا + ۲ ن π) = ف (لا)

دوسرے الفاظ میں اگر تفاعل کی وجہ کو بقدر 2π کے کسی ضعف کے کم یا زیادہ کردیا جائے تو تفاعل کی قیمت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ اس عدد 2π کو تفاعل کا دور کہتے ہیں۔ مماس اور مماس التمام کا اس سے چھوٹا دور π بھی ہے۔

مقلوب تفاعلوں کی ترسیمیں دفعہ ۲۵ کے طریقہ کے مطابق اصلی تفاعلوں کی ترسیموں کو زاویہ لا و ھا کے منصف کے گرد گھمانے سے بنائی جاسکتی ہیں۔ مقلوب تفاعلوں کو ایک قیمت والا تفاعل بنانے کے لئے ہم یہ مان لینگے کہ جب$^{-1}$ لا، قم$^{-1}$ لا، مس$^{-1}$ لا، مم$^{-1}$ لا سے صرف وہ زاویہ تعبیر ہوتا ہے جو $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور جم$^{-1}$ لا اور قط$^{-1}$ لا سے وہ زاویہ تعبیر ہوتا ہے جو ۰ اور π کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

مثلاً جب$^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} =$ جم$^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$، جب$^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

جم$^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$، جب$^{-1}$ لا + جم$^{-1}$ لا $= \frac{\pi}{2}$

مس$^{-1}$ لا + مم$^{-1}$ لا $= \frac{\pi}{2}$ اگر لا مثبت ہو

اور $= -\frac{\pi}{2}$ اگر لا منفی ہو

مشق ۱۔ ایک ہی محوروں کے لحاظ سے جب لا، ۲ جب لا، ۳ جب لا، $\frac{1}{2}$ جب لا، $\frac{1}{3}$ جب لا کی ترسیمیں -2π اور 2π کے درمیان بناؤ۔

مشق ۲۔ ایک ہی محوروں کے لحاظ سے جب $\frac{1}{2}$ لا، جب لا،

جب ۲ لا کی ترسیمیں -2π اور 2π کے درمیان بناؤ۔

مشق ۳۔ جب $\frac{1}{2}$ لا + جب لا + جب ۲ لا کی ترسیم مشق ۲ کی ترسیموں کی مدد سے بناؤ $(-\frac{\pi}{2} \leq$ لا $\leq \frac{\pi}{2})$

مشق ۴۔ جب لا کی ترسیم سے حساب لگانے کے بغیر جب (لا + ا) کی ترسیم حاصل کرو جہاں ا کوئی مثبت یا منفی عدد ہے، اس سے جم لا کی ترسیم مستنبط کرو۔

[مبدا کو نقطہ (ا، ۰) پر منتقل کرو]

مشق ۵۔ جب لا + جم لا کی ترسیم بناؤ

[جب لا + جم لا = $\sqrt{2}$ جب (لا + $\frac{\pi}{4}$) وغیرہ]

مشق ۶۔ مشق ۴، سوال ۱۰ کی ترقیم کے موافق نقطہ کے راستہ کی ترسیم بناؤ جبکہ

(۱) لا = ۲ ت، ما = ۳ جب ۴ ت

(۲) لا = ۲ ت، ما = ۳ مس$^{-1}$ ت

(۳) لا = ا جم ن ت، ما = ب جب ن ت

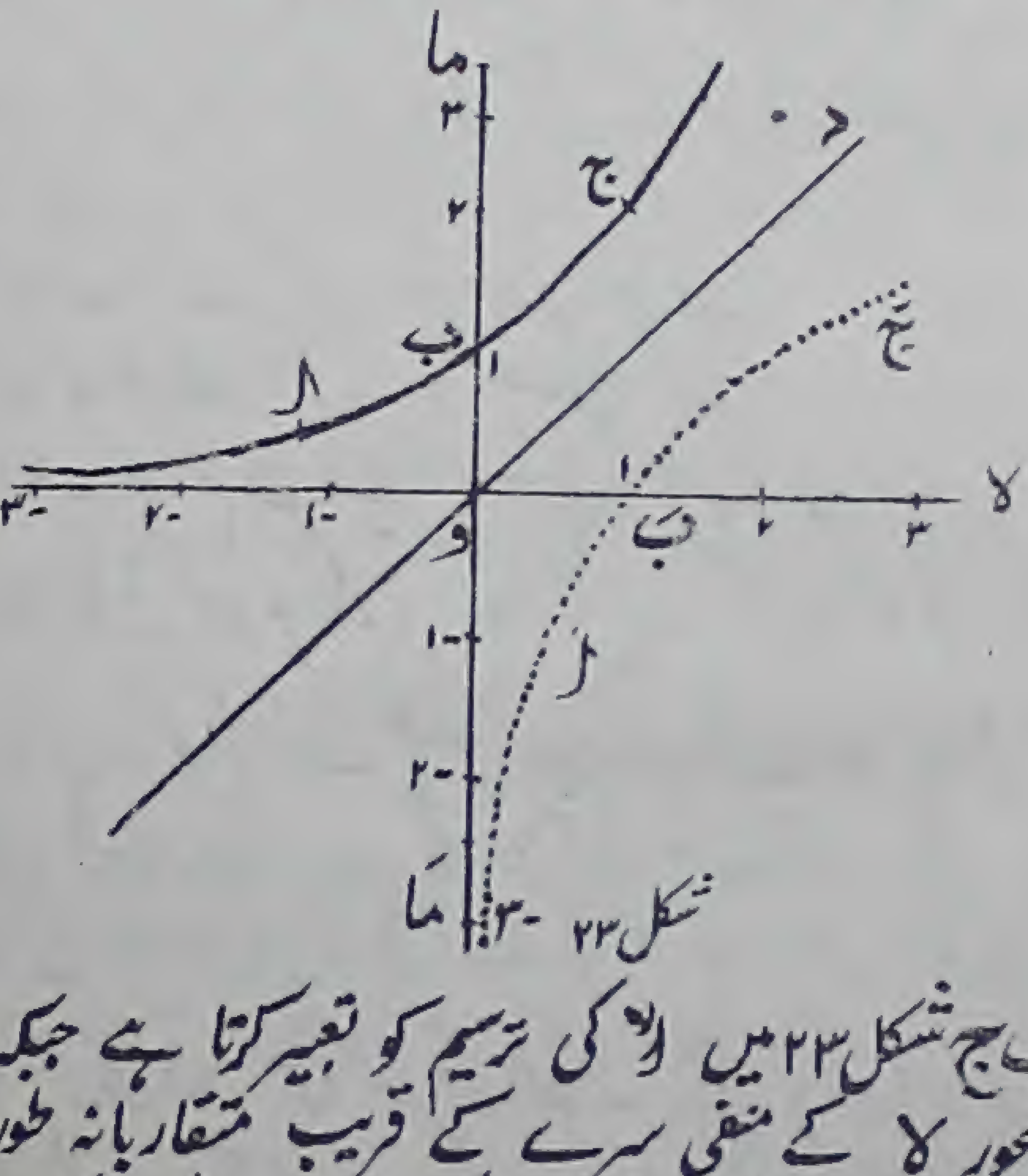
۲۹۔ **قوت نمائی اور لوکارثمی تفاعل۔** ا^{لا} کو لا کا قوت نمائی تفاعل کہتے ہیں، اساس ا کوئی مثبت مستقل ہے اور قوت لا تفاعل کی وجہ سے ا^{لا} ہمیشہ مثبت رہتا ہے۔ اگر لا کوئی مثبت کسر $\frac{م}{ن}$ ہو (جہاں م اور ن صحیح عدد ہیں) تو ا^{لا} سے ا^{م} کا ن واں (مثبت) جذر مراد ہوگا، اگر لا منفی کسر ہو مثلاً $-\frac{م}{ن}$ (م اور ن صحیح عدد ہیں) تو ا^{لا} سے ا^{م} کے ن ویں (مثبت) جذر کا متکافی مراد ہوگا

اگر لا صفر ہو تو ا^{لا} ایک کے مساوی ہے۔ اگر لا کوئی غیر منطق عدد ہو تو ہمیں فی الحال اس کی بجائے اس کی منطق تقریبی قیمت رکھ لینی چاہیئے۔

(۱) ا > ۱، جبکہ لا، -ع سے +ع تک بڑھتا ہے جہاں ع کوئی بہت بڑا مثبت عدد ہے تو ا^{لا} ایک بہت چھوٹے مثبت عدد ا$^{-ع}$ سے شروع ہو کر، ایک میں سے گزر کر جو ا^{لا} کی قیمت ہے جبکہ لا = ۰، ایک بہت بڑے مثبت عدد ا$^{+ع}$ تک بڑھتا ہے۔

(۲) اگر ا = ۱ تو اس صورت میں ا^{لا} ہمیشہ ایک کے مساوی ہوتا ہے۔

(۳) اگر ا < ۱ (فرض کرو کہ ا = $\frac{۱}{ب}$ جہاں ب > ۱) تو جیسے لا، -ع سے +ع تک بڑھتا ہے، ا^{لا} ایک بہت بڑے مثبت عدد ب^{ع} سے کم ہوتے ہوتے ایک بہت چھوٹے مثبت عدد ب$^{-ع}$ تک گھٹتا ہے۔



شکل ۲۳

منحنی ا ب ج شکل ۲۳ میں ا^{لا} کی ترسیم کو تعبیر کرتا ہے جبکہ ا = ۲، ترسیم محور لا کے منفی سرے کے قریب متقاربانہ طور پر آتی ہے۔ اگر ا ایک سے بڑا ہو تو $\frac{۱}{ا}$ ایک سے چھوٹا ہوگا اور چونکہ

(ا/ا)^لا = ا^-لا یہ ظاہر ہے کہ (ا/ا)^لا کی ترسیم ا^لا کی ترسیم سے موخر الذکر ترسیم کو محور مَا یما کے گرد گھمانے سے حاصل ہوسکتی ہے، پس اگر ا ایک سے کم ہو تو ا^لا کی ترسیم محور لا کے مثبت سرے کے نزدیک تقاربانہ طور پر آتی ہے۔

لوکارثم کی تعریف کی رو سے اگر ما = ا^لا تو لا = لوک_ا ما اس لئے ا کا لوکارثم، لا کا ایک ایسا تفاعل ہے جو قوت نمائی تفاعل ا^لا کا مقلوب ہے۔ پس کسی مقلوب تفاعل کی ترسیم معلوم کرنے کا جو قاعدہ دفعہ ۲۵ میں درج ہو چکا ہے اس کی رو سے ہم لوک_ا لا کی ترسیم ا^لا کی ترسیم کو زاویہ لا و ما کے منصف و د کے گرد دو قائموں میں گھمانے سے حاصل کرسکتے ہیں۔ شکل ۲۴ کا منحنی اَ ب ج، لوک_ا لا کی ترسیم ہے۔

قوت نمائی تفاعلوں کے لئے سب سے موزوں اساس ایک غیر منطق عدد ہے جس کو عام طور پر ہم 'ق' سے تعبیر کرینگے۔ اسے نیپئر کا اساس کہتے ہیں اور یہ (عدد) ق = ۲٫۷۱۸۲۸ تقریباً۔ اس کتاب میں اساس ق پر کے لوکارثموں کو علامت "لوک" سے یعنی بغیر کسی لاحقہ کے تعبیر کیا جائے گا تا وقتیکہ اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے۔ یہ لوکارثم اساس ۱۰ کے لوکارثموں میں معمولی قاعدہ کی رو سے تحویل ہوسکتے ہیں۔

$$\text{لوک}_{۱۰}\,\text{لا} = \text{لوک}_{\text{ق}}\,\text{لا} \times \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ق} = \text{لوک}_{\text{ق}}\,\text{لا} \div \text{لوک}_{\text{ق}}\,۱۰$$

اور لوک₁₀ ق = ۰٫۴۳۴۲۹۴۴، اور لوک_ق ۱۰ = ۲٫۳۰۲۵۸۵

قوت نمائی تفاعل تفصیل کے ساتھ اُس وقت بحث میں آوے گا جب ہم عدد ق کی باضابطہ تعریف کرینگے (دفعہ ۴۸)

۵۴۔ ترسیموں کے متعلق عام اشارات۔ جن ترسیموں پر قبل ازیں

بحث ہو چکی ہیں وہ صرف ان تفاعلوں کی نسبت ہیں جن کا تعین ابتدائی جبر و مقابلہ اور علم مثلث کی معمولی مساواتوں سے ہوتا ہے، نیز یہ مان لیا گیا ہے کہ یہ سب تفاعل مسلسل ہیں کیونکہ صرف اسی مفروض کی بنا پر ہم ان نقطوں کو جن کے محدد مساوات کو پورا کرتے ہیں ملانے کے مجاز ہیں اور نیز اسی بنا پر ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ان نقطوں کو ملانے والے چھوٹے چھوٹے خطوں یا قوسوں پر کے نقطے بھی مساوات کو پورا کرتے ہیں، بالفاظ دیگر ہم نے یہ مان کیا ہے کہ جب متغیر لا بقدر ایک تھوڑی مقدار کے بدلتا ہے تو تفاعل ما بھی اس کے جواب میں بقدر ایک تھوڑی مقدار کے بدلتا ہے۔ اس کی صرف ایک مستثنیٰ صورت پیش آئی ہے یعنی اس وقت جبکہ لا کے ایک خاص محدود قیمت کے قریب آنے سے ما کی قیمت تعداداً بہت بڑی ہو جاتی ہے دیکھو دفعہ ۲۴۔

مثلاً اگر ما = $\frac{۱}{\text{لا}}$ تو جب لا (مثال کے طور پر) $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سے بدل کر $\frac{۱}{۱۰۰۱}$ ہو جاتا ہے تو ما ۱۰۰۰ سے بدل کر ۱۰۰۱ ہو جاتا ہے۔ یعنی لا کی قیمت میں نہایت ہی خفیف سا اضافہ ما کی قیمت میں ایک اکائی کا اضافہ پیدا کرتا ہے۔ جب لا صفر کے اور بھی قریب آ جاتا ہے تو لا کی قیمت میں اتنی ہی تبدیلی ما کی قیمت میں اور بھی بڑی تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ پس جب لا صفر کے بہت قریب آجاتا ہے ما یعنی $\frac{۱}{\text{لا}}$ مسلسل نہیں رہتا یا یوں کہیں کہ $\frac{۱}{\text{لا}}$ غیر مسلسل ہو جاتا ہے۔

چونکہ جبر و مقابلہ میں تقسیم کے قواعد کے بیان میں اس امر کی صاف صراحت کردی گئی ہے کہ کسی مقدار کو صفر پر تقسیم نہیں کیا جا سکتا، اس لئے علامت $\frac{1}{\text{صفر}}$ بے معنی ہے، لیکن چونکہ لا کو صفر کے قریب لانے سے $\frac{1}{\text{لا}}$ کو کسی محدود عدد سے بڑا بنانا ممکن ہے، اس لئے بالعموم $\frac{1}{\text{صفر}}$ کو بروئے تعریف "لا متناہی" یا "لا متناہی عدد" کہتے ہیں۔

پس کوئی تفاعل اپنی وجہ کی ان قیمتوں کے لئے غیر مسلسل ہو جاتا ہے جو مندرجۂ بالا تعریف کے مطابق تفاعل کو لا متناہی بنا دیں۔ تسلسل کے مضمون پر باب پنجم میں بحث کی جائے گی۔

جب کسی تفاعل اور اس کی وجہ کا باہمی تعلق پیمائشوں کے ذریعہ معلوم کیا جائے جیسا کہ عملی کام میں اکثر اوقات ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ ہم تفاعل مذکور اور اس کی وجہ کی صرف متعدد قیمتوں کو محسوب کر سکتے ہیں اور ایسی صورتوں میں بہت سے منحنی کھینچنا ممکن ہوتا ہے جو حسب تعریف بالا مسلسل بھی ہوں اور سب مرتسمہ نقطوں میں سے گزریں۔ عملی طور پر مرتسمہ نقطوں کو خطوطِ مستقیم کے ذریعہ نہیں ملایا جاتا بلکہ اس سادہ ترین منحنی کو جس پر یا جس کے قریب نقاط مرتسمہ واقع ہوں بالعموم تفاعل مذکور کی ترسیم تصور کیا جاتا ہے، جو شکستہ خط نقاطِ مرتسمہ کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے حاصل ہوتا ہے اس میں یہ نقص ہوتا ہے کہ اس کا انحنا مسلسل نہیں ہوتا۔ اگر تفاعل کو اس شکستہ منحنی سے تعبیر کیا جائے جو مرتسمہ نقاط کے ملانے سے پیدا ہوتا ہے تو تفاعل کی محسوبہ قیمتوں کے لئے

احصا کی اصطلاح میں اسکے مشتق کی قیمت مسلسل طور پر نہیں بدلیگی بلکہ بالعموم یک لخت بدلیگی یاد رہے کہ مناسب ترین منحنی کے انتخاب میں نہایت احتیاط سے کام لینا چاہئیے اور وجہ کی جن حدود کے اندر تفاعل کی قیمتیں محسوب کی گئی ہیں اُن کے باہر ترسیم کی شکل کا اندازہ لگانے سے بالعموم اجتناب کرنا چاہئیے۔ عملی ترسیموں کی بہت سی مثالیں علم حیل، طبیعیات اور کیمیا کی کتابوں میں ملینگی۔

مشق ۶

۱۔ ف (لا) کی ترسیم سے ف (ک لا) کی ترسیم مستنبط کرو جہاں ک کوئی مستقل ہے۔ ف (لا) کی ترسیم کو ث$_۱$ سے تعبیر کرو اور ف (ک لا) کی ترسیم کو ث$_۲$ سے۔ اگر لا = ر تو ث$_۲$ کا معین ف (ک ر) ہوگا لیکن ف (ک ر) تفاعل ف (لا) کی قیمت ہے جبکہ لا = ک ر۔ اس لئے ث$_۲$ کا معین جبکہ لا = ر، ث$_۱$ کے معین کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا = ک ر۔ چونکہ ر سے فصلہ کی کوئی قیمت مراد ہو سکتی ہے، اس لئے ث$_۱$ سے بغیر مزید حساب لگانے کے ث$_۲$ کی ترسیم معلوم ہو سکتی ہے۔ ہم یوں کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک خط جو محور لا کے متوازی ہے وہ نسبت ک : ۱ سے سکڑ جاتا ہے اور محور ما کے متوازی کسی خط کا طول نہیں بدلتا۔

۲۔ مشق ماقبل کے اصول کی مدد سے (۱) جب لا کی ترسیم سے جب $\frac{\text{لا}}{۲}$ اور جب ۲ لا کی ترسیمیں (۲) ۲$^{\text{لا}}$ کی ترسیم سے ۲$^{\text{ک لا}}$ کی ترسیم (۳) ۲$^{-\text{لا}}$ کی ترسیم سے ۲$^{-\text{ک لا}}$ کی ترسیم حاصل کرو۔

۳۔ ف (لا) کی ترسیم سے ج ف (ک لا) کی ترسیم حاصل کرو جہاں ج اور ک مستقل ہیں۔

ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کی ترسیم حاصل کرو

(۱) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ کے ترسیم سے

(۲) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۱$ کی ترسیم سے

۴۔ ایک نقطہ ایک سطح مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وقت ت پر اس کے محدد $\text{لا} = \text{و ت جم عہ}$ اور $\text{ما} = \text{و ت جب عہ} - \frac{۱}{۲}\text{ج ت}^2$ ہیں، ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک مکافی ہے جس کا محور انتصابی اور نیچے کی طرف ہے، راس $\left(\frac{\text{و}^2\text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}، \frac{\text{و}^2\text{جب}^2\text{عہ}}{۲\text{ج}}\right)$ ہے

اور وتر خاص $\frac{۲\text{و}^2\text{جم}^2\text{عہ}}{\text{ج}}$ ہے (مشق ۴ سوال ۱۰ سے مقابلہ کرو)

ت کو ساقط کرنے سے لا اور ما میں یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\left(\text{لا} - \frac{\text{و}^2\text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}\right)^2 = -\frac{۲\text{و}^2\text{جم}^2\text{عہ}}{\text{ج}}\left(\text{ما} - \frac{\text{و}^2\text{جب}^2\text{عہ}}{۲\text{ج}}\right)$$

۵۔ ثابت کرو کہ مشقِ ماقبل کے مکافی کے مرتب کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{و}^2}{۲\text{ج}}$$

۶۔ اگر ایک نقطہ کے محدد مساواتوں

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{ب ت}، \quad \text{ما} = \text{ا}' + \text{ب}'\text{ت} + \text{ج ت}^2$$

سے حاصل ہوں جہاں ت کوئی متغیر ہے اور ا، ب ..... ج مستقل ہیں، تو ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق عام طور پر قطع مکافی

ہے جس کا رأس نقطہ

(ا - ب ب۱ / ۲ ج ، ا - ب۱^۲ / ۴ ج) ہے اور جس کا

وتر خاص ب۱^۲ / ج ہے۔

۷۔ دفعہ ۲۷ (۲) کے امتحانے مساوات ذیل پر عائد کرو

ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ = د .... (۱)

اور ثابت کرو کہ نئی مساوات یہ ہو گی

ل لاَ^۲ + ۲ م لاَ ماَ + ن ماَ^۲ = د ...... (۲)

جہاں ل = ا جم^۲ طہ + ۲ ب جب طہ جم طہ + ج جب^۲ طہ

م = (ج - ا) جب طہ جم طہ + ب (جم^۲ طہ - جب^۲ طہ)

ن = ا جب^۲ طہ - ۲ ب جب طہ جم طہ + ج جم^۲ طہ

۸۔ ثابت کرو کہ سوال ۷ کی مساوات (۱) عام طور پر مرکزدار مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔ مساوات (۲) ہو جاتی ہے ل لاَ^۲ + ن ماَ^۲ = د جو دفعہ ۲۶ کی مساوات (۵) ہے اگر م = ۰، ہم ہمیشہ طہ کے لئے ایک ایسی قیمت منتخب کر سکتے ہیں جس سے م معدوم ہو جائے کیونکہ

(ج - ا) جب طہ جم طہ + ب (جم^۲ طہ - جب^۲ طہ) = ۰۔ اگر مس ۲ طہ = ۲ ب / (ا - ج)

اور ا، ب، ج کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں ہم ہمیشہ ایک ایسا زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرے، اس کے بعد جم طہ اور جب طہ کی جو قیمتیں اس مساوات سے حاصل ہوں ل اور ن کی قیمتوں میں مندرج کر دینی چاہئیں۔

۹۔ محددوں کے محوروں کو ۴۵° میں سے گھمانے سے ثابت کرو کہ مساوات

۱۳ لا² − ۱۰ لا ما + ۱۳ ما² = ۷۲

قطع ناقص کو تعبیر کرتی ہے جس کے محور ۶ اور ۴ ہیں۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۱۰۔ ایک نقطہ کے محدد مساواتوں

لا = ا جم (۲π ت / ت۱)، ما = ب جم ۲π (ت / ت۱ + عہ)

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ت کوئی متغیر ہے، فرض کرو کہ وقت ہے، ثابت کرو کہ نقطہ ناقص کو مرتسم کرتا ہے جس کی مساوات ہے

لا² / ا² − (۲ لا ما / اب) جم ۲π عہ + ما² / ب² = جب² ۲π عہ

۱۱۔ ایک نقطہ کے محدد ذیل کی مساواتوں

لا = ا جم (۲π ت / ت۱)، ما = ب جم (۴π ت / ت۱)

سے حاصل ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ نقطہ قطع مکافی مرتسم کرتا ہے جس کی مساوات ہے

ما / ب + ۱ = ۲ لا² / ا²

۱۲۔ ذیل کی مساواتوں سے جو مرکز دار مخروطیاں تعبیر ہوتی ہیں ان کے محوروں کے طول اور ان کے مرکز معلوم کرو

(۱) ۴ لا² + ۹ ما² − ۲۴ لا + ۷۲ ما + ۱۴۴ = ۰

(۲) ۳ لا² − ۴ ما² + ۶۶ لا + ۴۰ ما + ۲۵۱ = ۰

مساوات (۱) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{(\text{لا} - ۳)^{۲}}{۹} + \frac{(\text{ما} + ۴)^{۲}}{۴} = ۱$$

۱۳- محوروں کو ۴۵° میں سے گھمانے سے ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} = ۳\sqrt{۲}\ \text{ک لا ما} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

زبروں کو گرانے کے بعد ہو جاتی ہے

$$(\text{لا} + \text{ک})\,\text{ما}^{۲} = (\text{ک} - \tfrac{۱}{۳}\,\text{لا})\,\text{لا}^{۲} \ldots\ldots\ldots (۲)$$

شکل (۲) سے دکھاؤ کہ منحنی کا ایک متقارب فصلوں کے نئے محور پر عمود دار ہے، علاوہ ازیں دکھاؤ کہ نیا لا ۳ک سے بڑا نہیں ہو سکتا اور نہ (جبریہ طور پر) -ک سے کم ہو سکتا ہے، ک کو مثبت مانا گیا ہے۔

۱۴- شکل ۲۰ میں س کو مبدا، س ک کو ابتدائی خط، س ن کو ر اور ∠ ک س ن کو طہ فرض کرنے سے ثابت کرو کہ ناقص کی قطبی مساوات یہ ہو گی

$$\text{ر} = \frac{\text{ل}}{۱ + \text{ز جتم طہ}}$$

جہاں ل = ز × ک س = س خ = نیم وتر خاص۔ مخروطی کی تعریف کی رو سے س ن = ز × ل ن، اب چونکہ ل ن = ک س + س ض اسلئے ر = ز × ک س + ز × س ض = ل + ز × ر جتم (π - طہ) = ل - ز × ر جتم طہ

اس لئے ر (۱ + ز جتم طہ) = ل

مساوات نہیں بدلیگی اگر سَ مبدا ہو، سَ کَ ابتدائی خط ہو اور زاویہ کَ سَ ن = طہ

۱۵- ثابت کرو کہ قطع زائد کی قطبی مساوات ہے

$$\text{ر} = \frac{\text{ل}}{۱ + \text{ز جتم طہ}}$$

۱۶- ثابت کرو کہ قطع مکافی (شکل ۱۹) کی قطبی مساوات ہے

ر = ۲ ط / (۱ + جم طہ)

جہاں ۲ ط = س خ اور زاویہ ک س ن = طہ، مبدأ س ہے اور ابتدائی خط س ک، اگر زاویہ لا س ن = طہ تو ہمیں ۱ + جم طہ کی بجائے ۱ - جم طہ لینا ہوگا۔

۱۷- ثابت کرو کہ نقطہ (لا۱، ما۱) سے خط ما - لا مس طہ = ۰ پر جو عمود نکالا جائے اُس کا طول (ما۱ - لا۱ مس طہ) / √(۱ + مس۲ طہ) ہوگا۔

شکل ۲۲ (ل) دفعہ ۲۷ میں فرض کرو کہ ن نقطہ (لا۱، ما۱) ہے، تب مطلوبہ عمود مَ ن ہوگا کیونکہ لَا و لا۱ خط ما - لا مس طہ = ۰ ہے، لیکن دفعہ ۲۷ کی مساوات (۳) کی رو سے مَ ن = اَ = ما۱ جم طہ - لا۱ جب طہ = جم طہ (ما۱ - لا۱ مس طہ)

= (ما۱ - لا۱ مس طہ) / √(۱ + مس۲ طہ)

مس طہ کی بجائے - ا/ب رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (لا۱، ما۱) سے خط ا لا + ب ما = ۰ پر جو عمود نکالا جا سکتا ہے اُس کا طول (ا لا۱ + ب ما۱) / √(ا۲ + ب۲) ہے۔

پس نقطہ (لا۱، ما۱) سے جو عمود اُس خط پر کھینچ سکتا ہے جس کی مساوات ا لا + ب ما = ۰ ہے اُس کا طول معلوم کرنے کے لئے

جملہ ا لا + ب ما میں لا، ما کی بجائے لا۱، ما۱ درج کرو اور لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر پر تقسیم کرو۔

۱۸۔ سوال ماقبل کی طریقہ سے ثابت کرو کہ نقطہ (لا۱، ما۱) سے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر جو عمود کھینچ سکتا ہے اس کا طول

(ا لا۱ + ب ما۱ + ج) ÷ √(ا۲ + ب۲) ہے

عمود کے لئے جو جملہ اوپر حاصل ہوتا ہے اس کی علامت مثبت ہوگی اگر ا لا۱ + ب ما۱ + ج مثبت ہو اور منفی ہوگی اگر یہ منفی ہو بشرطیکہ علامت جذر کے پہلے ہمیشہ مثبت علامت متصرف خیال کی جائے، لیکن اس کی عددی قیمت ہمیشہ مطلق طول کو تعبیر کرے گی۔

۱۹۔ ذیل کی صورتوں میں عمودوں کا طول معلوم کرو:

(۱) نقطہ (۲، ۱) سے خط ۳ لا - ۴ ما + ۵ = ۰ پر

(۲) نقطہ (۲، -۱) سے خط ۱۲ لا - ۱۳ ما - ۱۰ = ۰ پر

۲۰۔ خط مستقیم (لا ÷ ا) جم طہ + (ما ÷ ب) جب طہ = ۱ پر نقاط (۱) (۰، ۰) (۲) (ز ا، ۰)، (۳) (- ز ا، ۰) سے جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے طول معلوم کرو۔

اگر ز۲ = (ا۲ - ب۲) ÷ ا۲ تو ثابت کرو کہ نقاط بالا (۲) اور (۳) سے جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کا حاصل ضرب ب۲ کے مساوی ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ سوال ماقبل کا خط مستقیم قطع ناقص

(لا۲ ÷ ا۲) + (ما۲ ÷ ب۲) = ۱

سے صرف ایک نقطہ (ا جم طہ، ب جب طہ) پر ملتا ہے (مشق ۳

سوالات ۹ اور ۱۰ سے مقابلہ کرو)
پس خط مذکور ناقص کا مماس ہے اور مذکورۂ بالا تین عمود ناقص کے مرکز اور دو ماسکون سے کھینچے گئے ہیں۔ (دیکھو مشق ۱۰، سوال ۹)

۲۲۔ اگر م ن (شکل ۲۱) کو اتنا خارج کیا جائے کہ یہ پھر زائد سے نَ پر ملے اور خطوط و ط، و ف سے ق اور قَ پر ملے تو ثابت کرو کہ

قَ ن × ن قَ = م قَ^{2} ـ م ن^{2} = ب^{2} = قَ نَ × نَ قَ

اِن مساواتوں سے ثابت کرو کہ و ط اور و ف متقارب ہیں، نیز ن ق اور نَ قَ مساوی ہیں۔

باب چہارم

شرح اور انتہا

۴۱۔ شرحیں۔ احصائے تفرقات کا اساسی مبحث یہ ہے کہ کسی تفاعل کی تبدیلی کی شرح کو اس کی وجہ کے لحاظ سے معلوم کیا جائے۔ شرح کے تخیل میں وقت کے عنصر کی شمولیت لازمی نہیں۔ خواہ زیر بحث مقداروں کی نوعیت کچھ ہی ہو ایک مقدار ہے جس کو متغیر متبوع یا وجہ تصور کیا جائے کوئی تبدیلی واقع ہونے سے دوسری مقدار میں بھی جس کو تابع متغیر یا تفاعل کہنا چاہئے تبدیلی پیدا ہوتی ہے اور تفاعل کی تبدیلی کا وجہ کی تبدیلی کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم یہ معلوم کرسکتے ہیں کہ بلحاظ وجہ کے تفاعل کی تبدیلی کی شرح کیا ہے۔ نظری اور عملی ریاضی کے بہت سے مسئلوں کا حل اس قسم کی شرح معلوم کرنے پر منحصر ہوتا ہے مثلاً منحنی کے مماس کھینچنے کا مسئلہ فصلہ کے لحاظ سے معین کی تبدیلی کی شرح معلوم کرنے کے مترادف ہے۔

۴۲۔ اضافے۔ جب کوئی متغیر لا اپنی کسی قیمت لا۱ سے بدلکر قیمت لا۲ اختیار کرے تو فرق لا۲ ۔ لا۱ کو (لا۱ ۔ لا۲ کو نہیں) لا۱ کے اضافہ سے موسوم کرتے ہیں، اسے ہم مف لا۱ سے تعبیر کریں گے، علامت مف لا کو ایک مجموعی شئے تصور کرنا چاہئے تنہا مف کوئی معنی نہیں رکھتا۔ "مف" فی الحقیقت "محدود فرق" کا اختصار ہے۔

اگر $\text{لا}_{۲} > \text{لا}_{۱}$ تو اضافہ مثبت ہے، جس کا یہ مطلب ہے کہ لا جبریہ طور پر بڑھتا ہے، اگر $\text{لا}_{۲} < \text{لا}_{۱}$ تو اضافہ منفی ہے، جس کے معنی ہیں کہ لا جبریہ طور پر کم ہوتا ہے۔ دونوں صورتوں میں یہ لفظ "اضافہ" کا استعمال کیا جاتا ہے جہاں منفی "اضافہ" سے جبریہ کمی مراد ہوتی ہے۔

چونکہ $\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۱} = \text{مف لا}_{۱}$ اس لئے $\text{لا}_{۲} = \text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}$، پس اگر لا، $\text{لا}_{۱}$ سے بدل کر کوئی اور قیمت اختیار کرے اور اگر $\text{لا}_{۱}$ کا اضافہ $\text{مف لا}_{۱}$ ہو تو دوسری قیمت $\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}$ ہوگی، طالب علم کو چاہئے کہ لا بدل کر جو قیمت اختیار کرتا ہے اُس کو اس طرح تعبیر کرنے کی عادت اختیار کرے، بظاہر $\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}$ کی شکل، $\text{لا}_{۲}$ کی نسبت زیادہ گراں اور بے ڈول ہے، لیکن ہم دیکھینگے کہ دراصل یہ زیادہ سراغ نیز اور کئی صورتوں میں زیادہ سہولت بخش ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ما کوئی تفاعل ہے لا کا مثلاً $۵\,\text{لا} - ۳$ اور $\text{لا}_{۱}$، $\text{ما}_{۱}$ متغیروں لا، ما کی کوئی متناظر قیمتیں ہیں، جبکہ لا، $\text{لا}_{۱}$ سے بدل کر $\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}$ ہو جاتا ہے تو فرض کرو کہ ما میں بقدر $\text{مف ما}_{۱}$ کے اضافہ ہوتا ہے یعنی $\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}$ کے جواب میں ما کی قیمت $\text{ما}_{۱} + \text{مف ما}_{۱}$ ہے، تب

$$\text{ما}_{۱} = ۵\,\text{لا}_{۱} - ۳ ,\quad \text{ما}_{۱} + \text{مف ما}_{۱} = ۵\,(\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}) - ۳$$

اس لئے $\text{مف ما}_{۱} = ۵\,\text{مف لا}$

اگر $\text{ما} = ۳\,\text{لا}^{۲} + ۷\,\text{لا} - ۲$ تو اسی ترقیم کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}_{۱} = ۳\,\text{لا}_{۱}^{۲} + ۷\,\text{لا}_{۱} - ۲ ,\quad \text{ما}_{۱} + \text{مف ما}_{۱} = ۳\,(\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱})^{۲} + ۷\,(\text{لا}_{۱} + \text{مف لا}_{۱}) - ۲$$

اِس لئے دوسری مساوات کے دائیں رکن سے اصلی مساوات کے دائیں رکن کو اور دوسری مساوات کے بائیں رکن سے مساوات کے بائیں رکن

کو تفریق کرنے سے

مف ما = ۶ لا مف لا + ۳ (مف لا)^{۲} + ۷ مف لا

= (۶ لا + ۷) مف لا + ۳ (مف لا)^{۲}

عام طور پر اگر ما = ف (لا)

تو مف ما = ف (لا + مف لا) - ف (لا) = مف ف (لا)

خواہ متغیروں کو کسی حروف سے تعبیر کیا جائے یہی ترقیم استعمال کیجاتی ہے، مثلاً اگر س = فہ (ت)

مف س = فہ (ت + مف ت) - فہ (ت) = مف فہ (ت)

وغیرہ وغیرہ

چونکہ اضافوں کو معلوم کرنے کا یہ طریقہ متواتر استعمال ہوتا ہے، طالب علم کو چاہیئے کہ اس سے بخوبی واقف ہو جائے، لہٰذا اُسے ذیل کی مثالیں پورے طور پر حل کرنی چاہیئیں ۔

مشق ۱ ۔ اگر ما = $\frac{۱}{لا^{۲}}$ تو ثابت کرو کہ مف ما = - $\frac{۲ لا مف لا + (مف لا)^{۲}}{(لا + مف لا)^{۲} لا^{۲}}$

مشق ۲ ۔ اگر ف (لا) = لا^{۳} - ۱ تو ثابت کرو کہ

مف ف (لا) = ۳ لا^{۲} مف لا + ۳ لا (مف لا)^{۲} + (مف لا)^{۳}

مشق ۳ ۔ اگر ما = لوک لا تو ثابت کرو کہ

مف ما = مف لوک لا = لوک $\frac{لا + مف لا}{لا}$ = لوک (۱ + $\frac{مف لا}{لا}$)

مشق ۴ ۔ اگر ما = لا^{۳}، مف ما = (لا + مف لا)^{۳} - لا^{۳}، اس سے مف ما

اور (مف ما۱ / مف لا۱) محسوب کرو جبکہ لا = ۱۰، مف لا۱ = ۱، ۵ء، ۱ء، ۰۱ء، ۰۰۱ء

مشق ۵ ـ اگر ما = جب لا تو ثابت کرو کہ

مف ما۱ = مف جب لا۱ = جب (لا۱ + مف لا۱) ـ مف لا۱

جدولوں کی مدد سے مف ما۱ اور (مف ما۱ / مف لا۱) کی قیمتیں، لا۱ اور مف لا۱ کی مندرجۂ ذیل قیمتوں کے لئے محسوب کرو جہاں یہ قیمتیں زاویہ کی قیمت کو درجوں میں تعبیر کرتی ہیں ـ

(۱) لا۱ = ۳۰، مف لا۱ = ۱، ۵ء، ۲ء، ۱ء

(۲) لا۱ = ۹۰، مف لا۱ = ۱، ۵ء، ۲ء، ۱ء

مشق ۶ ـ اگر ما = لوک۱۰ لا تو مف ما۱ اور (مف ما۱ / مف لا۱) کی قیمتیں جدولوں سے معلوم کرو

(۱) جبکہ لا۱ = ۳۲۵ اور مف لا۱ = ۲، ۱، ۵ء، ۱ء

(۲) جبکہ لا۱ = ۷۲ اور مف لا۱ = ۲، ۱، ۱ء، ۰۱ء

۳۳ ـ **یکساں تغیر** ـ جب کسی تفاعل کی دلیل یا وجہ سلسلہ وار لا۱، لا۲، لا۳، لا۴ ...... قیمتیں اختیار کرے تو ان کے جواب میں تفاعل سلسلہ وار ما۱، ما۲، ما۳، ما۴ ...... قیمتیں اختیار کرے گا ـ جب تفاعل کے اضافہ کو وجہ کے متناظر اضافہ کے ساتھ مستقل نسبت ہو تو اِسے یوں بیان کرتے ہیں کہ تفاعل یکساں طور پر بدلتا ہے یا اپنی وجہ کے لحاظ سے ایک مستقل شرح سے بدلتا ہے ـ

اگر مستقل نسبت ک ہو تو

$$\frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \text{ا}،\quad \frac{\text{ما}_3 - \text{ما}_2}{\text{لا}_3 - \text{لا}_2} = \text{ا}$$

اور $\text{ما}_2 - \text{ما}_1 = \text{ا}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)$، $\text{ما}_3 - \text{ما}_2 = \text{ا}\,(\text{لا}_3 - \text{لا}_2)$

اگر وجہ کے اضافے $\text{لا}_2 - \text{لا}_1$ اور $\text{لا}_3 - \text{لا}_2$ باہم مساوی ہوں تو ان کے جواب میں تفاعل کے جو اضافے $\text{ما}_2 - \text{ما}_1$ اور $\text{ما}_3 - \text{ما}_2$ ہونگے وہ بھی باہم مساوی ہونگے، اضافہ $\text{لا}_2 - \text{لا}_1$ مثبت ہوسکتا ہے اور منفی بھی اور اس کی مقدار بھی کچھ ہی ہوسکتی ہے، اس کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ہمیشہ $\text{ا}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)$ ہے اور جب وجہ میں دو مساوی اضافے واقع ہوں تو ان کے جواب میں تفاعل کے جو دو اضافے ہونگے وہ بھی باہم مساوی ہونگے۔

تعریف سے ظاہر ہے کہ یکساں طور پر بدلنے والا تفاعل اپنی وجہ کے لحاظ سے خطی تفاعل ہوتا ہے کیونکہ جب دلیل کسی ایک قیمت لا_1 سے بدلکر کوئی دوسری قیمت لا اختیار کرتی ہے تو فرض کرو کہ تفاعل ما_1 سے بدلکر ما ہو جاتا ہے، تب وجہ کا اضافہ $(\text{لا} - \text{لا}_1)$ ہے اور تفاعل کا اضافہ $\text{ما} - \text{ما}_1$، اور

$$\text{ما} - \text{ما}_1 : \text{لا} - \text{لا}_1 = \text{ا}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ما}_1 - \text{ا}\,\text{لا}_1$$

لیکن لا_1، ما_1 وجہ اور تفاعل کی مقررہ قیمتیں ہیں اور نسبت ا مستقل ہے، اس لیئے ما، لا کا خطی تفاعل ہے۔

برعکس اس کے یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ما، لا کا خطی تفاعل ا لا + ب ہو تو ما بلحاظ لا کے یکساں طور پر بدلتا ہے۔

یکساں شرح کا ناپ۔ مستقل نسبت ا کو اس شرح کا ناپ مانا جاتا ہے جس سے تفاعل بلحاظ اپنی دلیل کے بدلتا ہے،

بجائے یہ کہنے کے ا شرح کا ناپ ہے ہم اختصار کی خاطر یہ کہیں گے کہ ا شرح ہے۔

جب ا کوئی مثبت عدد ہو تو ما بڑھتا ہے جبکہ لا بڑھتا ہے اور ما گھٹتا ہے جبکہ لا گھٹتا ہے، جب ا کوئی منفی عدد ہو تو ما گھٹتا ہے جبکہ لا بڑھتا ہے اور ما بڑھتا ہے جبکہ لا گھٹتا ہے، وہ خاص صورت جس میں تفاعل مستقل رہتا ہے یعنی ما = ب، یکساں طور پر بدلنے والے تفاعلوں کی عام فہرست میں داخل کی جاسکتی ہے، اس میں تغیر کی شرح کو صفر سمجھنا چاہیئے یعنی ا = ۰

چونکہ ا لا + ب کی ترسیم خط مستقیم ہے جس کا ڈھال ا ہے (دفعہ ۲۲) اس لئے خط کا ڈھال اُس شرح کا ناپ ہے جس کے موافق تفاعل بلحاظ اپنی وجہ کے بدلتا ہے۔ یہ بات قابل غور ہے کہ اگر ترسیم بنانے میں معینوں کی اکائی اُسی طول کی نہو جس طول کی کہ فصلوں کی اکائی ہے تو شکل میں جو زاویہ بنیگا اُس کا مماس شرح ا کے مساوی نہیں ہوگا مثلاً اگر فصلوں کی اکائی ایک انچ ہو اور معینوں کی ۱۰ انچ تو فصلہ میں ۱ کا اضافہ واقع ہونے سے شکل میں ا کے مساوی تفاعل کا اضافہ ظاہر نہیں ہوگا بلکہ ۱۰ا کا اضافہ ظاہر ہوگا۔ اور اصلی ڈھال یا شرح شکل کے زاویہ کے مماس کو ۱۰ سے ضرب دینے سے حاصل ہوگی۔

۴۳۔ مقداروں کے ابعاد۔ سہولت کی خاطر عام طور پر بعض ایسے جملات استعمال ہوتے ہیں "مستطیل کا رقبہ اُس کے قاعدہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے"، "یکساں طور پر حرکت کرنے والے جسم کی رفتار، اُس فاصلہ کو جو کسی خاص وقت میں طے ہوا ہو، وقت پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے" یہ امور مساواتوں کی شکل میں یوں لکھے جاتے ہیں۔

رقبہ = قاعدہ × ارتفاع

$$رفتار = \frac{فاصلہ}{وقت}$$

اگر ان کو جبرو مقابلہ کے عام مفہوم کے مطابق مساواتیں تصور کیا جائے تو ان کی تعبیر یہ ہوگی کہ "رقبہ میں مربع فٹوں (یا مربع انچوں) کی تعداد قاعدہ اور ارتفاع میں سے ہر ایک میں خطی فٹوں (یا انچوں) کی تعداد کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے" اور "رفتار کی اکائیوں کی تعداد اُس خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے جو فاصلہ کی اکائیوں کی تعداد کو وقت کی اکائیوں کی تعداد پر تقسیم کرنے سے حاصل ہو"۔

لیکن ان مساواتوں کی تعبیر پر اور طرح سے بھی ہم غور کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ذیل کے حروفِ تہجی عددوں کو نہیں بلکہ مقداروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ ل اکائی طول کے خطِ مستقیم کو تعبیر کرتا ہے اور ت وقت کے اکائی وقفہ کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر خط ل پر کے مربع کو اکائی رقبہ مانا جائے اور اُس جسم کی رفتار کو جو یکساں طور پر وقت ت میں فاصلہ ل طے کرتا ہے رفتار کی اکائی تصور کیا جائے تو ان مساواتوں کو اکائی مقداروں کی رقوم میں اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے

$$اکائی\ رقبہ = ل \times ل،\quad اکائی\ رفتار = \frac{ل}{ت}$$

اور قوت نماؤں کے جبریہ قوانین کے مطابق ان علامتوں کو ملانے سے

$$اکائی\ رقبہ = ل^{2}،\quad اکائی\ رفتار = ل\,ت^{-1}$$

ان مساواتوں کو عام طور پر ابعادی مساواتیں کہتے ہیں اور ان میں قوت نما مقداروں کے ابعاد کو ظاہر کرتے ہیں، مثلاً پہلی مساوات سے یہ تعبیر ہوتا ہے کہ اکائی رقبہ میں ل کے دو بُعد ہوتے ہیں اور دوسری مساوات اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ رفتار کی اکائی ل میں ۱ بُعد اور ت میں -۱ بُعد رکھتی ہے۔ چونکہ سب رقبے اسی طرح کی مقداریں

ہیں جیسے اکائی رقبہ' اس لئے معلوم ہوا کہ رقبہ میں طول کے ۲ ابعاد ہوتے ہیں اور اس کا ضابطہ $ل^۲$ ہے۔

اسی طرح سے رفتار کا بُعدی ضابطہ $ل ت^{-۱}$ ہے۔

اب اگر م کمیت کی اکائی کو تعبیر کرے تو معیار حرکت کا بُعدی ضابطہ $م ل ت^{-۱}$ ہوگا کیونکہ معیار حرکت کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

ایسا ممکن ہے کہ بعض مقداروں کے بُعد صفر ہوں' مثلاً جب زاویہ کو نیم قطریوں میں ناپا جاتا ہے تو اس کا بُعد صفر ہوتا ہے کیونکہ نیم قطری زاویہ "قوس کو نیم قطر پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے اس لئے اس کا بُعدی ضابطہ $\frac{ل}{ل} = ل^{۰}$ ہے۔

ایسی ترقیم جس میں بُعدی ضابطے استعمال کئے جاتے ہیں بعض اوقات کام میں لائی جاتی ہے' مثلاً ۱۰ مربع فٹ کے رقبہ کو یوں لکھتے ہیں ۱۰ فٹ^۲ ' اسی طرح ۱۰ فٹ فی سکنڈ کی رفتار کو ۱۰ فٹ / سکنڈ بھی لکھا جاتا ہے' ۱۴ پونڈ فی مربع انچ کے دباؤ کو ۱۴ پونڈ / انچ^۲ کی شکل میں لکھا جاتا ہے وغیرہ وغیرہ' خاص لفظ "فی" جو شرح کو تعبیر کرتا ہے اُسے عمل تقسیم سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

جب کوئی تفاعل یکساں طور پر بدلے تو جو عدد اس کے تغیر کی شرح کو تعبیر کرتا ہے وہ وجہ کے اضافہ کی مقدار پر منحصر نہیں ہوتا اس لئے ہم وجہ کے اضافہ کی اکائی کو حسب خواہش منتخب کرسکتے ہیں۔ مثلاً ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی شئے کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے اگرچہ جسم کی حرکت ۵ منٹ سے زیادہ دیر تک جاری نہ رہے یا صرف ایک منٹ رہے یا اس سے بھی کم ' ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار ½ میل فی منٹ یا ۴۴ فٹ فی سکنڈ کی رفتار کے مساوی ہے۔ متغیر (غیر یکساں) تبدیلی پر بحث کرتے وقت یکساں

شرح کے اس پہلو کو مدنظر رکھنا ضروری ہے۔

نیز یہ کہنا کہ کسی جسم کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے یہ کہنے کے مترادف ہے کہ فاصلہ طے شدہ بلحاظ وقت کے شرح ۳۰ سے بدلتا ہے جبکہ یہ محذوف سمجھا جائے کہ فاصلہ کی اکائی میل ہے اور وقت کی گھنٹہ۔ بہت سی صورتوں میں موخرالذکر طرز بیان زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔

جب کسی مقدار کا ناپ کسی شرح تغیر سے تعبیر ہو تو ایسی مقدار کا بعدی ضابطہ تفاعل کے بعدی ضابطہ کو وجہ کے ضابطہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہو گا۔ مثلاً معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح بلحاظ وقت کے قوت کا ناپ ہے۔ پس قوت کا بعدی ضابطہ

م ل ت^{1} / ت یعنی م ل ت$^{-2}$ ہے۔

اس امر کا خیال رہے کہ ایک مقدار کا ناپ اکثر اوقات تعبیر ہو سکتا ہے کسی دوسری مقدار کی تبدیلی کی شرح سے جو کسی تیسری مقدار کے لحاظ سے بدلتی ہو۔ مقادیر کے ایسے ارتباطات کی وجہ سے ہی علم احصا کو ان کے عددی روابط کی تحقیقات کے لئے استعمال کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسی سب تعبیروں میں ابعاد کا نظریہ بہت کام آتا ہے۔ اس نظریہ پر تفصیلی بحث کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ مندرجہ ذیل کتب کا مطالعہ کرے:-

اوربیٹ کی اکائیاں اور طبیعی مستقلات، گرے کی مطلق پیمائشیں برق اور علم مقناطیس میں، بیکلین کی طبیعی اکائیاں۔

۳۵۔ متغیر شرحیں۔ اب تک ہم نے صرف یکساں طور پر بدلنے والے تفاعلوں پر بحث کی ہے، لیکن اکثر اوقات ایسا ہوتا ہے کہ تفاعل کا اضافہ وجہ کے متناظر اضافہ کے ساتھ مستقل نسبت نہیں رکھتا یا دوسرے لفظوں میں وجہ کے دو مساوی اضافوں کے جواب میں تفاعل کے ہمیشہ دو مساوی اضافے حاصل نہیں

ہوتے۔ اس صورت کو یوں بیان کرتے ہیں کہ تفاعل بلحاظ اپنی وجہ کے یکساں طور پر نہیں بدلتا یعنی متغیر شرح کے موافق بدلتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = ۳\,\text{لا}^2$ اس میں جبکہ لا کی قیمت لا_1 سے $\text{لا}_1 + \text{ھ}$ ہو جاتی ہے تو فرض کرو کہ ما کی قیمت ما_1 سے $\text{ما}_1 + \text{ک}$ ہو جاتی ہے اور جب لا کی قیمت لا_2 سے بدلکر $\text{لا}_2 + \text{ھ}$ ہوتی ہے تو ما کی قیمت ما_2 سے $\text{ما}_2 + \text{ک}'$ ہو جاتی ہے۔ تب

$$\text{ما}_1 = ۳\,\text{لا}_1^2،\quad \text{ما}_1 + \text{ک} = ۳\,(\text{لا}_1 + \text{ھ})^2،\quad \text{ک} = ۶\,\text{لا}_1\,\text{ھ} + ۳\,\text{ھ}^2$$

اسلئے $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}} = ۶\,\text{لا}_1 + ۳\,\text{ھ}$ اور اسی طرح سے $\frac{\text{ک}'}{\text{ھ}} = ۶\,\text{لا}_2 + ۳\,\text{ھ}$

لہذا دو نسبتیں $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ اور $\frac{\text{ک}'}{\text{ھ}}$ غیر مساوی ہیں یعنی ما بلحاظ لا کے یکساں طور پر نہیں بدلتا۔

اس صورت میں نسبت $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$، ھ اور لا_1 دونوں پر منحصر ہے، برعکس اس کے یکساں طور پر بدلنے والے تفاعل کی مابہ الامتیاز خصوصیت یہ ہے کہ نسبت $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ کی قیمت نہ تو ھ پر اور نہ لا کی قیمت لا_1 پر جہاں سے اضافہ محسوب کیا جاتا ہے منحصر ہوتی ہے۔ اس صورت میں وہ عدد معلوم کرنیکے لئے جس کو متغیر شرح کا ناپ قرار دیا جائے ہم یہ طریقہ اختیار کرتے ہیں۔

۳۶۔ اوسط شرح۔ پہلے ہم اوسط شرح کی تعریف کرتے ہیں ایسے:۔ تفاعل کے بدلنے کی اوسط شرح بلحاظ اپنی دلیل یا وجہ کے وہ یکساں شرح ہے جس کے موافق وجہ کے اضافہ ھ کے جواب میں تفاعل کا جو اضافہ حاصل ہو وہ وہی ہو جو فی الحقیقت تفاعل کا اضافہ ہے

اس سے ظاہر ہے کہ اوسط شرح $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ ہے، دفعہ گذشتہ

کی مثال میں، وہ اوسط شرح جس کے موافق ما بلحاظ لا کے بدلتا ہے جبکہ موخر الذکر لا۱ سے بدلکر لا۱ + ھ ہو جائے $\frac{ک}{ھ}$ = ۶ لا۱ + ۳ ھ ہے اور جس اوسط شرح سے ما بلحاظ لا کے بدلتا ہے جبکہ لا، لا۲ سے بدلکر لا۲ + ھ ہو جائے۔

$$\frac{ک}{ھ} = ۶\,لا_{۲} + ۳\,ھ$$

ہے پس اوسط شرح لا اور ھ دونوں پر منحصر ہوتی ہے۔

جب وجہ لا۱ سے لا۱ + ھ تک بدلے تو طبعی طور سے ہم دیکھتے ہیں کہ جتنا چھوٹا ھ ہوگا اتنا ہی زیادہ صحت سے اوسط شرح لا۱ پر تفاعل کے بدلنے کی حقیقی شرح کو تعبیر کرے گی۔ لیکن جتنا ھ کو بتدریج کم کیا جاتا ہے اتنا ہی اوسط شرح ۶ لا۱ + ۳ ھ خاص عدد ۶ لا۱ کے زیادہ قریب آتی جاتی ہے، اوسط شرح کبھی ٹھیک طور پر ۶ لا۱ کے مساوی نہیں ہوتی کیونکہ لا کو بالکل صفر کے مساوی فرض کرنا بے معنی ہے، گویا ایسی صورت میں ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ لا، لا۱ سے بالکل نہیں بدلتا اور جب لا بدلتا ہی نہیں تو شرح تبدیلی کا کیا ذکر ہونا چاہیئے بخلاف اسکے ھ خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو بشرطیکہ مطلق صفر نہ ہو تو ہم خارج قسمت $\frac{ک}{ھ}$ محسوب کر سکتے ہیں اور اسکی بنا پر اس چھوٹے اضافہ کے جواب میں اوسط شرح معلوم کر سکتے ہیں۔

پس ہم ھ کو اتنا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں (بشرطیکہ بالکل صفر فرض نہ کریں) کہ ۶ لا۱ + ۳ ھ اور ۶ لا۱ کا فرق یعنی ۳ ھ کسی چھوٹی سے چھوٹی کسر سے بھی جس کا ہم نام لے سکیں چھوٹا ہو بشرطیکہ یہ کسر بالکل صفر کے مساوی نہ ہو۔ مثلاً فرق ۰۰۱ء سے کم ہوگا اگر ھ تعداد اً کم ہو ۰۰۱ء کی ایک تہائی سے یعنی ۰۰۰۳ء سے۔

پس طبعی طور پر ہم یہ خیال کرنے پر مجبور ہیں کہ ۶ لا اُس شرح کا ناپ ہے جس کے موافق ۳ لا^{۲} بلحاظ لا کے بدلتا ہے جبکہ لا، اپنی قیمت لا$_{۱}$ سے بڑھتا یا گھٹتا ہے۔ اس لئے ہم بطور تعریف کے مان لیتے ہیں کہ جس شرح سے '۳ لا^{۲}' بلحاظ اپنی وجہ کے لا کی قیمت لا$_{۱}$ پر بدلتا ہے وہ ۶ لا$_{۱}$ ہے۔

اسی طرح ۶ لا$_{۲}$ از روئے تعریف لا کی قیمت لا$_{۲}$ کے جواب میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح ہوگی اور بالعموم دلیل کی کسی قیمت ا کے جواب میں شرح تبدیلی ۶ ا ہوگی کیونکہ جو استدلال اوپر کیا گیا ہے وہ لا کی کسی خاص قیمت صرف لا$_{۱}$ پر ہی موقوف نہیں بلکہ لا کی ہر قیمت پر صادق آتا ہے۔

جب، لا کی قیمتیں ۰، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$، ۱، $\frac{۳}{۲}$، ۲ ...... ہوں

تو شرح بالترتیب ۰، $\frac{۳}{۲}$، ۳، $\frac{۹}{۲}$، ۶، ۹، ۱۲، ..... کے مساوی ہوتی ہے۔ مثلاً لا کی قیمت $\frac{۱}{۲}$ کے لئے تفاعل کی جو شرح تبدل ہے اس سے دگنی سرعت کے ساتھ تفاعل بدلتا ہے جبکہ لا کی قیمت ایک ہو اور تگنی سرعت کے ساتھ جبکہ لا کی قیمت $\frac{۳}{۲}$ ہو اور چوگنی سرعت کے ساتھ جبکہ لا کی قیمت ۲ ہو، طالب علم کو چاہئے کہ اِن بیانات کا مقابلہ اُن معلومات کے ساتھ کرے جو ۳ لا^{۲} کی ترسیم کے مشاہدہ سے حاصل ہوتے ہیں۔

جب، لا مثبت ہو تو شرح مثبت ہوتی ہے یعنی جب لا دائیں طرف کو حرکت کرتا ہے تو ترسیم کا نقطہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے، برعکس اس کے اگر لا منفی ہو تو شرح بھی منفی ہوتی

ہے یعنی اگر نقطہ لا دائیں طرف حرکت کرے تو ترسیمی نقطہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ کسی متغیر شرح کے بیان کرنے میں یہ جملہ وجہ کی قیمت لا کے لئے" ہمیشہ استعمال ہوتا ہے، اس کا استعمال ضروری ہے کیونکہ بخلاف یکساں طور پر بدلنے والے تفاعل کے، شرح اس صورت میں لا کی مختلف قیمتوں کے لئے مختلف ہے۔ اگر ایک متحرک نقطہ کا فاصلہ طے کردہ س فٹ، ت سکنڈوں میں ۳ ت۲ کے مساوی ہو تو جس شرح کے موافق س بلحاظ ت کے بدلتا ہے وہ ابتدائے حرکت سے ت سکنڈ کے بعد ۶ ت ہو گی یعنی وقت ت پر رفتار ۶ ت فٹ فی ثانیہ ہو گی۔

۷۳ ۔ متغیر شرح کا ناپ۔ متغیر شرح کے معلوم کرنے کا جو طریقہ اوپر مذکور ہوا وہ نہایت ضروری ہے اور طالب علم کو اس امر کا اطمینان کرلینا چاہئے کہ وہ اصول جس پر اس کی تعریف مبنی ہے اُس کے اچھی طرح ذہن نشین ہو گیا ہے۔ طریقہ مذکور تین اجزا پر مبنی ہے

(۱) پہلے ہم اوسط شرح $\frac{ک}{ھ}$ معلوم کرتے ہیں، عدد $\frac{ک}{ھ}$، لا اور ھ دونوں پر منحصر ہے۔

(۲) ہم مان لیتے ہیں کہ شرح تغیر کے متعلق ہمارے تخیل کے یہ عین مطابق ہے کہ ھ جتنا چھوٹا ہو گا اتنا ہی خارج قسمت اُس شرح کو زیادہ صحیح طور پر تعبیر کرے گا جس کے موافق تفاعل بدلتا ہے جب کہ اس کی وجہ کی قیمت لا سے بدل کر لا+ھ ہو جاتی ہے۔ عام طور پر ایسا ہوتا ہے کہ ھ کو جتنا چھوٹا کیا جائے خارج قسمت $\frac{ک}{ھ}$ کی قیمت اتنی ہی ایک خاص عدد کے قریب

آتی جاتی ہے، ھ کو بالکل صفر کے مساوی فرض نہیں کر سکتے لیکن بالعموم ھ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں کہ ک/ھ اور ایک خاص عدد کا فرق کسی چھوٹی سے چھوٹی کسر سے جس کو ہم مقرر کر سکیں اور جو مطلق صفر نہ ہو چھوٹا ہو اور ھ کی اور چھوٹی قیمتوں کے لئے کسر مذکور سے چھوٹا رہے۔ یہ عدد لا پر منحصر ہوگا۔

(۴) بعد ازیں بطور تعریف کے ہم یہ مان لیتے ہیں کہ یہ عدد اُس شرح کو تعبیر کرتا ہے جس کے موافق تفاعل بلحاظ اپنی وجہ کے وجہ کی قیمت لا پر بدلتا ہے۔

کلادن جیسے پرانے دقیقہ سنج ریاضی داں کم یا زیادہ شرح سے بدلنے کے متعلق چند تعریفات اور علوم متعارفہ سے شروع ہو کر یہ ثابت کرتے تھے کہ ۶ لا اصلی اور سچا ناپ" ہے اُس شرح کا جس کے موافق ۳ لا۲ بلحاظ لا کے لا کی ایک خاص قیمت لا پر بدلتا ہے، لیکن جس سلک استدلال پر ہم نے شرح کی تعریف کی بنا رکھی ہے وہ اُس کی درستی کے لئے کافی معلوم ہوتی ہے۔

اگر زیر بحث قیمتیں پیمائش سے معلوم کی جائیں تو ھ کی چھٹائی کا معیار بہت جلد آجائے گا جس کے بعد ۶ لا اور ۶ لا + ۳ ھ میں تمیز کرنا مشکل ہوگا، اس طرح پر جو ھ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ملیگی اور اسکے مماثل جو اوسط شرح متعین ہوگی وہ اُس شرح کے بالکل مطابق ہوگی جو ہمارے مذکورہ بالا عمل اور تعریف سے حاصل ہوتی

مشق ۱۔ اگر ف = ۱/۲ ج ت۲ تو وہ شرح معلوم کرو جس سے ف بلحاظ ت کے بدلتا ہے جبکہ ت کی قیمتیں ۰، ۱/۲، ۱، ۲ ہوں

مشق ۲۔ اگر د = ۱/ح تو وہ شرح معلوم کرو جس سے د بلحاظ ح کے بدلتا ہے جبکہ ح = ح

۲۸ - انتہائیں ۔ بادی النظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ شرح ۶ لا_1 اوسط شرح ۶ لا_1 + ۳ ھ میں محض ھ کو صفر رکھنے سے حاصل ہوسکتی ہے، لیکن دراصل ایسا کہنا جائز نہیں کیونکہ مساوات

$$\frac{\text{ک}}{\text{ھ}} = ۶\,\text{لا}_1 + ۳\,\text{ھ}$$

صرف اس مفروض کی بنا پر قائم کی جاسکتی ہے کہ ھ صفر نہیں ہے اور الجبرا میں تقسیم کے قواعد کو ثابت کرنے میں وہ صورت جس میں مقسوم علیہ صفر ہو بالتصریح خارج کردی گئی ہے۔ علاوہ اس کے اگر ھ = ۔ تو ک بھی صفر ہوگا اور خارج قسمت $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ کی شکل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہوگی جس کے مطلق کوئی معنی نہیں۔ قیمت لا_1 پر ۶ لا_1 کو تبدیلی کی شرح خیال کرنے کی عام فہم وجہ یہ ہے کہ ھ کو بتدریج چھوٹا لیتے جانے سے اوسط شرح $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ ایک خاص عدد ۶ لا_1 کے قریب آتی جاتی ہے [اس تقرب کے لئے دفعہ ۳۲ کی مثالوں ۴، ۵، ۶ میں $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی قیمتیں ملاحظہ ہوں]

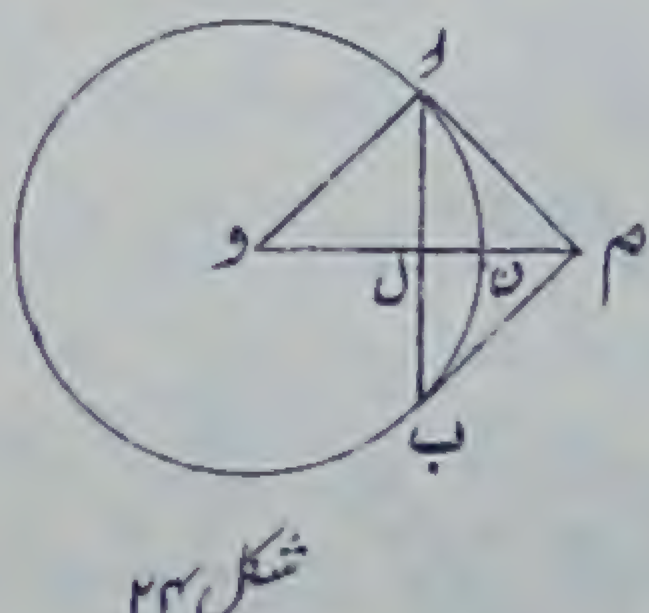
ریاضی کی زبان میں اس عدد کی تعیین کو جس کی طرف خارج قسمت $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ کی قیمت رجوع کرتی ہے خارج قسمت $\frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ کی انتہا معلوم کرنا کہتے ہیں جبکہ ھ کی قیمت انتہا میں صفر ہو جائے، اس عمل میں ھ ایک متغیر ہے جو منفی یا مثبت ہو سکتا ہے اور سوائے صفر کے اس کی کچھ ہی قیمت ہو سکتی ہے۔ یا یوں کہئے کہ صفر ایک ایسی حد ہے جس کے قریب عدد مذکور آتا جاتا ہے مگر اس تک کبھی نہیں پہنچتا۔

انتہا کی باضابطہ تعریف درج کرنے سے پہلے ہم نمونہ کے طور پر چند مثالوں پر غور کرینگے۔ احتیاط کے ساتھ ان کا مطالعہ کرنے سے اس لفظ کی ضرورت طالب علم کے ذہن نشین ہو جائیگی اور نیز اس کے معنی ایک حدتک سمجھ میں آجائیں گے۔

۳۹۔ انتہاؤں کی مثالیں۔ فرض کرو کہ اب (شکل ۲۴) ایک دائرہ کا وتر ہے جس کا مرکز و ہے، ام، ب م نقاط ا اور ب پر اس کے مماس ہیں، فرض کرو کہ وم وتر اب کو ل پر اور قوس اب کو ن پر قطع کرتا ہے، ل اور ن بالترتیب وتر اور قوس کے وسطی نقطے ہوں گے اور ول، اب پر عمود ہوگا مثلث ول ا اور وام متساوی الزوایا ہیں، اس لئے

$$\frac{\text{ل ا}}{\text{ا م}} = \frac{\text{و ل}}{\text{و ا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب فرض کرو کہ وتر اب، ن کی طرف حرکت کرتا ہے جبکہ نقطہ ن ثابت رہتا ہے اور اب ہمیشہ ون پر عمود رہتا ہے، نیز فرض کرو کہ ا اور ب ہمیشہ وتر کے سروں کو تعبیر کرتے ہیں، ل اس وتر کا وسطی نقطہ ہے اور م وہ نقطہ ہے جہاں ا اور ب پر کے مماس ملتے ہیں، جب تک ا اور ب ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو جاتے یعنی جب تک اب وتر رہتا ہے مساوات (۱) درست رہتی



شکل ۲۴

ہے۔ نسبت $\frac{\text{ل ا}}{\text{ا م}}$، ول کا تفاعل ہے کیونکہ جونہی

ول ثابت ہو جاتا ہے شکل کا ہر ایک خط ثابت ہو جاتا ہے اور نسبت مذکور محسوب ہو سکتی ہے۔ جب ول، ون کے مساوی ہونے کے عین قریب ہوتا ہے تو ل ا اور ا م دونوں صفر ہونے کے عین قریب ہوتے ہیں، اس وقت نسبت $\frac{ل\ ا}{ا\ م}$ ایک کے مساوی ہونے کے عین قریب ہوتی ہے کیونکہ مساوات (۱) درست رہتی ہے اور اسمیں ول، ون یا وا کے مساوی ہونے کے عین قریب ہوتا ہے۔ صریحاً ل، ن کے جتنا قریب آتا جاتا ہے اتنا ہی نسبت $\frac{ل\ ا}{ا\ م}$ کی قیمت ایک کے زیادہ قریب آتی جاتی ہے۔

نسبت $\frac{ل\ ا}{ا\ م}$ کی قیمت کے اس رویّہ کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کیا جاتا ہے "جب، ول، ون کے قریب آتا ہے بطور اپنی انتہا کے تو نسبت $\frac{ل\ ا}{ا\ م}$ ایک کے قریب آتی ہے بطور انتہا کے۔

یہاں بھی حسب سابق یہ دیکھ لینا چاہئے کہ یہ استدلال قائم نہیں رہتا جبکہ ول، ون کے بالکل مساوی ہو جائے کیونکہ اس صورت میں مثلث معدوم ہو جائیں گے اور مساوات (۱) جس پر سب استدلال مبنی ہے قائم نہیں کی جاسکیگی۔

ہم نسبت زیر بحث کو ول کی بجائے زاویہ ن وا کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں، اگر زاویہ ن وا انتہائی طور پر صفر کے قریب آجائے تو نسبت مذکور انتہائی طور پر ایک کے قریب آجائیگی۔

(۲) فرض کرو کہ اب (شکل ۲۴) ن اضلاع کے ایک منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ہے جو دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے، یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ن اضلاع کے ایک ایسے منتظم کثیر الاضلاع کا ایک

ضلع جو دائرہ کے باہر بنایا جائے ا ص + ب ص یعنی ۲ ا ص کے مساوی ہوگا اور زاویہ ن و ا، $\frac{۱۸۰}{ن_۱}$ درجوں کے مساوی ہوگا۔

اگر $ح_۱$ اور $ح_۲$ بالترتیب اندرونی کثیر الاضلاع اور بیرونی کثیر الاضلاع کے محیطوں کو تعبیر کریں تو $ح_۱ = ن_۱ \times ا\,ب = ۲\,ن_۱ \times ل\,ا$ اور

$$ح_۲ = ۲\,ن_۱ \times ا\,ص$$

اور $\frac{ح_۱}{ح_۲} = \frac{ل\,ا}{ا\,ص} = \frac{و\,ل}{و\,ا} = ۱ - \frac{ل\,ن}{و\,ا}$ .... (۲)

اب فرض کرو کہ ان کثیر الاضلاعوں کی تعداد اضلاع $ن_۱$ بڑھائی جاتی ہے، جب $ن_۱$ بہت بڑا ہو جائے گا تو زاویہ ن و ا بہت چھوٹا ہو جائے گا، نیز ا ب اور ل ن بھی بہت چھوٹے ہو جائینگے۔ اس لئے نسبت $\frac{ح_۱}{ح_۲}$ تقریباً ایک ہو جائیگی۔ پس جب زاویہ ن و ا اپنی انتہا صفر کے قریب آجائیگا تو نسبت $\frac{ح_۱}{ح_۲}$ انتہا میں ایک کے قریب آ جائے گی یا یوں کہئے کہ جب $ن_۱$ لا انتہا بڑا ہو گا تو $\frac{ح_۱}{ح_۲}$ کی انتہا ایک ہو گی۔

ہم $ح_۱$ اور $ح_۲$ کے ربط کو مختلف صورت میں بھی لکھ سکتے ہیں، مساوات (۲) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$ح_۲ - ح_۱ = \frac{ل\,ن}{و\,ا} \times ح_۲$$

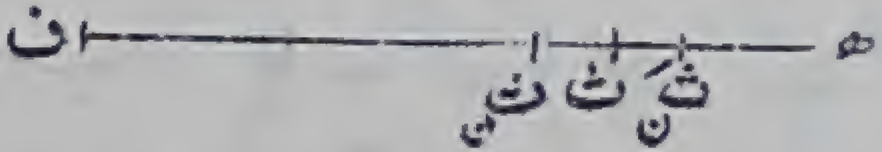
جب $ن_۱$، ۴ سے بڑا ہو تو $ح_۲$ بیرونی مربع کے محیط سے کم ہوگا یعنی ۸ × و ا سے کم ہوگا، اس لئے

$$ح_۲ - ح_۱ < ۸\,ل\,ن$$

اب فرض کرو کہ سہ کوئی خطِ مستقیم ہے جو اتنا چھوٹا ہے جتنا کہ ہم چاہیں مگر مطلق صفر نہیں ہے۔ شکل کے ہندسہ سے ظاہر ہے کہ ہم ن کو اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ ل ن کسی دئے ہوئے خط سے چھوٹا ہو۔ اب ن کو اتنا بڑا لو کہ ل ن چھوٹا ہو جائے سہ/۸ سے، تب ن کی اس قیمت کے لئے اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے ۸ × ل ن، سہ سے چھوٹا ہوگا اسلئے ح۱ - ح۲ چھوٹا ہوگا سہ سے۔

یہاں آ کے انتہا کا تخیل پیدا ہوتا ہے، خواہ ن کتنا ہی بڑا ہو ح۱ اور ح۲ کبھی ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے لیکن جب ن بڑھتے بڑھتے کل حدود سے بڑھ جائیگا تو فرق ح۱ - ح۲ انتہا میں صفر ہو جائیگا یعنی ح۱ اور ح۲ دونوں ایک ہی انتہا کی طرف متقارب ہوں گے۔

شکل ۲۵ کے خط مستقیم ف ھ پر ف ثن اور ف ثَن قطع کرو جو بالترتیب محیطوں ح۱ اور ح۲ کے مساوی ہوں، تب ظاہر ہے کہ



شکل ۲۵

ن کی ہر قیمت کے لئے ف ثن کم ہوگا ف ثَن سے، لیکن جب ن کی قیمت حسب سابق منتخب کی جائے تو

ثن ثَن = ح۱ - ح۲ < سہ

اس لئے ن اتنا بڑا لیا جاسکتا ہے کہ ثن ثَن کم ہو خط سہ سے، اس لئے ح۱ اور ح۲ دونوں کی انتہا خط ف ث ہوگی جو ف ثن جیسے سب خطوط سے بڑی ہوگی اور ف ثَن جیسے

خطوط سے چھوٹی ہوگی۔

چونکہ دائرہ کا محیط ط ہمیشہ ح اور ح کے درمیان واقع ہوتا ہے اسلئے محیط خط ث ث کے مساوی ہوگا۔ پس ہم محیط دائرہ کو دائرہ کے اندر یا باہر بنے ہوئے منتظم کثیر الاضلاعوں کی انتہا تصور کرسکتے ہیں جبکہ ان کی تعداد اضلاع کو لاانتہا بڑھا دیا جائے۔

(۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا رقبہ اندر یا باہر بنے ہوئے ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاع کے رقبہ کی انتہا کے مساوی تصور ہو سکتا ہے اور دائرہ کی قوس اُن ن مساوی وتروں کے مجموعہ کی انتہا تصور ہو سکتی ہے جو قوس مذکور کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کر کے نقاطِ تقسیم کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔

اوپر ہم نے کثیر الاضلاعوں کو منتظم فرض کیا ہے لیکن اگر یہ منتظم نہ ہوں تو بھی متذکرہ بالا مسئلوں کو ثابت کرنا مشکل نہیں ہے بشرطیکہ جب ن لاانتہا بڑھ جائے تو کثیر الاضلاعوں کے ہر ایک ضلع کے طول کی انتہا صفر ہو جائے۔

(۴) فرض کرو کہ زاویہ ن و ا میں نیم قطریوں کی تعداد طہ ہے جہاں زاویہ ن و ا حادہ ہے، تب

وتر اب < قوس اب < ام + ب م

اور اس لئے ل ا < قوس ن ا < ام

اس لئے (ل ا)/(و ا) < (قوس ن ا)/(و ا) < (ا م)/(و ا)

یعنی جیب طہ < طہ < مس طہ

جیب طہ پر تقسیم کرنے سے

۱ < (طہ)/(جیب طہ) < ۱/(جم طہ)

۱ > (جیب طہ)/(طہ) > جم طہ

پس $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ ایک اور جم ط کے درمیان واقع ہوتا ہے، جب زاویہ ط انتہا میں صفر ہو جائے تو جم ط کی انتہا ایک ہوتی ہے، اس لئے $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی انتہا بھی ایک ہوگی۔

انتہا کے تخیل سے یا آخرالذکر لہ تساوی سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس مفہوم کو کہ "$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ انتہا میں ایک کے قریب آتا ہے جبکہ ط اپنی انتہا صفر کے قریب آئے" ذیل کے کلمات سے بھی ظاہر کرسکتے ہیں اگر ط کوئی چھوٹا عدد ہو تو جب ط تقریباً ط کے مساوی ہوتا ہے، طالب علم کو اس بیان کی تصدیق جدولوں سے کرنی چاہئے مثلاً جب زاویہ ن و ر = ١°

تو ط = ٠٫٠١٧٤٥٣٣ اور جب ط = ٠٫٠١٧٤٥٢٤

جب زاویہ ن و ا = ٥°

تو ط = ٠٫٠٨٧٢٦٦٥ اور جب ط = ٠٫٠٨٧١٥٥٧

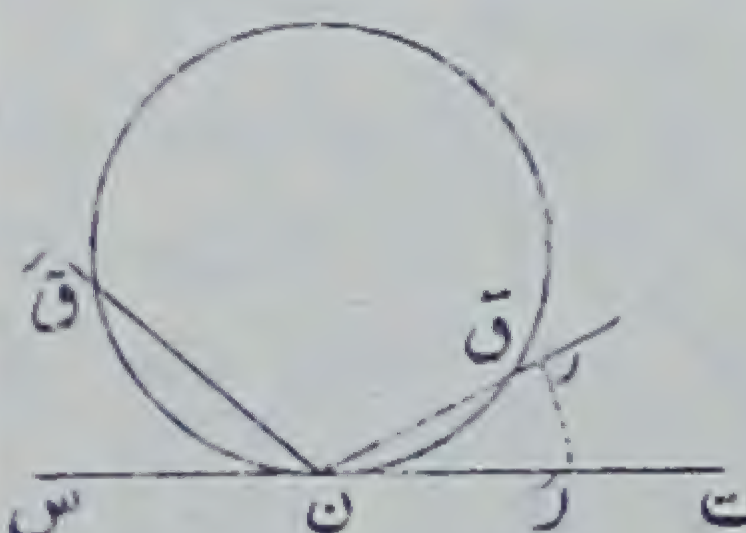
(٥) ثابت کرو کہ $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہا جبکہ ط اپنی انتہا صفر کے قریب آئے ١ ہوتی ہے۔

(٦) بشرطیکہ لا، ا کے مساوی نہ ہو $\frac{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{لا} + \text{ا}$

یہ مساوات درست رہتی ہے تاوقتیکہ لا، ا کے مساوی نہ ہو۔ اگرچہ ہم لا کو ا کے عین مساوی نہیں لے سکتے "لیکن ہم لا کو ا سے اتنا قریب لے سکتے ہیں کہ لا + ا اور ٢ ا کا فرق اتنا کم ہو جتنا ہم چاہیں" یعنی ہم لا کو ا کے کافی قریب لینے سے خارج قسمت کو ٢ ا کے اتنا قریب لا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔

اس لئے اگرچہ لا کے ا کے مساوی ہونے کی صورت میں خارج قسمت کے کوئی معنی اور کوئی قیمت نہیں ہوتی، لیکن لا کے انتہا میں ا کے قریب آنے سے اس (خارج قسمت) کی ایک محدود انتہا ۲ ا ہوتی ہے۔

(۷) فرض کرو کہ س ن ت (شکل ۲۶) دائرہ کے ایک نقطہ ن پر کا مماس ہے، ن ق کوئی قاطع ہے اور اس پر ایک خاص طول ن ر لیا گیا ہے، مرکز ن اور نصف قطر ن ر سے ایک دائرہ کھینچو جو ن ت سے ر پر ملے



شکل ۲۶

اب فرض کرو کہ ق قوس ن ق' پر ن کی طرف حرکت کرتا ہے، اس وجہ سے ر قوس ر ر پر ر کی طرف حرکت کریگا اور ر، ر کے جتنا قریب آتا جائے گا اتنا ہی زاویہ ت ن ر چھوٹا ہوتا جائے گا۔ اگر ہم یہ فرض کریں کہ ق انتہائی صورت میں ن کے نہایت قریب آجاتا ہے تو قاطع ن ر انتہائی صورت میں مماس ن ت بن جائے گا۔ اگر قاطع ن کے دوسری طرف کھینچا جائے مثلاً ن ق' تو قاطع کا انتہائی مقام جب ق'، ن کے قریب آجائے ن س ہوگا۔ پس ہم مماس کی یہ تعریف کرتے ہیں۔

تعریف۔ کسی منحنی کے نقطہ ن پر کے مماس سے وتر ن ق کا انتہائی محل مراد ہوتا ہے جبکہ ق انتہا میں مقام ن پر آجائے۔
آئندہ کتاب ہذا میں مماس کی یہی تعریف استعمال کی جائے گی۔

(۸) مشق ۵ سوال ۱۰ کے مسئلہ سے ثابت کرو کہ اگر مرتب ک ل پر کوئی نقطہ ت ایسا ہو کہ زاویہ ن س ت قائمہ ہو تو خط

ن تـ نقطہ ن پر مخروطی کا مماس ہو گا۔

۱۰۴۔ انتہا کی عام تشریح۔ اب لفظ "انتہا" کے خاص معنی کچھ صاف ہو گئے ہوں گے۔ ہر مثال میں دو متغیر ہوتے ہیں، جن میں سے ایک دوسرے کا کوئی تفاعل ہوتا ہے۔ ان متغیروں میں سے ایک یعنی وجہ یا دلیل ایک محدود عدد کے مساوی ہونے کے عین قریب ہوتا ہے مثلاً ا کے، صفر کے یا و ن کے، یا ایسا فرض کرتے ہیں کہ یہ تمام محدود مقداروں سے بڑھ جاتا ہے، اول الذکر صورت میں محدود عدد کو وجہ کی انتہا کہتے ہیں، یہ کوئی ایسی قیمت نہیں ہے جو وجہ فی الواقع اختیار کرتی ہے، مثلاً (۴) میں طہ کی قیمت فی الواقع صفر کبھی نہیں ہوتی۔ موخرالذکر صورت میں وجہ کی انتہا گویا لا انتہا ہوتی ہے، اگرچہ انتہا کا لا انتہا ہونا متضاد رقوم کا اجتماع ہے، تاہم اس سے مراد یہ ہے کہ اس صورت میں وجہ ایک عدد ع سے بڑی ہوتی ہے خواہ ع کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو۔

نیز جب دلیل اپنی انتہا کے قریب آتی ہے تو ساتھ ہی تفاعل بھی ایک محدود عدد کے قریب آجاتا ہے، صرف یہی نہیں بلکہ ہم دلیل اور اس کی انتہا کا باہمی فرق اتنا کم رکھ سکتے ہیں کہ تفاعل اور محدود عدد کا فرق ہر ایک مقررہ چھوٹے سے چھوٹے عدد سے کم ہو (بشرطیکہ یہ مقررہ عدد صفر مطلق نہ ہو)، اس محدود عدد کو تفاعل کی انتہا کہتے ہیں جبکہ دلیل اپنی انتہا کے قریب آجائے۔

اب ہم انتہا کی باضابطہ تعریف درج کریں گے، پہلی

تعریف قدرے عام فہم اور ناتراشیدہ ہے، دوسری البتہ زیادہ باریک اور صحیح ہے، لیکن ممکن ہے کہ مطالعہ اول میں اس کے ادراک میں قدرے دشواری ہو۔

۱۴۔ انتہا کی تعریف۔ ترقیم، انتہا اور قیمت میں فرق

تعریف ۱۔ جب کسی دئے ہوئے تفاعل کی دلیل یا وجہ کو ایک محدود عدد ا کے اس قدر قریب لانا ممکن ہو کہ تفاعل اور ایک محدود عدد ا کا فرق اتنا چھوٹا ہو سکے جتنا ہم چاہیں اور یہ فرق دلیل کو ا کے اور زیادہ قریب لانے سے اتنا چھوٹا رہ سکے جتنا ہم چاہیں تو ا کو تفاعل کی انتہا کہتے ہیں جبکہ دلیل اپنی انتہا ا کے قریب آئے۔

تعریف ۲۔ کوئی مثبت عدد سہ مقرر کرلیا گیا ہے، یہ اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں بشرطیکہ یہ مطلق صفر نہ ہو نیز ا اور ا دو معین عدد ہیں۔ اگر ایک ایسا مثبت عدد مہ معلوم کرنا ممکن ہو کہ دلیل کی اُن سب قیمتوں کیلئے جن کا تفاوت ا سے، کم ہو بہ نسبت مہ کے (قیمت ا مستثنیٰ ہے) تفاعل کا فرق ا سے ہمیشہ کم رہے بہ نسبت سہ کے تو ا کو تفاعل کی انتہا کہتے ہیں جبکہ دلیل اپنی انتہا ا کی طرف متقارب ہو۔

جب عدد ا یا ا لا انتہا بڑے ہوں تو تعریف میں مناسب تبدیلی کرنا کچھ مشکل نہیں۔ بالعموم ایک متغیر لا انتہا اُس وقت ہوتا ہے جبکہ یہ ایسی قیمتیں اختیار کرے جو کسی مثبت عدد ع سے تعداداً بڑی ہوں خواہ ع کتنا ہی بڑا ہو۔ اگر یہ متغیر مثبت ہو

تو یہ مائل بہ + ∞ ہو گا اور اگر یہ منفی ہو تو یہ مائل بہ - ∞ ہو گا۔ محدود عدد ا کو تفاعل کی انتہا کہیں گے جبکہ دلیل انتہا میں + ∞ کی طرف مائل ہو بشرطیکہ ایک مثبت عدد ع ایسا معلوم ہو سکے کہ دلیل کی اُن سب قیمتوں کے لئے جو ع سے بڑی ہوں تفاعل اور ا کا فرق اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔

انتہا کی ترقیم ہم نہا اختیار کریں گے، اس مفہوم کو ظاہر کرنے کے لئے کہ تفاعل اپنی انتہا ا کے قریب آجاتا ہے جبکہ اس کی دلیل اپنی انتہا ا_1 کے قریب آجائے ہم ذیل کی رموز استعمال کریں گے۔

$$\text{نہا ف (لا)} = \text{ا} \quad \text{جبکہ نہا لا} = \text{ا}_1$$

یا زیادہ عام طور پر $\underset{\text{لا} \to \text{ا}_1}{\text{نہا}}\ \text{ف (لا)} = \text{ا}$

یہ یاد رکھنا چاہئے کہ موخرالذکر ترقیم پہلی ترقیم کی مختصر صورت ہے اور ا_1، ا وہ قیمتیں نہیں ہیں جنہیں متغیر فی الواقع اختیار کرتے ہیں۔

اس ترقیم کی رو سے اگر زاویہ ن و ا = طہ اور و ا_1 = ل تو مثال ۱ دفعہ ۳۹ حسب ذیل شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\underset{\text{ول} \to \text{ا}_1}{\text{نہا}} \frac{\text{ل ا}}{\text{ا م}} = \text{۱} \quad \text{یا} \quad \underset{\text{طہ} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{ل ا}}{\text{ا م}} = \text{۱}$$

$$\text{مثال ۲۔} \quad \underset{\text{ن}_1 \to \infty}{\text{نہا}}\ \text{ح}_1 = \underset{\text{ن}_1 \to \infty}{\text{نہا}}\ \text{ح}_2 = \text{ط}$$

$$\text{مثال ۴، ۵} \quad \underset{\text{طہ} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = \text{۱}، \quad \underset{\text{طہ} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = \text{۱}$$

اگرچہ انتہا کے تخیل کو ریاضی میں شریک کرنے کی ضرورت اُن صورتوں پر غور کرنے سے پیدا ہوئی جن میں دلیل کو

کوئی خاص قیمت دینے سے تفاعل کے کچھ معنی نہیں رہتے لیکن تعریف کی رو سے اِس کا تخیل صرف ایسی صورتوں تک ہی محدود نہیں۔ خواہ لا کو ا کے مساوی رکھنے سے تفاعل کی کوئی معین قیمت نکلے یا نہ نکلے، تفاعل کی انتہا لا کو ا کے تقریباً مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یاد رہے کہ اس عمل میں لا کو ا کے مطلق طور پر مساوی نہیں لیا جاتا۔ بیشک یہ ممکن ہے کہ تفاعل کی انتہا ا، اس کی قیمت ف (ا) کے مساوی ہو تاہم خواہ ا اور ف (ا) باہم مساوی ہوں، پھر بھی یہ یاد رکھنا چاہئے کہ قیمت اور انتہا دو بالکل الگ طریقوں سے معلوم کی جاتی ہیں۔
ایسی مثالیں بعض اوقات پیش آتی ہیں جن میں انتہا ا اور قیمت ف (ا) دونوں معین ہوتی ہیں اور غیر مساوی۔

۲۴۔ انتہاؤں کے متعلق مسئلے۔ اب ہم انتہاؤں کے ساتھ عمل کرنے کے مشہور قاعدے درج کرتے ہیں۔ اِن سب مسئلوں میں تفاعلوں کی ایک ہی وجہ یا دلیل ہے اور سب تفاعلوں کی انتہائیں لا کو ا کے قریب لانے سے حاصل ہوتی ہیں نیز ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ سب انتہائیں محدود ہیں۔ اس کے بعد انتہا کے لئے صرف نہا لکھنا کافی ہوگا اور اس کے ساتھ "لا ← ا" نہیں لکھا جائے گا۔

تفاعلوں کی تعداد محدود فرض کی گئی ہے۔ اگر تعداد لامتناہی ہو تو ضروری نہیں کہ یہ مسائل درست رہیں۔

مسئلہ ۱۔ تفاعلوں کی کسی تعداد کے جبریہ مجموعہ کی انتہا اِن تفاعلوں کی انتہاؤں کے متناظر جبریہ مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

مسئلہ ۲۔ تفاعلوں کی کسی تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا ان تفاعلوں کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔

مسئلہ ۔ دو تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہا اِن تفاعلوں کی انتہاؤں

کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے، بشرطیکہ مقسوم علیہ کی انتہا صفر نہ ہو۔

ان مسئلوں کا ثبوت آسان ہے اور ان خاص صورتوں پر مبنی ہے کہ اگر متغیروں کی ایک محدود تعداد میں سے ہر ایک متغیر کی انتہا صفر ہو تو ان کے مجموعہ اور ان کے حاصل ضرب کی انتہا بھی صفر ہوگی۔ مثلاً فرض کرو کہ ھ، ھ، ھ تین متغیر ہیں جن میں سے ہر ایک کی انتہا صفر ہے، یہ ثابت کرنے کے لئے کہ مجموعہ کی انتہا صفر ہوگی ہمیں صرف یہ ثابت کرنا چاہئے کہ لا کو ا کے اتنا قریب لیا جاسکتا ہے کہ مجموعہ تعداداً کسی دئے ہوئے مثبت عدد سہ سے کم ہو۔ چونکہ ہر ایک متغیر کی انتہا صفر ہے اس لئے ہم لا کو ا کے اتنا قریب لے سکتے ہیں کہ ہر ایک متغیر $\frac{1}{3}$ سہ سے کم ہو، لہذا ہم لا کو ا کے اتنا قریب لے سکتے ہیں کہ متغیروں کا مجموعہ سہ سے کم ہو۔ جب متغیروں کی تعداد ن ہو تو بھی یہ استدلال قائم رہتا ہے، ہر ایک متغیر کو $\frac{سہ}{ن}$ سے کم بنایا جاسکتا ہے، متغیروں کے مثبت یا منفی ہونے سے یا مجموعہ میں منفی رقوم کے شامل ہونے سے کچھ اثر نہیں پڑتا کیونکہ ہمیں صرف عددی قیمت سے سروکار ہے۔ ظاہر ہے کہ حاصل ضرب کی انتہا بھی صفر ہوگی۔

نیز اگر ج کوئی محدود مستقل ہو تو ج ھ کی انتہا صفر ہوگی، ہمیں صرف لا کو ا کے اتنا قریب لینا چاہئے کہ ھ تعداداً $\frac{سہ}{ج}$ سے کم ہو۔

اب فرض کرو کہ ع، و، ی کوئی تفاعل ہیں لا کے، جن کی انتہائیں ع، و، ی ہیں، تب انتہا کی ماہیت کی رو سے جبکہ لا، ا کے تقریباً مساوی ہوتا ہے تو ع، و، ی تقریباً ع، و، ی کے مساوی ہوتے ہیں، پس ہم لکھ سکتے ہیں

ء = ع$_1$ + ھ$_1$ ، و = و$_1$ + ھ$_2$ ، ی = ی$_1$ + ھ$_3$

جہاں ھ$_1$، ھ$_2$، ھ$_3$ متغیر ہیں جن کی انتہائیں صفر ہیں۔

تب ء + و - ی = ع$_1$ + ھ$_1$ + و$_1$ + ھ$_2$ - ی$_1$ - ھ$_3$

= ع$_1$ + و$_1$ - ی$_1$ + ھ$_1$ + ھ$_2$ - ھ$_3$

پس چونکہ ھ$_1$، ھ$_2$، ھ$_3$ میں سے ہر ایک کی انتہا صفر ہے، اسلئے

نہا (ء + و - ی) = ع$_1$ + و$_1$ - ی$_1$

= نہا ء + نہا و - نہا ی

نیز ء و = (ع$_1$ + ھ$_1$) (و$_1$ + ھ$_2$)

= ع$_1$و$_1$ + ع$_1$ھ$_2$ + و$_1$ھ$_1$ + ھ$_1$ھ$_2$

اس لئے نہا (ء و) = ع$_1$ و$_1$ = (نہا ء) × (نہا و)

اسی طرح دو متغیروں کے حاصل ضرب کی صورت میں لانے سے

نہا (ء و ی) = نہا (ء و) × نہا ی

= نہا ء × نہا و × نہا ی

اور آخر میں ء/و = (ع$_1$ + ھ$_1$)/(و$_1$ + ھ$_2$) = ع$_1$/و$_1$ + ((ع$_1$ + ھ$_1$)/(و$_1$ + ھ$_2$) - ع$_1$/و$_1$)

یا ء/و = ع$_1$/و$_1$ + (و$_1$ھ$_1$ - ع$_1$ھ$_2$)/(و$_1$(و$_1$ + ھ$_2$))

مؤخر الذکر کسر کی انتہا صفر ہے کیونکہ اس کے شمار کنندہ کو اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، لیکن نسب نما صفر نہیں ہے کیونکہ معطیات کی رو سے و$_1$ صفر نہیں ہے

پس نہا ء/و = ع$_1$/و$_1$ = نہا ء / نہا و

ہم نے سہولت کی خاطر صرف تین تفاعل لئے ہیں، لیکن یہ استدلال قائم رہتا ہے خواہ تفاعلوں کی تعداد تین سے زیادہ ہو بشرطیکہ انتہائیں ع$_1$، و$_1$، ی$_1$، ......

سب محدود ہوں اور کسی نسب نما کی انتہا صفر نہ ہو۔
اگر ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل مستقل ہوں تو ظاہر ہے کہ استدلال اس صورت میں بھی قائم رہتا ہے مثلاً اگر ع مستقل ہو تو انتہا کے تخیل کے شرائط کو توڑنے کے بغیر ہم نہا ع کو ع کے مساوی خیال کر سکتے ہیں۔

۴۴۔ مثالیں۔ اب ہم چند مثالیں درج کرتے ہیں جن میں مذکورۂ بالا اصول کام آتے ہیں، انتہا معلوم کرنے میں یہ امر ملحوظ رکھنا چاہئے کہ ہم تفاعل کو ہر ایسے طریق پر تبدیل کر سکتے ہیں جس سے انتہا کے معلوم کرنے میں مدد ملے بشرطیکہ ایسی تبدیلی اس حالت میں جائز ہو جبکہ و اپنی انتہا کے مساوی نہ ہو۔

$$\frac{\sqrt{\text{لا}+1}-1}{\text{لا}}=\frac{\text{لا}+1-1}{\text{لا}\{\sqrt{\text{لا}+1}+1\}}=\frac{1}{\sqrt{\text{لا}+1}+1}$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو لا پر تقسیم کر دینا جائز ہے تاوقتیکہ لا صفر نہ ہو، لیکن لا ← ۰ کے لئے جملہ بالا کی انتہا معلوم کرنے میں لا عین صفر نہیں کیا جاتا، اس لئے لا کی کل زیر بحث قیمتوں کے لئے مندرجہ بالا کسور میں سے پہلی اور آخری کسور باہم مساوی ہونگی، اس لئے

$$\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\ \frac{\sqrt{\text{لا}+1}-1}{\text{لا}}=\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\ \frac{1}{\sqrt{\text{لا}+1}+1}=\frac{1}{2}$$

اسی طرح ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ

$$\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\sqrt{\text{لا}+1}-1}{\text{لا}}=\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{1}{\sqrt{\text{لا}+1}+1}=0$$

پہلی انتہا کا $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہونا کافی طور پر واضح ہے، دفعہ ۱۴ تعریف ۲ کی رو سے ایک ایسا عدد مہ معلوم ہوسکنا چاہئے کہ جب لا تعداداً مہ سے کم ہو تو تفاعل اور $\frac{1}{2}$ کا فرق ہر چھوٹے سے چھوٹے عدد مثلاً ۰۰۱، سے کم ہو سکے لیکن مہ کی تلاش بالعموم بہت دقت طلب ہوتی ہے اور جن آسان صورتوں سے ہمیں واسطہ پڑے گا اُن میں عام طور پر تحقیق کے اس حصہ کو ہم ترک کر دیں گے کیونکہ اعمال کی نوعیت سے ہی یہ واضح ہو جاتا ہے کہ ایسے عدد کا معلوم کر لینا ممکن ہے۔

مثال ۱۔ $\lim_{\text{ن}\to\infty}\left\{\frac{1}{\text{ن}^2}+\frac{2}{\text{ن}^2}+\frac{3}{\text{ن}^2}+\cdots+\frac{\text{ن}}{\text{ن}^2}\right\}=\frac{1}{2}$

کیونکہ حاصل جمع $=\frac{1+2+3+\cdots+\text{ن}}{\text{ن}^2}=\frac{\frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}+1)}{\text{ن}^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\text{ن}}$

اس مثال سے ظاہر ہے کہ دفعہ ۲۴ کا مسئلہ ۱ لازماً درست نہیں رہتا تاوقتیکہ کسروں کی تعداد محدود نہ ہو کیونکہ اگرچہ خطوطِ وحدانی کے اندر کی ہر ایک رقم کی انتہا صفر ہے، لیکن مجموعہ کی انتہا صفر نہیں ہے۔

مثال ۲۔ $\lim_{\text{ن}\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+\text{ن}^2}{\text{ن}^3}=\frac{1}{3}$

کیونکہ $1^2+2^2+3^2+\cdots+\text{ن}^2=\frac{1}{6}\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)$

اس لئے $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+\text{ن}^2}{\text{ن}^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\text{ن}}+\frac{1}{6\text{ن}^2}$

یعنی انتہا $\frac{1}{3}$ ہے۔

مثال ۳۔ اگر ر کوئی کسر واجب ہو اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو $\lim_{\text{ن}\to\infty}\text{ر}^{\text{ن}}=0$۔

کیونکہ ہر ایک مثبت کسر واجب $\frac{۱}{۱+\text{ر}}$ کی شکل کی ہوتی ہے جہاں ر کوئی مثبت صحیح عدد ہے، اب مسئلہ ثنائی سے یا کسی اور طرح سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ $(۱+\text{ر})^{\text{ن}} > ۱+\text{ن}\,\text{ر}$

اس لئے جہاں تک عددی قیمت کا تعلق ہے

$$\text{ل}^{\text{ن}} = \frac{۱}{(۱+\text{ر})^{\text{ن}}} < \frac{۱}{۱+\text{ن}\,\text{ر}}$$

اور چونکہ $\frac{۱}{۱+\text{ن}\,\text{ر}}$ کی انتہا جبکہ $\text{ن} \to \infty$ صفر ہوتی ہے

اس لئے $\text{ل}^{\text{ن}}$ کی انتہا بھی صفر ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ اگر ل کوئی کسر واجب ہو اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو

تو $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ن}\,\text{ل}^{\text{ن}} = ۰$، $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ن}^{۲}\,\text{ل}^{\text{ن}} = ۰$ وغیرہ

یہ اس لئے کہ $(۱+\text{ر})^{\text{ن}} > ۱+\text{ن}\,\text{ر}+\frac{۱}{۲}\text{ن}(\text{ن}-۱)\text{ر}^{۲}$

اس لئے $\text{ن}\,\text{ل}^{\text{ن}} < \frac{۱}{\frac{۱}{\text{ن}}+\text{ر}+\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)\text{ر}^{۲}}$ وغیرہ

مثال ۵۔ $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{۲\,\text{لا}^{۲}+۳\,\text{لا}-۱}{۳\,\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}+۱} = \frac{۲}{۳}$

کیونکہ کسر مذکورہ $= \frac{۲+\frac{۳}{\text{لا}}-\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}}{۳-\frac{۲}{\text{لا}}+\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}}$ اور شمار کنندہ نسب نما کی

انتہائیں بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں۔

مثال ۶ - $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{(\text{لا}+\text{ھ})^{۳}-\text{لا}^{۳}}{\text{ھ}} = ۳\,\text{لا}^{۲}$

کیونکہ $\dfrac{(\text{لا}+\text{ھ})^{۳}-\text{لا}^{۳}}{\text{ھ}} = ۳\,\text{لا}^{۲}+۳\,\text{لا}\,\text{ھ}+\text{ھ}^{۲}$

مثال ۷ - $\underset{\text{لا}\to -۱}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}+۴\,\text{لا}+۳}{\text{لا}^{۲}-۷\,\text{لا}-۸} = -\dfrac{۲}{۹}$

پہلے مشترک جزوِ ضربی لا + ۱ کو خارج کرو، اسی جزوِ ضربی کی موجودگی کی وجہ سے کسر کی قیمت لا کی قیمت -۱ کے لئے $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی شکل اختیار کرتی ہے۔

مثال ۸ - $\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}-۴}{\sqrt{\text{لا}+۲}-\sqrt{۳\,\text{لا}-۲}} = -۸$

مثال ۹ - $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{جب}\,۳\,\text{لا}}{\text{لا}} = ۳$

کیونکہ $\dfrac{\text{جب}\,۳\,\text{لا}}{\text{لا}} = \dfrac{\text{جب}\,۳\,\text{لا}}{۳\,\text{لا}} \times ۳$ اور $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{جب}\,۳\,\text{لا}}{۳\,\text{لا}} = ۱$

مثال ۱۰ - $\underset{\text{لا}\to \frac{\pi}{۲}}{\text{نہا}} \dfrac{\text{مم}\,\text{لا}}{\frac{\pi}{۲}-\text{لا}} = ۱$

$\text{لا} = \frac{\pi}{۲} - \text{ما}$ رکھنے سے ظاہر ہے کہ جب لا انتہا $\frac{\pi}{۲}$ کے قریب آجائے تو ما اپنی انتہا صفر کے قریب آجاتا ہے۔ اس لئے

$$\underset{\text{لا}\to \frac{\pi}{۲}}{\text{نہا}} \dfrac{\text{مم}\,\text{لا}}{\frac{\pi}{۲}-\text{لا}} = \underset{\text{ما}\to ۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{مس}\,\text{ما}}{\text{ما}} = ۱$$

متغیر کو بدلنے کی یہ حکمت عملی اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتی ہے، مثلاً

مثال ۱۱۔ $\text{نہا}_{\text{ه}\to 0} \frac{(\text{لا}+\text{ه})^{\frac{3}{2}} - \text{لا}^{\frac{3}{2}}}{\text{ه}} = \frac{3}{2}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}$

رکھو $\text{لا} = \text{ما}^2$ اور $\text{لا} + \text{ه} = (\text{ما} + \text{ک})^2$ ، پس جب ه صفر کے قریب آجاتا ہے تو ک بھی صفر کے قریب آجاتا ہے، اس لئے

$$\text{نہا}_{\text{ه}\to 0} \frac{(\text{لا}+\text{ه})^{\frac{3}{2}} - \text{لا}^{\frac{3}{2}}}{\text{ه}} = \text{نہا}_{\text{ک}\to 0} \frac{(\text{ما}+\text{ک})^3 - \text{ما}^3}{(\text{ما}+\text{ک})^2 - \text{ما}^2} = \text{نہا}_{\text{ک}\to 0} \frac{3\,\text{ما}^2\text{ک} + 3\,\text{ما}\text{ک}^2 + \text{ک}^3}{2\,\text{ما}\text{ک} + \text{ک}^2}$$

$$= \frac{3\,\text{ما}^2}{2\,\text{ما}} = \frac{3}{2}\,\text{ما} = \frac{3}{2}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۱۲۔ دو دائرے ہیں جن کے نصف قطر ا اور اَ ہیں اور محیط ط اور طَ ہیں، ان کے گرد ن اضلاع کے دو منتظم کثیر الاضلاع بنائے گئے ہیں جن کے محیط بالترتیب ح اور حَ ہیں، ثابت کرو کہ

ح : ا = حَ : اَ اور ط : ا = طَ : اَ

محیطِ دائرہ کو نصف قطر کے ساتھ جو مستقل نسبت ہوتی ہے اسے 2π سے تعبیر کیا جاتا ہے، π ایک غیر منطق عدد ہے جو تقریباً ۳٫۱۴۱۵۹ کے مساوی ہوتا ہے۔

مثال ۱۳۔ ثابت کرو کہ نصف قطر ا کے ایک دائرہ کا رقبہ $\pi\,\text{ا}^2$ ہوتا ہے اور طہ نیم قطری زاویہ والے ایک قطاع دائرہ کا رقبہ $\frac{1}{2}\,\text{طہ}\,\text{ا}^2$ ہوتا ہے۔

مثال ۱۴۔ اگر ایک قائم مستدیر اسطوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ا ہو اور ارتفاع ف ہو تو ثابت کرو کہ اس کا حجم $\pi\,\text{ا}^2\,\text{ف}$ ہوگا اور اس کی سطح منحنی کا رقبہ $2\pi\,\text{ا}\,\text{ف}$ ہوگا۔

مثال ۱۵۔ ایک مثلثی مخروطِ مضلع کے قاعدہ کا رقبہ ا، اور

ارتفاع ف ہے اور اس کے قاعدہ کے متوازی سطوح مستوی
کھینچنے سے اس کو ن ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن
میں سے ہر ایک کی اونچائی $\frac{ف}{ن}$ ہے، ثابت کرو کہ مخروطِ مضلع
کا حجم کم ہے

$$\frac{ف}{ن}\left\{ا + \frac{(ن-۱)^۲}{ن^۲}ا + \frac{(ن-۲)^۲}{ن^۲}ا + \cdots + \frac{۲^۲}{ن^۲}ا + \frac{۱^۲}{ن^۲}ا\right\}$$

سے اور زیادہ ہے

$$\frac{ف}{ن}\left\{\frac{(ن-۱)^۲}{ن^۲}ا + \frac{(ن-۲)^۲}{ن^۲}ا + \cdots + \frac{۲^۲}{ن^۲}ا + \frac{۱^۲}{ن^۲}ا\right\}$$ سے

اس سے مثال ۲ کی مدد سے ثابت کرو کہ حجم $\frac{۱}{۳}$ ف ا ہے، اس
نتیجہ کو کسی مخروطِ مضلع کے لئے وسعت دو۔

(فرض کرو کہ قاعدہ د ع ط ہے اور راس ل ہے، اُس
خطِ مستقیم میں سے جس پر مذکورہ بالا کوئی سطح مستوی
رُخ ل ع ط سے ملتی ہے ل د کے متوازی سطح مستوی کھینچو
جو ہمیں اوپر کی اور نچلی سطوح مستویہ سے ملے، اس طرح
مثلثی منشوروں کے دو جُٹ حاصل ہونگے جن میں سے ایک
جُٹ مخروطِ مضلع کے اندر ہوگا اور دوسرا ایسا ہوگا جس میں
خود مخروطِ مضلع شامل ہوگا۔ دونوں جٹوں کے حجم اوپر کے
دو مجموعے ہیں، اوپر کے جٹ کا بالاترین مخروطِ مضلع
راس میں سے قاعدہ کے متوازی سطح مستوی
کھینچنے سے حاصل ہوتا ہے)

مثال ۱۶۔ مستدیر مخروط کو ایک ایسے مخروط مضلع کی انتہائی
صورت تصور کرنے سے جس کا راس وہی ہو جو مخروط مستدیر کا ہے
اور جس کا قاعدہ مخروط مستدیر کے قاعدہ کے گرد اندر یا باہر بنا ہوا ہے
ن اضلاع کا منتظم کثیر الاضلاع ہو، مشق ۱۵ کی مدد سے مستنبط

گرو کہ مخروط کا حجم $\frac{1}{3}$ ف ر ہوتا ہے جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے اور ر اس کا قاعدہ ہے۔

مثال ۱۷۔ ثابت کرو کہ قائم مستدیر مخروطِ ناقص کا حجم $\frac{1}{3}$ ف $(ر_1 + ر_2 + \sqrt{ر_1 ر_2})$ یا $\frac{\pi}{3}$ ف $(ا^2 + ا ب + ب^2)$ ہوتا ہے جہاں ف مخروطِ ناقص کا ارتفاع اور $ر_1$، $ر_2$ اور ا، ب بالترتیب مستدیر سروں کے رقبے اور نصف قطر ہیں۔

مثال ۱۸۔ ایک قائم مستدیر مخروط کے قاعدہ کے نصف قطر اور محیط بالترتیب ا اور ط ہیں اور اس کی سطح مائل کا ارتفاع ل ہے، ثابت کرو کہ اس کی منحنی سطح کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ل ط یا π ل ا ہے (منحنی سطح کو مشق ۱۶ کے دو مضلع مخروطوں میں سے کسی ایک کی جانبی سطحوں کے رقبہ کی انتہا تصور کیا جا سکتا ہے)

مثال ۱۹۔ اگر قائم مستدیر مخروطِ ناقص کا مائل ارتفاع ل ہو اور اس کے مستدیر سروں کے نصف قطر بالترتیب ا اور ب ہوں تو ثابت کرو کہ منحنی سطح کا رقبہ π ل (ا + ب) ہوگا اگر مستدیر سروں کے محیط ط اور $ط_1$ ہوں تو رقبہ $\frac{1}{2}$ ل $(ط + ط_1)$ ہوگا۔

باب پنجم

تفاعلوں کا تسلسل، خاص انتہائیں

۴۴ ۔ تفاعل کا تسلسل ۔ انتہا کے تخیل کی مدد سے ہم مسلسل تفاعل کی اس خاصیت کو جسے اس کی مابہ الامتیاز خاصیت تصور کرنا چاہیے حسابی شکل میں بیان کر سکتے ہیں۔

جب یہ کہا جائے کہ وجہ یا دلیل ا سے ب تک مسلسل طور پر بدلتی ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ یہ ا اور ب کے درمیان کی ہر ایک قیمت کو ایک اور صرف ایک دفعہ اختیار کرتی ہے۔ اگر دلیل کو فصلوں سے تعبیر کیا جائے تو دلیل کے مسلسل طور پر ا سے ب تک بدلنے سے متناظر نقطہ، نقطۂ ا سے نقطۂ ب تک حرکت کرتا ہے اور اس مقطوعہ کے ہر ایک نقطہ پر ایک اور صرف ایک دفعہ منطبق ہوتا ہے۔

ابتدائی تفاعلوں کی ترسیم بنانے میں یہ دیکھا گیا تھا کہ سوائے دلیل کی ان قیمتوں کے قرب میں جن کے لئے تفاعل لامتناہی ہو جاتا ہے دلیل کی خفیف سی تبدیلی سے تفاعل میں بھی خفیف سی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ اب انتہا کی تعریف کی رو سے جب، لا تقریباً اِ کے مساوی ہو تو تفاعل ف (لا) اپنی انتہا اِ (فرض کرو) کے قریب آتا ہے، پس اگر تفاعل کی انتہا اِ تفاعل کی قیمت ف (اِ) کے مساوی ہو تو

ہم دیکھتے ہیں کہ جب، لا اپنی قیمت ا سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے گھٹتا یا بڑھتا ہے تو تفاعل ف (لا) بھی اپنی قیمت ف (ا) سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے بدلتا ہے۔

اس سے ذیل کی تعریف مستنبط ہوتی ہے۔

تعریف۔ کسی تفاعل ف (لا) کو لا کی قیمت ا کے لئے یا مختصراً محض ا پر مسلسل اس وقت کہتے ہیں جبکہ

(۱) ف (ا) ایک خاص (محدود) عدد ہو اور

(۲) نہا (لا ← ا) ف (لا) = ف (ا)

پس تسلسل کے لئے ضرور ہے کہ ف (لا) کی قیمت جبکہ لا = ا اور ف (لا) کی انتہا جبکہ لا ← ا دونوں ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔ چونکہ اس مفہوم کی رو سے جو الجبرا کے قواعد کے اطلاق کے لئے ضروری ہے لاتناہی کو تفاعل کی قیمت نہیں کہہ سکتے اس لئے دلیل کی اُن قیمتوں کے لئے جو تفاعل کو لاتناہی بنا دیں تفاعل مسلسل نہیں رہتا یعنی غیر مسلسل ہو جاتا ہے۔

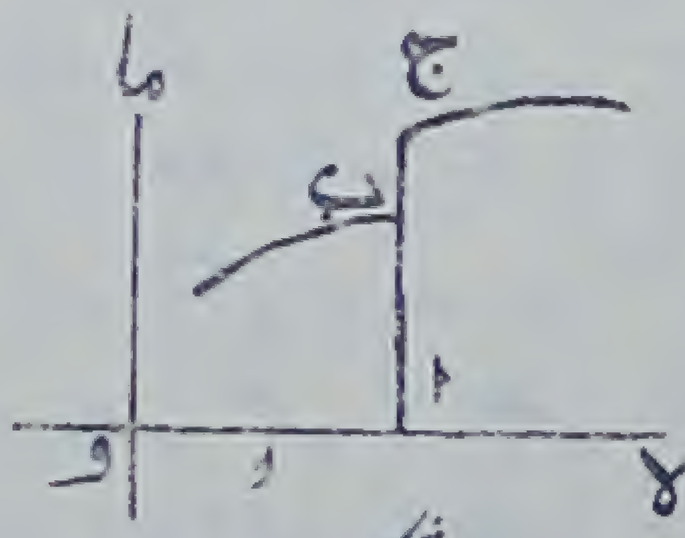
نیز تعریف میں یہ مفہوم مضمر ہے کہ لا، ا سے بڑی قیمتوں سے گھٹتے گھٹتے ا کے قریب آسکتا ہے یا ا سے کم قیمتوں سے بڑھتے بڑھتے ا کے قریب جا سکتا ہے یعنی جب ف (لا) کو منحنی سے تعبیر کیا جائے تو نقطہ لا بائیں طرف سے یا دائیں طرف سے ا کے قریب آسکتا ہے اور تقرب کے دونوں طریقوں کی رو سے انتہا وہی ہونی چاہئے۔ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ لا صرف ایک طرف سے ا کے قریب آسکتا ہے مثلاً ف (لا) = √(ا۲ - لا۲) میں، کیونکہ لا کی دوسری طرف کی قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت معین نہیں ہو سکتی۔ ایسی صورتوں کے لئے شرط مذکورہ بالا یہ ہے کہ انتہا وہی ہونی چاہئے خواہ لا کسی طرف سے ا کے قریب آئے تبدیلی

کرنی پڑے گی، لیکن ایسا کرنے میں کوئی دقت واقع نہیں ہوگی۔ اس مفہوم کو ظاہر کرنے کے لئے کہ لا، ا سے کم قیمتوں سے بڑھتے بڑھتے ا کے قریب آتا ہے، یہ ترقیم استعمال کی جاتی ہے

نہا ف (لا)
لا ← ا − ۰

اسی طرح ترقیم لا ← ا + ۰ سے ہم یہ تعبیر کریں گے کہ ا سے بڑی قیمتوں سے شروع ہو کر لا، ا کے قریب آتا ہے، لیکن ہم معمولی ترقیم استعمال کریں گے اور خاص صورتوں میں تبدیلی کرنے کے عمل کو طالب علم پر چھوڑ دیں گے۔

ایک اور طرح کا عدم تسلسل بھی قابل توجہ ہے۔ یہ شکل ۲۷ میں دکھایا گیا ہے، جب لا ایک ایسی قیمت سے جو ا سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے کم ہو بدل کر ایک ایسی قیمت اختیار کرتا ہے جو ا سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے زیادہ ہوتی ہے تو تفاعل میں ایک محدود



شکل ۲۷

تبدیلی ب ج واقع ہوتی ہے۔ یہاں تفاعل ف (لا) کی ایک معین قیمت نہیں ہے جبکہ لا = ا، جب لا بائیں طرف سے ا کے قریب آتا ہے تو تفاعل ف (لا) کی انتہا اب ہوتی ہے اور جب دائیں طرف سے کم ہوتے ہوئے ا کے قریب آتا ہے تو انتہا اج ہوتی ہے۔ اگر کسی متحرک نقطہ پر کسی خاص آن میں دھکے کی قوت عمل کرے تو اس کی رفتار کی ترسیم فصلہ کی اس قیمت کے لئے جو آن مذکور کو تعبیر کرتی ہے اس قسم کا عدم تسلسل ظاہر کرے گی (عدم تسلسل کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ

۶۹ مشق ۶)

۴۵۔ مسلسل تفاعلوں کے متعلق مسئلے۔

جب ف (لا) کہ پر مسلسل ہو تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے (اور در حقیقت یہ تسلسل کی تعریف کو ہی دوسرے رنگ میں پیش کرنا ہے) کہ اگر لا تقریباً ا کے مساوی ہو تو ف (لا) تقریباً ف (ا) کے مساوی ہوتا ہے یا ہم یوں کہہ سکتے ہیں کہ

ف (لا) = ف (ا) + د جہاں د ایک ایسا متغیر ہے جو مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا مائل بہ ا ہو۔

کوئی تفاعل سعت ا اور ب کے درمیان مسلسل اس وقت کہلاتا ہے جبکہ یہ اپنی دلیل کی ہر ایک قیمت کے لئے جو ا اور ب کے درمیان ہو مسلسل رہے۔ اس سعت میں تاوقتیکہ اس کے خلاف بالصراحت نہ بیان کیا جائے اس کے طرفین ا اور ب بھی شامل ہوتے ہیں، جس سعت میں اس کے طرفین بھی شامل ہوں اس کو بعض اوقات بند سعت کہتے ہیں اور جس سعت میں اس کے طرفین شامل نہ ہوں اس کو کھلی سعت کہتے ہیں۔

ذیل کے مسئلوں سے اکثر سابقہ پڑتا ہے:۔

مسئلہ ا۔ اگر ف (لا)، ا پر مسلسل ہو اور اگر ف (ا) صفر نہ ہو تو لا کی ان قیمتوں کے لئے جو ا کے قریب ہوں تفاعل ف (لا) کی وہی علامت ہوتی ہے جو ف (ا) کی کیونکہ اگر ف (لا) = ف (ا) + د تو ف (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ف (لا) اور د میں سے اس عدد کی علامت ہے جو تعداداً دوسرے سے بڑا ہے، نیز چونکہ لا کو ا کے اتنا قریب لیا جاسکتا ہے کہ د کسی دئے ہوئے عدد سے تعداداً کم ہو

اور اس بنا پر ف (ا) سے کم ہو' اس لئے ف (لا) کی وہی علامت ہوگی جو ف (ا) کی ہے۔ اصطلاح "ا کے قریب" اور اس قسم کی دیگر اصطلاحوں کے معانی ثبوت سے سمجھ میں آسکتے ہیں۔

مسئلہ ۲۔ اگر ف (لا)، ا سے ب تک کی سعت میں مسلسل ہو اور اگر ف (ا) = اَ اور ف (ب) = بَ تو جب لا مسلسل طور پر ا سے ب تک بدلتا ہے تو تفاعل ف (لا) مسلسل طور پر اَ سے بَ تک بدلتا ہے۔ بالخصوص اگر اَ اور بَ مختلف العلامت ہوں تو تفاعل ف (لا)، لا کی ان قیمتوں کے لئے جو ا اور ب کے درمیان ہوں کم از کم ایک دفعہ صفر ضرور ہوگا۔

اس مسئلہ کا باضابطہ ریاضی ثبوت فی الحال ہماری حدود بحث سے باہر ہے۔ جہاں تک تفاعل کو ترسیم کے ذریعہ تعبیر کرنے سے تعلق ہے مسئلہ ہندسی طور پر بالکل صاف ہے۔ ترسیم کے ذریعہ یہ بھی آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ اس مسئلہ کا عکس لازمی طور پر درست نہیں۔

۴۳۔ **ابتدائی تفاعلوں کا تسلسل۔** انتہاؤں کے متعلق دفعہ ۴۲ میں جو مسئلے مرقوم ہوئے ہیں اُن کی مدد سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ ایک متغیر کے جو ابتدائی یا معمولی تفاعل ہوں وہ متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتے ہیں سوائے اُن قیمتوں کے جن کے لئے تفاعل لامتناہی ہو جائیں۔

جب' لا مسلسل طور پر بدلے تو حاصل ضرب لاⁿ اور ا لاⁿ بھی مسلسل طور پر بدلتے ہیں۔ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور ا کوئی مستقل ہے۔ (ملاحظہ ہو دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲)، لہذا مسئلہ ۱ دفعہ ۴۲ کی رو سے کوئی منطق صحیح تفاعل اپنی وجہ کی سب محدود

قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتا ہے اور مسائل ۱ اور ۳ کی رو سے منطق کسری تفاعل وجہ کی سب محدود قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتا ہے سوائے ایسی قیمتوں کے جن کے لئے اس کا نسب نما صفر ہو جائے۔

مثلثی تفاعلوں کی ہندسی تعریف سے یا انتہا کی جانچ کے طریقہ کو استعمال کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مثلثی تفاعل متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتے ہیں سوائے اُن قیمتوں کے لئے جو تفاعل کو لامتناہی بنادیں، جیب اور جیب التمام وجہ کی سب قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتے ہیں، مماس اور قاطع وجہ کی سب قیمتوں کے لئے مسلسل رہتے ہیں سوائے وجہ کی ایسی قیمتوں کے لئے جو $\frac{\pi}{2}$ کا کوئی طاق ضعف ہوں، مماس التمام اور قاطع التمام وجہ کی سب قیمتوں کے لئے سوائے صفر اور π کے ضعفوں کے لئے مسلسل رہتے ہیں۔

ا^لا کے تسلسل کی مفصل بحث سے ہم گہرے تخیلی مباحث میں پڑ جائیں گے، اس لئے ہم مان لینگے کہ ا^لا، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتا ہے اور اُس کا مقلوب لوک لا بھی لا کی سب محدود قیمتوں کے لئے مسلسل ہوتا ہے سوائے قیمت صفر کے جس کے لئے یہ غیر مسلسل ہے۔ جب، لا غیر منطق ہو تو ہم عملی طور پر ا^لا کی بجائے ا^لاَ لکھ سکتے ہیں جہاں لاَ، لا کا منطق تقرب ہے۔ اِن امور کے متعلق سادہ ترین بحث سلسلۂ قوت نما پر مبنی ہے۔

تفاعل کا تفاعل۔ جب ما کوئی تفاعل ہو ی کا مثلاً ما = فہ (ی) اور ی کوئی تفاعل ہو لا کا مثلاً ی = ف (لا)

تو ما کو لا کے تفاعل کا تفاعل کہتے ہیں گویا ما بواسطہ ی، لا کا تفاعل ہے۔ احصا میں تفاعلوں کے تفاعل کثرت سے واقع ہوتے ہیں اور ی کی طرح کے درمیانی متغیر کسی سوال میں بہت سے ہو سکتے ہیں۔

اگر ما، ی کا کوئی مسلسل تفاعل ہو اور ی، لا کا کوئی مسلسل تفاعل ہو تو طالب علم آسانی سے ثابت کرسکتا ہے کہ ما، لا کا مسلسل تفاعل ہو گا۔ دفعہ ۴۲ کی ترقیم کے مطابق

$$\text{نہا فہ } (\text{ی}) = \text{فہ } (\text{یَ}) = \text{فہ } (\text{نہا ی})$$

نیز اگر کوئی تفاعل مسلسل ہو تو اس کا مقلوب بھی بالعموم مسلسل ہوتا ہے۔ اس لئے $\text{لا}^{\text{ن}}$ مسلسل ہوتا ہے جبکہ لا مثبت یا منفی کسر ہو سوائے اُس صورت کے جبکہ لا صفر ہو اور ن منفی ہو۔ اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقلوب مثلثی تفاعل بھی بالعموم مسلسل ہوتے ہیں۔

۴۷۔ $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \dfrac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}}$ ۔ دفعات ۴۷ تا ۴۹ میں جن انتہاؤں پر بحث کی گئی ہے وہ اساسی انتہائیں ہیں

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{ن ا}^{\text{ن}-1}$$ جہاں ن کوئی منطق عدد ہے۔

(۱) فرض کرو کہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تب

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-2}\text{ا} + \text{لا}^{\text{ن}-3}\text{ا}^{2} + \dots + \text{لا ا}^{\text{ن}-2} + \text{ا}^{\text{ن}-1}$$

$$\therefore \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \left(\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-2}\text{ا} + \text{لا}^{\text{ن}-3}\text{ا}^{2} + \dots + \text{لا ا}^{\text{ن}-2} + \text{ا}^{\text{ن}-1}\right)$$

$= \text{ن ا}^{\text{ن}-1}$ کیونکہ ہر ایک رقم کی انتہا $\text{ا}^{\text{ن}-1}$ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ن کوئی مثبت کسر واجب $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ہے جہاں ف اور ق کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

لا کی بجائے $\text{ما}^{\text{ق}}$ اور ا کی بجائے $\text{ب}^{\text{ق}}$ رکھو۔ تب اگر لا = ا تو ما = ب

نیز چونکہ $\text{لا}^{\text{ن}} = \text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} = \text{ما}^{\text{ف}}$ اور $\text{ا}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ف}}$

اس لئے مشترک جزوِ ضربی نکال دینے سے

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}} = \frac{\text{ما}^{\text{ف}-1} + \text{ما}^{\text{ف}-2}\,\text{ب} + \dots + \text{ما}\,\text{ب}^{\text{ف}-2} + \text{ب}^{\text{ف}-1}}{\text{ما}^{\text{ق}-1} + \text{ما}^{\text{ق}-2}\,\text{ب} + \dots + \text{ما}\,\text{ب}^{\text{ق}-2} + \text{ب}^{\text{ق}-1}}$$

$$\therefore \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}}\left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}}\right) = \frac{\text{نہا}_{\text{ما}\to\text{ب}}\left(\text{ما}^{\text{ف}-1} + \text{ما}^{\text{ف}-2}\,\text{ب} + \dots + \text{ما}\,\text{ب}^{\text{ف}-2} + \text{ب}^{\text{ف}-1}\right)}{\text{نہا}_{\text{ما}\to\text{ب}}\left(\text{ما}^{\text{ق}-1} + \text{ما}^{\text{ق}-2}\,\text{ب} + \dots + \text{ما}\,\text{ب}^{\text{ق}-2} + \text{ب}^{\text{ق}-1}\right)}$$

$$= \frac{\text{ف}\,\text{ب}^{\text{ف}-1}}{\text{ق}\,\text{ب}^{\text{ق}-1}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}}\,\text{ب}^{\text{ف}-\text{ق}} = \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}$$

(۳) فرض کرو کہ ن منفی ہے اور صحیح عدد یا کسر ہے یعنی ن = -م

تب
$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{لا}^{-\text{م}} - \text{ا}^{-\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} = -\frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}}$$

$$\therefore \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}}\left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}}\right) = -\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}}\left(\frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}}\right) \times \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}}\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}}$$

$$= -\text{م}\,\text{ا}^{\text{م}-1} \times \frac{1}{\text{ا}^{2\text{م}}} = -\text{م}\,\text{ا}^{-\text{م}-1} = \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}$$

کیونکہ پہلے جزو ضربی کی انتہا صورت (۱) اور (۲) کی بنا پر $\text{م}\,\text{ا}^{\text{م}-1}$ ہے

طالب علم کو چاہئے کہ اس مسئلہ کو فوراً پہچان لے خواہ یہ کسی شکل میں پیش کیا جائے۔

مثلاً $\underset{\text{ھ}\to 0}{\text{نہا}} \dfrac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ھ}} = \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$، $\underset{\text{ف و}\to 0}{\text{نہا}} \dfrac{1}{\text{ف و}}\left(\dfrac{1}{\text{و}+\text{ف و}} - \dfrac{1}{\text{و}}\right) = -\dfrac{1}{\text{و}^2}$

نتیجہ صریح۔ اگر ھ کوئی چھوٹا مثبت یا منفی عدد ہو تو $(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}}$ تقریباً $\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن ھ لا}^{\text{ن}-1}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۸۔ $\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \left(1+\dfrac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ کا عدد قو

(۱) فرض کرو کہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہے، $\left(1+\dfrac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ کو مسئلۂ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ

$$\text{تب}\ \left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = 1 + \frac{\text{م}}{1}\times\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\underline{|2}}\times\frac{1}{\text{م}^2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{\underline{|3}}\times\frac{1}{\text{م}^3} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{\text{م}}}{\underline{|2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)}{\underline{|3}} + \dots\dots$$

اس تفصیل میں م + ۱ رقمیں ہیں اور دوسری رقم کے بعد کی ہر ایک رقم تیسری اور چوتھی رقوم کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے، مثلاً آخری یعنی (م + ۱) ویں رقم کی شکل

$\left(1-\dfrac{1}{\text{م}}\right)\left(1-\dfrac{2}{\text{م}}\right)\dots\left(1-\dfrac{\text{م}-1}{\text{م}}\right) \div \underline{|\text{م}}$ ہوگی۔

فرض کرو کہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے جو م سے کم ہے، نیز فرض کرو کہ ن مستقل یا ثابت رہتا ہے جبکہ م بڑھتا ہے۔ تفصیل کی پہلی (ن + ۱) رقموں کو $\text{س}_{\text{ن}+1}$ سے اور

باقی (م - ن) رقموں کو $\text{ب}_{\text{ن}+۱}$ سے تعبیر کرو، تب

$$\left(۱+\frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \text{س}_{\text{ن}+۱} + \text{ب}_{\text{ن}+۱}$$

اب
$$\text{س}_{\text{ن}+۱} = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱-\frac{۱}{\text{م}}}{\underline{|۲}} + \frac{\left(۱-\frac{۱}{\text{م}}\right)\left(۱-\frac{۲}{\text{م}}\right)}{\underline{|۳}} + \ldots + \frac{\left(۱-\frac{۱}{\text{م}}\right)\left(۱-\frac{۲}{\text{م}}\right)\ldots\ldots\left(۱-\frac{\text{ن}-۱}{\text{م}}\right)}{\underline{|\text{ن}}}$$

$\text{م}\to\infty$ کے لئے ہر جزو ضربی $\left(۱-\frac{۱}{\text{م}}\right)$، $\left(۱-\frac{۲}{\text{م}}\right)$، ... کی انتہا ایک ہے اور چونکہ اجزائے ضربی کی تعداد محدود ہے اس لئے ہر شمار کنندہ کی انتہا ایک ہے۔ $\text{س}_{\text{ن}+۱}$ کی $\text{م}\to\infty$ کے لئے جو انتہا ہے اُسے $\text{س}_{\text{ن}+۱}$ سے تعبیر کرو اس طرح

$$\text{س}_{\text{ن}+۱} = \text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\ \text{س}_{\text{ن}+۱} = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \ldots + \frac{۱}{\underline{|\text{ن}}}$$

اب ہم $\text{ب}_{\text{ن}+۱}$ کی انتہا پر غور کریں گے۔ $\text{ب}_{\text{ن}+۱}$ کی پہلی رقم ہے

$$\left(۱-\frac{۱}{\text{م}}\right)\left(۱-\frac{۲}{\text{م}}\right)\ldots\ldots\left(۱-\frac{\text{ن}}{\text{م}}\right) \div \underline{|\text{ن}+۱}$$

اور یہ رقم اپنے بعد کی سب رقموں میں بطور جزوِ ضربی کے شریک ہوتی ہے۔

پس
$$\text{ب}_{\text{ن}+۱}' \left(۱-\frac{۱}{\text{م}}\right)\left(۱-\frac{۲}{\text{م}}\right)\ldots\ldots\left(۱-\frac{\text{ن}}{\text{م}}\right) \div \underline{|\text{ن}+۱}$$

$$\text{اور}\left\{1+\frac{1-\frac{ن+1}{م}}{ن+2}+\frac{\left(1-\frac{ن+1}{م}\right)\left(1-\frac{ن+2}{م}\right)}{(ن+2)(ن+3)}+\ldots(م-ن)\ \text{رقموں تک}\right\}$$

کا حاصل ضرب ہے۔

اجزائے ضربی $\left(1-\frac{1}{م}\right)$، $\left(1-\frac{2}{م}\right)$، .... $\left(1-\frac{ن-1}{م}\right)$ میں سے ہر ایک مثبت ہے اور ایک سے کم ہے، ایسے ہر جزوِ ضربی کی بجائے ایک لکھو اور اجزائے ضربی $(ن+2)$، $(ن+3)$... میں سے ہر ایک کی بجائے $ن+1$ لکھو۔ ایسا کرنے سے $ب_{ن+1}$ کے لئے جو جملہ ہے وہ بڑھ جائیگا اور $ب_{ن+1}$ کم ہوگا ذیل کے جملہ سے

$$\frac{1}{ن+1}\left\{1+\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{(ن+1)^2}+\ldots(م-ن)\ \text{رقموں تک}\right\}$$

خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ سلسلہ ہندسیہ ہے جس کا مجموعہ ہے

$$\frac{1-\frac{1}{(ن+1)^{م-ن}}}{1-\frac{1}{ن+1}}=\frac{ن+1}{ن}\left\{1-\frac{1}{(ن+1)^{م-ن}}\right\}$$

اور م کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو ن سے بڑی ہو یہ مجموعہ $\frac{ن+1}{ن}$ سے کم ہے، پس $ب_{ن+1}$ ایک ایسا مثبت عدد ہے جو م کی اُن قیمتوں کے لئے جو ن سے بڑی ہوں $ب'_{ن+1}$ سے کم ہوتا ہے جہاں

$$ب'_{ن+1}=\frac{1}{\underline{|ن+1}}\times\frac{ن+1}{ن}=\frac{1}{ن\,\underline{|ن}}$$

لیکن $\text{نہا}_{م\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{م}\right)^{م} = \text{نہا}_{م\to\infty}\, س_{ن+۱} + \text{نہا}_{م\to\infty}\, ب_{ن+۱}$

پہلی انتہا $س_{ن+۱}$ ہے اور دوسری انتہا ایک مثبت عدد ہے جو $ب'_{ن+۱}$ سے کم ہے، اِس لئے $س_{ن+۱}$ اور $ب'_{ن+۱}$ کی قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{نہا}_{م\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{م}\right)^{م} > ۱+۱+\frac{۱}{\underline{|۲}}+\frac{۱}{\underline{|۳}}+\cdots\cdots+\frac{۱}{\underline{|ن}}$$

$$\text{لیکن} < ۱+۱+\frac{۱}{\underline{|۲}}+\frac{۱}{\underline{|۳}}+\cdots+\frac{۱}{\underline{|ن}}+\frac{۱}{ن(\underline{|ن})}$$

$$\text{یا}\ \text{نہا}_{م\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{م}\right)^{م} = ۱+۱+\frac{۱}{\underline{|۲}}+\frac{۱}{\underline{|۳}}+\cdots+\frac{۱}{\underline{|ن}}+ب_{ن+۱} \quad \cdots\cdots(۱)$$

جہاں $ب_{ن+۱}$ کم ہے $ب''_{ن+۱}$ یا $\frac{۱}{ن(\underline{|ن})}$ سے۔
جب، ن متوسط طور پر بھی بڑا ہو تو $ب_{ن+۱}$ نہایت چھوٹا ہوتا ہے، مثلاً اگر ن = ۱۲ تو $\frac{۱}{ن(\underline{|ن})}$ کم ہوتا ہے ۳×۱۰^{-۱۰} سے۔ پس انتہا کی قیمت کا اچھا تقرب سلسلہ کو $\frac{۱}{\underline{|۱۲}}$ تک محسوب کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ یہ تقربات بآسانی محسوب ہو سکتے ہیں اور اعشاریہ کے قریب ترین ساتویں ہندسہ تک تقرب یہ ہے

$$۲٫۷۱۸۲۸۱۸$$

اس انتہا کو ہم "قو" یا صرف "و" سے تعبیر کرینگے۔ قو فی الحقیقت غیر منطق عدد ہے، اس کا دیکھنا آسان ہے۔ $س_{ن+۱}$ کا مقابلہ مجموعہ

$$۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۲^{۳}} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$$

کے ساتھ کرو، موخرالذکر $س_{ن+۱}$ سے بڑا ہے اور $۳ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ کے مساوی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ن کو خواہ کتنا بڑا لیا جائے یقینی طور پہ $س_{ن+۱}$ محدود اور ۳ سے کم رہتا ہے۔ نیز چونکہ $ق - س_{ن+۱}$ مساوی ہے $ب_{ن+۱}$ کے اور $ن \to \infty$ کے لئے $ب_{ن+۱}$ کی انتہا صفر ہے، اس لئے ہم ق کو

$$\text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + ۱ + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \cdots + \frac{۱}{\underline{|ن}}\right)$$

خیال کرتے ہیں یا عام ترقیم کے مطابق

$$ق = ۱ + ۱ + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \cdots \infty \text{ تک}$$

(۲) اب فرض کرو کہ م، مثبت کسری قیمتوں میں سے ہوتا ہوا لامتناہی کی طرف جاتا ہے۔ اس صورت میں م ہمیشہ دو متصل صحیح اعداد ن اور ن + ۱ کے درمیان واقع ہوگا، پس

$$۱ + \frac{۱}{ن} > ۱ + \frac{۱}{م} > ۱ + \frac{۱}{ن+۱}$$

اس لئے $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن+۱} > \left(۱ + \frac{۱}{م}\right)^{م} > \left(۱ + \frac{۱}{ن+۱}\right)^{ن}$

لیکن $\text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن+۱} = \text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} \times \text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right) = ق \times ۱$

اور $\text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن+۱}\right)^{ن} = \text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن+۱}\right)^{ن+۱} \div \text{نہا}_{ن \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن+۱}\right) = ق \div ۱$

صورت (۱) کی رو سے،

پس اس صورت میں بھی انتہا و ہے کیونکہ جب، م مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو ن بھی لا متناہی ہوتا ہے۔

(۳) فرض کرو کہ م منفی ہے یعنی م = - ن جہاں ن مثبت کسری یا صحیح عدد ہے

$$\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)^{-\text{ن}} = \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}\right)^{\text{ن}} = \left(1+\frac{1}{\text{ن}-1}\right)^{\text{ن}}$$

اسلئے $\underset{\text{م}\to-\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}-1}\right)^{\text{ن}}$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}-1}\right)^{\text{ن}-1} \times \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}-1}\right)$$

= و × ۱ صورت (۱) اور (۲) کی رو سے

پس بالآخر $\underset{\text{م}\to\pm\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \text{و}$

خواہ م صحیح یا کسری قیمتوں میں سے ہوتا ہوا لاتناہی کی طرف جائے

نتیجہ صریح $\underset{\text{ھ}\to 0}{\text{نہا}}\left(1+\text{ھ}\right)^{\frac{1}{\text{ھ}}} = \text{و}$

۴۹ - **تفاعل $\text{و}^{\text{لا}}$** ۔ اگر لا صفر نہ ہو تو ہم م = د لا رکھنے سے دیکھتے ہیں کہ جب، م مائل بہ لاتناہی ہو تو د بھی مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے، اس لئے

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \left(1+\frac{1}{\text{د}}\right)^{\text{د لا}} = \left\{\left(1+\frac{1}{\text{د}}\right)^{\text{د}}\right\}^{\text{لا}}$$

اور $\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}}\left\{\left(1+\frac{1}{\text{د}}\right)^{\text{د}}\right\}^{\text{لا}} = \left\{\underset{\text{د}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{د}}\right)^{\text{د}}\right\}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}}$

دفعہ ۴۶ کی رو سے (تفاعل کا تفاعل)

چونکہ م مثبت یا منفی، صحیح یا کسر ہو سکتا ہے، اس لئے یہ نتیجہ برقرار رہتا ہے خواہ لا یا م مثبت یا منفی، صحیح عدد یا کسر ہوں۔

بعینہٖ دفعہ ۴۸ کے طریقہ کی مانند $\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ کو م کی مثبت صحیح قیمتوں کے لئے پھیلانے سے

$$\text{قو}^{\text{لا}} = \underset{\text{ن}=\infty}{\text{نہا}}\left(\text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}!} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\right)$$

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ ایک محدود عدد ہے خواہ ن کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو، کیونکہ جب، ن تعداداً لا سے بڑا ہو جائے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}}{(\text{ن}+\text{۱})!} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۲}}}{(\text{ن}+\text{۲})!} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۳}}}{(\text{ن}+\text{۳})!} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}}{(\text{ن}+\text{۱})!}\left\{\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}+\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{(\text{ن}+\text{۲})(\text{ن}+\text{۳})} + \cdots\right\}$$

اور یہ تعداداً کم ہے

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}}{(\text{ن}+\text{۱})!}\left\{\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}+\text{۱}} + \left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}+\text{۱}}\right)^{\text{۲}} + \cdots\cdots\right\} \text{ سے}$$

جہاں لا، لا کی عددی قیمت ہے، خطوطِ وحدانی کے اندر کا سلسلہ، سلسلۂ ہندسیہ ہے جس کی نسبت مشترک تعداداً ایک سے کم ہے، اس لئے اگر ہم لکھیں

$$\text{قو}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} + \text{ب}_{\text{ن}+\text{۱}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{۱})$$

تو $\text{ب}_{\text{ن}+\text{۱}}$، ن کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو لا سے تعداداً

بڑی ہو

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{|\underline{\text{ن}+1}} \times \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}+1-\text{لا}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1-\text{لا})(|\underline{\text{ن}})}$$

سے کم ہوگا۔

اگر لا = ۱ تو اس سے دفعہ ۴۸ میں $\text{ب}_{\text{ن}+1}$ کی قیمت حاصل ہوتی ہے

نتیجہ صریح۔ $\text{نہا}_{\text{لا}\to 0} \dfrac{\text{ق}^{\text{لا}}-1}{\text{لا}} = 1$

کیونکہ اگر لا کوئی مثبت کسر واجب ہو تو ہم (ا) میں ن کی بجائے ا لکھ سکتے ہیں

اس لئے $\text{ق}^{\text{لا}} > 1+\text{لا}$ لیکن $\text{ق}^{\text{لا}} < 1+\text{لا}+\dfrac{\text{لا}^2}{2-\text{لا}}$

لہذا $\dfrac{\text{ق}^{\text{لا}}-1}{\text{لا}} > 1$ لیکن $< 1+\dfrac{\text{لا}}{2-\text{لا}}$

جس سے لا کی مثبت قیمتوں کے لئے نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے

اگر لا منفی ہو یعنی لا = −ھ جہاں ھ مثبت ہے، تو

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to 0} \frac{\text{ق}^{\text{لا}}-1}{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{ھ}\to 0} \frac{\text{ق}^{-\text{ھ}}-1}{-\text{ھ}} = \text{نہا}_{\text{ھ}\to 0} \frac{\text{ق}^{\text{ھ}}-1}{\text{ھ}} \times \frac{1}{\text{ق}^{\text{ھ}}} = 1$$

صورت اول کی رو سے؛ یعنی انتہا دونوں صورتوں میں ایک ہی ہے خواہ لا مثبت یا منفی قیمتوں سے اپنی انتہا صفر کی طرف آئے۔

۵۰۔ **سود مرکب کا کلیہ**۔ کسی قوت نمائی تفاعل کا ذکر کیا جائے تو اساس بالعموم ق ہوتا ہے، جب اساس کوئی اور عدد ہو مثلاً ا، تو تفاعل $\text{ا}^{\text{لا}}$ لکھا جا سکتا ہے مساوی $\text{ق}^{\text{ک لا}}$ کے جہاں ک = لوک ا، جس شرح سے $\text{ا}^{\text{لا}}$ یا $\text{ق}^{\text{ک لا}}$ بلحاظ لا کے بڑھتا ہے

جبکہ $\text{لا} = \text{لا}_1$ وہ $\text{ک ا ٯو}^{\text{ک لا}_1}$ ہے یعنی $\text{لا} = \text{لا}_1$ پر بڑھنے کی شرح تفاعل کی قیمت کے متناسب ہے۔ کیونکہ اگر لا، لا_1 سے بڑھ کر $\text{لا}_1 + \text{ھ}$ ہو جاتا ہے تو تفاعل کا اضافہ

$$\text{ا ٯو}^{\text{ک}(\text{لا}_1+\text{ھ})} - \text{ا ٯو}^{\text{ک لا}_1} = \text{ا ٯو}^{\text{ک لا}_1}\left(\text{ٯو}^{\text{ک ھ}} - 1\right)$$

ہے اور اوسط شرح

$$\frac{\text{ا ٯو}^{\text{ک لا}_1}\left(\text{ٯو}^{\text{ک ھ}} - 1\right)}{\text{ھ}} = \text{ک ا ٯو}^{\text{ک لا}_1}\,\frac{\text{ٯو}^{\text{ک ھ}} - 1}{\text{ک ھ}}$$

دفعہ ۹۴ نتیجہ صریح کی رو سے اس جملہ کی انتہا جبکہ ھ ← ۰، $\text{ک ا ٯو}^{\text{ک لا}_1}$ ہے۔ قدرت کے بہت سے عمل اس کلیہ کے موافق اثر پذیر ہوتے ہیں، اس کلیہ کو بعض اوقات سود مرکب کا کلیہ بھی کہتے ہیں یا کیونکہ اِس کی سادہ مثال سود مرکب میں ملتی ہے۔ فرض کرو ص پونڈ اصل زر کے سود کی شرح فیصد فی سال ش ہے نیز فرض کرو کہ سود ہر سال میں ن مساوی وقفوں کے بعد محسوب کیا جاتا ہے اور ایسے ہر وقفہ پر اصل میں شامل کر دیا جاتا ہے اور بعد ازاں اس سود کا سود بھی محسوب ہوتا ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ ت سالوں کے بعد کل زر ہو گا

$$\text{ص}\left(1 + \frac{\text{ش}}{100\,\text{ن}}\right)^{\text{ن ت}}$$

اب فرض کرو کہ ن بڑھتے بڑھتے لامتناہی کی طرف جاتا ہے یعنی یہ فرض کرو کہ سود متواتر چھوٹے اور مزید چھوٹے وقفوں کے

بعد اصل میں شامل ہوتا رہتا ہے۔ اس طرح ہم ایک ایسی شرط پر پہنچ جاتے ہیں جس میں سود مسلسل طور پر جمع ہوتا رہتا ہے۔

اب رکھو $ن = \frac{ش م}{۱۰۰}$، پس جب ن مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے، م مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے۔ ن کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے جملۂ بالا کی انتہا

$$ا = \lim_{م \to \infty} ص \left\{\left(۱ + \frac{۱}{م}\right)^{م}\right\}^{\frac{ش ت}{۱۰۰}} = ص\, و^{\frac{ش ت}{۱۰۰}}$$

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ت سلسلۂ حسابیہ کے موافق بڑھے جس کا فرق مشترک ھ ہو تو ا سلسلۂ ہندسیہ کے موافق بڑھے گا جسکی نسبت مشترک $و^{\frac{ش ھ}{۱۰۰}}$ ہوگی کیونکہ اگر ت

ت + ھ ہو جائے تو ا، $ص\, و^{\frac{ش (ت + ھ)}{۱۰۰}}$ یعنی $ا\, و^{\frac{ش ھ}{۱۰۰}}$ ہو جاتا ہے

اس لئے ا ایک ایسی مقدار ہے جو مساوی وقفوں میں مساوی رقموں سے ضرب کھا کر بڑھتی جاتی ہے۔

جب ہم کسی پہاڑی پر سے نیچے اترتے ہیں تو ہوا کی کثافت اُتار کے مساوی فاصلوں کے لئے مساوی رقموں سے ضرب کھاتی ہے کیونکہ اُتار کے ہر فٹ کے لئے کثافت میں جو اضافہ ہوتا ہے وہ اُس طبقہ کے وزن کی وجہ سے ہے جو خود ہوا کی کثافت کے متناسب ہے۔ علم طبیعیات میں اس قسم کی اور بہت سی مثالیں مل سکتی ہیں۔

مشق ۷

۱- اگر ف (لا) = ا لا$^{\text{ن}}$ + ب لا$^{\text{ن}-1}$ + ... + ک لا + ل
کوئی منطق صحیح تفاعل ہو لا کا، تو ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\left\{\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ا لا}^{\text{ن}}}\right\}=1 \quad ، \quad \text{نہا}_{\text{لا}\to-\infty}\left(\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ا لا}^{\text{ن}}}\right)=1$$

اور اس لئے جب، لا تعداداً بہت بڑا ہو تو
ف (لا) = ا لا$^{\text{ن}}$ (۱ + د) جہاں د ایک ایسا متغیر ہے
جس کی انتہا صفر ہے جبکہ لا $\to \pm\infty$
مسئلہ ۱ دفعہ ۲۴ کو استعمال کرو۔

۲- ثابت کرو کہ مشق ۱ میں تفاعل ف (لا) کی علامت وہی ہوتی ہے جو ا کی ہو جبکہ لا کوئی بہت بڑا مثبت عدد ہو اور اس کی علامت وہی ہوتی ہے جو (-۱)$^{\text{ن}}$ ا کی ہو جبکہ لا کوئی بہت بڑا منفی عدد ہو (یعنی ن کے جفت ہونے کی صورت میں اس کی علامت + ا کی اور طاق ہونے کی صورت میں - ا کی علامت ہوتی ہے)

۳- مشق ۲ کے نتیجہ کے ذریعہ مسئلہ ۲ دفعہ ۵۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ طاق درجہ کی ہر ایک مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ضرور ہوتی ہے اور اگر ایک سے زیادہ اصلیں حقیقی ہوں تو ان اصلوں کی تعداد طاق ہونی چاہئے۔

۴- اگر ف (لا) کوئی منطق کسری تفاعل ہو

$$\text{ف (لا)}=\frac{\text{ا لا}^{\text{م}}+\text{ب لا}^{\text{م}-1}+\cdots\cdots+\text{ک لا}+\text{ل}}{\text{ا}_1\text{ لا}^{\text{ن}}+\text{ب}_1\text{ لا}^{\text{ن}-1}+\cdots\cdots+\text{ک}_1\text{ لا}+\text{ل}_1}$$

تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\ \text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ا}}{\text{ا}_۱}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}\,(۱+\text{د}_۱)\ \text{اگر م} > \text{ن}$$

$$(۲)\ \text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ا}}{\text{ا}_۱}\,(۱+\text{د}_۲)\ \text{اگر م} = \text{ن}$$

$$(۳)\ \text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ا}}{\text{ا}_۱} \times \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}}}\,(۱+\text{د}_۳)\ \text{اگر م} < \text{ن}$$

جہاں د۱، د۲، د۳ تعداداً بہت چھوٹے ہوتے ہیں جبکہ لا تعداداً بہت بڑا ہو۔

دفعہ ۴۲ کا مسئلہ ۱ اور مسئلہ ۳ استعمال کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ اگر زاویہ کو نیم قطریوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{\text{طہ}\to ۰}{\text{نہا}}\left(\frac{۱-\text{جم طہ}}{\text{طہ}^۲}\right) = \frac{۱}{۲}\,\underset{\text{طہ}\to ۰}{\text{نہا}}\left(\frac{\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\,\text{طہ}}{\frac{۱}{۲}\,\text{طہ}}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

اس کی مدد سے دکھاؤ کہ جب، طہ چھوٹا ہو تو

$$\text{جم طہ} = ۱ - \frac{۱}{۲}\,\text{طہ}^۲\ \text{تقریباً}$$

۶۔ ثابت کرو کہ $۱ > \text{جم طہ} > ۱ - \frac{۱}{۲}\,\text{طہ}^۲$

۷۔ ثابت کرو کہ (۱) $\underset{\text{طہ}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب ا طہ}}{\text{جب ب طہ}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

(۲) $\underset{\text{طہ}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مس ا طہ}}{\text{مس ب طہ}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

۸۔ ثابت کرو کہ (۱) $\underset{\text{لا}\to +\infty}{\text{نہا}}\left(\text{لا}\ \text{ق}^{-\text{لا}}\right) = ۰$

(۲) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\left(\text{لا لوگ لا}\right) = ۰$

دفعہ ۹۴ (ا) کی رو سے $\text{قو}^{\text{لا}} > ۱ + \text{لا} + \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}$

اس لئے $\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{قو}^{\text{لا}}} < \frac{\text{لا}}{۱+\text{لا}+\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}}$ یعنی $\frac{۱}{\frac{۱}{\text{لا}}+۱+\frac{۱}{۲}\text{لا}}$ سے

اور آخری کسر کی انتہا صفر ہے۔

اس کے بعد رکھو $\text{لا} = \text{قو}^{-\text{ما}}$، تب $\text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} = -\text{ما}\,\text{قو}^{-\text{ما}}$ اور $\text{لا} \to ۰$ کے لئے دائیں رکن کی انتہا مساوی ہے $\text{ما} \to +\infty$ کے لئے بائیں رکن کی انتہا کے اور موخر الذکر صریحاً صفر ہے۔

۹ - ثابت کرو کہ $\underset{\text{لا}\to+\infty}{\text{نہا}}\ \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{-\text{لا}} = ۰$

۱۰ - ثابت کرو کہ اگر ن مثبت ہو تو $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}}\ \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک}\,\text{لا} = ۰$

$$\text{کیونکہ}\ \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک}\,\text{لا} = \frac{۱}{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{\text{ن}})$$

اور اسکی انتہا بموجب مشق ۸ صفر ہے کیونکہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی انتہا صفر ہے۔

۱۱ - ثابت کرو کہ $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}}\ \text{جب}\,\text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} = ۰$

$$\text{کیونکہ}\ \text{جب}\,\text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} = \left(\frac{\text{جب}\,\text{لا}}{\text{لا}}\right)(\text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا})$$

۱۲ - اگر لا کوئی محدود مقدار ہو تو ثابت کرو کہ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{|\text{ن}} = ۰$$

فرض کرو کہ لا ایک صحیح عدد مہ کے مساوی ہے یا اس سے کم ہے، تب تعداداً

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{|\text{ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{مہ}}}{|\text{مہ}} \times \frac{\text{لا}}{\text{مہ}+۱} \times \frac{\text{لا}}{\text{مہ}+۲} \times \cdots \times \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{\text{لا}^{\text{مہ}}}{|\text{مہ}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{مہ}+۱}\right)^{\text{ن}-\text{مہ}}$$

لیکن $\frac{\text{لا}}{\text{مہ}+1}$ کسر واجب ہے، اس لئے وغیرہ۔

۱۳۔ اگر عہ کوئی مستقل ہو یا لا کا کوئی تفاعل ہو جو لا کی ہر قیمت کے لئے محدود ہو تو ثابت کرو کہ

$$(1)\quad \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\left(\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{\text{لا}} : \frac{\text{عہ}}{\text{لا}}\right)^{\text{لا}} = 1$$

$$(2)\quad \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\left(\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{\text{لا}}\right)^{\text{لا}} = 1$$

$$(3)\quad \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\left(\text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{\text{لا}} : \frac{\text{عہ}}{\text{لا}}\right)^{\text{لا}} = 1$$

۱۴۔ اگر $\text{س}_{\text{ن}}$ کوئی متغیر ہو جو (۱) ہمیشہ بڑھے جبکہ ن بڑھے لیکن (۲) ہمیشہ کم رہے کسی محدود ثابت عدد ا سے تو ثابت کرو کہ جب ن مائل بہ لاانتہا ہو تو $\text{س}_{\text{ن}}$ ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے جو ا کے مساوی یا ا سے کم ہوتی ہے۔

ق_1، ق_2، ق_3، ..... محور لا پر ایسے نقاط لو جنکے فصلے س_1، س_2، س_3 ..... کے مساوی ہوں اور فرض کرو کہ ق ایک ایسا نقطہ ہے جس کا فصلہ ا ہے، ن کی ہر قیمت کے لئے $\text{ق}_{\text{ن}}$، $\text{ق}_{\text{ن}-1}$ کے دائیں طرف، لیکن ق کے بائیں طرف واقع ہوگا، جیسے ن بڑھتا جائیگا نقطہ $\text{ق}_{\text{ن}}$ دائیں طرف حرکت کرتا جائیگا لیکن ن کی کسی محدود قیمت کے لئے ق پر منطبق نہیں ہوگا،

اس لئے ق کے بائیں طرف یا ق پر منطبق ہونے والا ایک نقطہ س ضرور ایسا ہوگا کہ $\text{ق}_{\text{ن}}$ کو اس کے اتنا قریب

لایا جا سکتا ہے جتنا کہ ہم چاہیں، اگر س کا فصلہ سَ ہو تو انتہا کی تعریف کی رو سے

$$\lim_{ن \to \infty} س_ن = سَ$$

اور سَ ، ا کے مساوی یا اس سے کم ہے۔ [دفعہ ۳۹ (۲) اور شکل ۲۵ سے مقابلہ کرو]

۱۵۔ اگر $س_ن$ کوئی متغیر ہو جو (۱) ہمیشہ کم ہوتا جائے جیسے ن بڑھتا جائے لیکن (۲) ایک محدود ثابت عدد سے ہمیشہ بڑا رہے تو ثابت کرو کہ جب ن مائل بہ لاانتہاہی ہو تو $س_ن$ ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے جو ب کے مساوی یا اس سے بڑی ہوتی ہے۔

۱۶۔ اگر $س_ن = ۱ + \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \cdots\cdots + \frac{۱}{\underline{|ن}}$

تو ثابت کرو کہ ن کے مائل بہ لاانتہاہی ہونے سے $س_ن$ ایک ایسے عدد کے قریب آتا ہے جو ۲ سے زیادہ اور ۳ سے کم ہے۔

۱۷۔ اگر $س_ن = \frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots\cdots + \frac{۱}{ن^۲}$ تو ثابت کرو کہ $ن \to \infty$ کے لئے $س_ن$ ایک ایسے عدد کے قریب آتا جاتا ہے جو ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ $سَ_ن = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲\times۱} + \frac{۱}{۳\times۲} + \cdots + \frac{۱}{(ن-۱)ن} = ۲ - \frac{۱}{ن} < ۲$

تب ن کی ہر قیمت کے لئے جو ایک سے بڑی ہو $س_ن < سَ_ن < ۲$

۱۸۔ اوپر کے سوالات ۱۴ اور ۱۵ کے مسئلوں کو دفعہ ۳۹ کی مثالوں

(۱)، (۲)، (۳) کو ثابت کرنے کے لئے استعمال کرو جبکہ کثیر الاضلاع منتظم نہ ہوں لیکن ایسے ہوں کہ ان کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے ان کے ہر ایک ضلع کا طول لاانتہا کم ہو جائے۔

باب ششم

تفرق - جبریہ تفاعل

۵۱- مشتق، تفرق - انتہا کے تخیل کو استعمال کرنے سے دفعات ۳۶ اور ۳۷ کے عمل زیادہ منضبط صورت میں بیان کئے جا سکتے ہیں -

جس اوسط شرح سے تفاعل $\text{۳}\,\text{لا}^{\text{۲}}$ بدلتا ہے جبکہ لا، $\text{لا}_{\text{۱}}$ سے $\text{لا}_{\text{۱}} + \text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}$ تک بدلے جہاں $\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}$ مثبت یا منفی اضافہ ہے وہ بموجب تعریف ہے

$$\frac{\text{مف}\left(\text{۳}\,\text{لا}_{\text{۱}}^{\text{۲}}\right)}{\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}} = \frac{\text{۳}\left(\text{لا}_{\text{۱}} + \text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}\right)^{\text{۲}} - \text{۳}\,\text{لا}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}{\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}} = \text{۶}\,\text{لا}_{\text{۱}} + \text{۳}\,\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}$$

اور جو عدد تغیّر کی شرح کو ناپتا ہے جبکہ $\text{لا} = \text{لا}_{\text{۱}}$ وہ ہے

$$\underset{\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{مف}\left(\text{۳}\,\text{لا}_{\text{۱}}^{\text{۲}}\right)}{\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}} = \underset{\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}} \to \text{۰}}{\text{نہا}} \left(\text{۶}\,\text{لا}_{\text{۱}} + \text{۳}\,\text{مف}\,\text{لا}_{\text{۱}}\right) = \text{۶}\,\text{لا}_{\text{۱}}$$

یہ استدلال متغیر کی کسی خاص قیمت پر منحصر نہیں ہے اور ہم اوپر کے نتیجہ کو اس شکل میں بیان کر سکتے ہیں "تفاعل $\text{۳}\,\text{لا}^{\text{۲}}$ بلحاظ لا کے شرح $\text{۶}\,\text{لا}$ سے بدلتا ہے" اور اس بیان میں یہ محذوف ہوتا ہے کہ جب $\text{لا} = \text{لا}_{\text{۱}}$ تو یہ شرح $\text{۶}\,\text{لا}_{\text{۱}}$ ہوتی ہے اور جب $\text{لا} = \text{لا}_{\text{۲}}$ تو شرح $\text{۶}\,\text{لا}_{\text{۲}}$ ہوتی ہے وغیرہ وغیرہ۔

اگر ہم اس طرح لا کو عام دلیل یا وجہ کے لئے، نیز اس وجہ کی کسی خاص قیمت ہر دو کے لئے استعمال کریں تو ہم علامتوں کی کثرت سے بچینگے اور طالب علم عام طور پر دیکھیگا کہ ایسا کرنے سے کوئی التباس پیدا نہیں ہوتا۔ اگر ایسا ہو تو اسے چاہئے کہ وجہ کی اس خاص قیمت کے لئے جس پر شرح معلوم کی گئی ہے لا کی بجائے لا۱ فرض کرے۔

اب ہم عام صورت پر غور کرتے ہیں، فرض کرو کہ ف (لا) لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے اور جب دلیل یا وجہ لا سے لا + مف لا تک بدلتی ہے جہاں مف لا مثبت یا منفی اضافہ ہے تو تفاعل ف (لا) سے ف (لا + مف لا) تک بدلتا ہے۔ تب تفاعل کے تغیر کی اوسط شرح جبکہ وجہ بقدر مف لا کے بدلے یہ ہوگی

مف ف (لا) / مف لا = [ف (لا + مف لا) - ف (لا)] / مف لا

اور وہ عدد جو اس شرح کو ناپتا ہے یہ ہے

نہا (مف لا ← ۰) مف ف (لا) / مف لا

ہم دیکھینگے کہ سب معمولی تفاعلوں کی صورت میں یہ انتہا ایک معین عدد ہے سوائے شاذ صورتوں میں لا کی خاص خاص قیمتوں کے لئے، بالعموم یہ انتہا لا پر مبنی ہو گی، اسے ہم ایک خاص نام دیتے ہیں "ف (لا)، کا مشتق بلحاظ لا" کے مشتق کی بجائے یہ نام بھی استعمال ہو سکتے ہیں "تفرقی سر" یا "محصلہ" یا "محصل تفاعل" یا "مشتق تفاعل" اور بعض تعلقات کی بنا پر ہم آگے دیکھینگے کہ اسے "ڈھال" یا "سلامی" بھی کہا جا سکتا ہے۔ مشتق معلوم کرنے کے عمل کو "تفرق" کہتے ہیں۔

مختلف ناموں کے علاوہ مشتق کو علامات یا رموز میں ہم کئی طرح سے تعبیر کریں گے۔ نہایت سہل ترکیب یہ ہے کہ تفاعلی حرف ف پر زبر دیدی جائے جیسے فَ (لا)۔ ایک اور ترکیب یہ ہے کہ تفاعل کے پہلے حرف عف* لکھ دیا جائے جس کے ساتھ لاحقہ ہو یا نہ ہو جیسے $\text{عف}_{\text{لا}}$ ف (لا) یا عف ف (لا)
اگر تفاعل کو ایک ہی حرف ما سے تعبیر کیا جائے تو بلحاظ لا کے ما کا جو مشتق ہے اس کی ترقیم اوپر کی طرح ہو گی

مَا، $\text{عف}_{\text{لا}}$ ما یا مَا عف ما۔ عام طور پر لاحقہ کو حذف کر دیا جاتا ہے اگر وجہ کے متعلق اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو۔
آخر میں اگر لا کی کسی خاص قیمت لا_1 کے لئے مشتق کی قیمت کو تعبیر کرنا مقصود ہو تو ذیل کی ترقیمیں اختیار کی جاتی ہیں۔

$$\text{فَ}(\text{لا}_1)\text{، } \left[\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ف}(\text{لا})\right]_{\text{لا}=\text{لا}_1}\text{، } \left[\text{مَا}\right]_{\text{لا}=\text{لا}_1}$$

در اصل مشتق کو اس خاص قیمت پر ہی مرتب کیا جاتا ہے، لیکن اس امر کو واضح طور پر دکھانے کے لئے کہ مشتق بھی لا کا تفاعل ہے یہ ضروری معلوم ہوتا ہے کہ اسکی قیمت کو اسی متغیر لا سے تعبیر کیا جائے جو عام دلیل کے لئے استعمال ہوتا ہے۔ پس ہمیں ذیل کی تعیینی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\text{فَ}(\text{لا}) = \text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ف}(\text{لا}) = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{مف ف}(\text{لا})}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{ف}(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{ف}(\text{لا})}{\text{مف لا}}$$

$$\text{مَا} = \text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$$

اس عمل سے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اُسے ف (لا) کا تفرقی سر یا مشتق تفاعل بلحاظ لا کے کہتے ہیں۔ یہ تفاعل

* عف عامل تفرقی کی مختصر ترقیم خیال کیا جا سکتا ہے

اُس شرح کو ناپتا ہے یا اختصاراً یہ تفاعل وہ شرح ہے جس کے موافق لا کی کسی خاص قیمت پر اصلی تفاعل بلحاظ اپنی وجہ کے بدلتا ہے۔

لا، ف، ما کی بجائے اور حروف استعمال ہوسکتے ہیں، مثلاً

$$\text{فہَ}(\text{ت}) = \text{عف}_{\text{ت}}\ \text{فہ}(\text{ت}) = \text{نہا}_{\text{مف ت}\to 0} \frac{\text{مف ف}(\text{ت})}{\text{مف ت}}$$

جہاں فہَ (ت) بلحاظ ت کے فہ (ت) کا مشتق ہے۔
ان جملات "مشتق بلحاظ لا کے" یا "تغیر کی شرح بلحاظ وقت کے" کی بجائے یہ جملات ہم بعض اوقات اختصاراً استعمال کرینگے "ف (لا) کا لا، مشتق" یا "تفاعل کے تغیر کی زمانی شرح"

مثال ۱۔ $\text{عف}_{\text{لا}} (۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۳) = ۶\,\text{لا} - ۴$

کیونکہ $\text{عف}_{\text{لا}} (۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۳) = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \dfrac{\text{مف}(۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۳)}{\text{مف لا}}$

اور $\text{مف}(۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۳) = ۳(\text{لا} + \text{مف لا})^۲ - ۴(\text{لا} + \text{مف لا}) + ۳ - (۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۳)$

$= ۶\,\text{لا مف لا} + ۳(\text{مف لا})^۲ - ۴\,\text{مف لا}$

اسلئے $\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \dfrac{\text{مف}(۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۳)}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} (۶\,\text{لا} + ۳\,\text{مف لا} - ۴)$

$= ۶\,\text{لا} - ۴$

مثال ۲۔ $\text{عف}_{\text{ح}} \left(\dfrac{\text{م}}{\text{ح}}\right) = -\dfrac{\text{م}}{\text{ح}^۲}$ (م مستقل)

کیونکہ $\text{مف}\left(\dfrac{\text{م}}{\text{ح}}\right) = \dfrac{\text{م}}{\text{ح} + \text{مف ح}} - \dfrac{\text{م}}{\text{ح}} = \dfrac{-\text{م مف ح}}{\text{ح}^۲ + \text{ح مف ح}}$

اس لئے $عف_{ح}\left(\frac{\overset{م}{۱}}{ح}\right) = \underset{مف ح \to ۰}{نہایہ} \frac{مف\left(\frac{\overset{م}{۱}}{ح}\right)}{مف ح} = - \frac{\overset{م}{۱}}{ح^{۲}}$

اگر ح = ۰ تو اوپر کا عمل نہیں ہو سکتا۔

۵۲۔ بڑھنے اور گھٹنے والے تفاعل۔ انتہا اور مشتق کی تعریفات کے مطابق

$$\frac{مف\ ف\ (لا)}{مف\ لا} = فَ\ (لا) + عہ$$

جہاں عہ ایسا متغیر ہے جو بہت چھوٹا ہے جبکہ مف لا بہت چھوٹا ہو اور جو مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ مف لا مائل بہ صفر ہو۔ [$\frac{مف\ ف\ (لا)}{مف\ لا}$ اور فَ (لا) ایک ہی نتیجے کو تعبیر نہیں کرتے، اس اختلاف کے لئے ملاحظہ ہوں دفعہ ۳۲ کی مثالیں ۴، ۵، ۶]، پس اگر فَ (لا) صفر نہ ہو تو مف لا کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے فَ (لا) + عہ اور اسلئے $\frac{مف\ ف\ (لا)}{مف\ لا}$ کی علامت وہی ہوگی جو فَ (لا) کی ہے [مقابلہ کرو دفعہ ۴۵ مسئلہ ا کے ساتھ] اس لئے مف ف (لا) کی علامت وہی ہوگی جو فَ (لا) مف لا کی ہے۔

اب فرض کرو کہ مف لا مثبت اضافہ ہے، تب مف ف (لا) مثبت ہوگا اگر فَ (لا) مثبت ہو اور منفی ہوگا اگر فَ (لا) منفی ہو، لیکن

مف ف (لا) = ف (لا + مف لا) - ف (لا)

اس لئے ف (لا + مف لا) جبریہ لحاظ سے ف (لا) سے بڑا ہوگا اگر فَ (لا) مثبت ہو اور کم ہوگا اگر فَ (لا) منفی ہو۔ دوسرے الفاظ میں لا کے بڑھنے سے ف (لا)

بڑھتا جائیگا جبتک فَ (لا) مثبت رہے لیکن لا کے بڑھنے سے ف (لا) گھٹتا رہے گا جبتک کہ فَ (لا) منفی رہے، یاد رہے کہ یہ بڑھنا گھٹنا جبریہ لحاظ سے ہے نہ کہ عددی لحاظ سے۔

اگر مف لا منفی اضافہ ہے تو مف ف (لا) منفی ہوگا اگر فَ (لا) مثبت ہو اور مثبت ہوگا اگر فَ (لا) منفی ہو۔ یعنی لا کے گھٹنے سے ف (لا) گھٹیگا جبتک کہ فَ (لا) مثبت ہو، لیکن لا کے گھٹنے سے ف (لا) بڑھے گا جبتک کہ فَ (لا) منفی ہو۔

پس معلوم ہوا کہ فَ (لا) کی محض علامت اس امر کا فیصلہ کرسکتی ہے کہ لا کے بدلنے سے تفاعل کیسے بدلتا ہے، اگر ف (لا) = ا لا + ب تو فَ (لا) = ا، ظاہر ہے کہ اس صورت میں اوپر کے نتائج ان بیانات کے بالکل مطابق ہیں جو یکساں طور پر بدلنے والے تفاعلوں کے متعلق دفعہ ۳۳ میں درج کئے گئے۔

تعریف۔ جو تفاعل اپنی دلیل یا وجہ کے بڑھنے سے بڑھے اور وجہ کے گھٹنے سے گھٹے اسے بڑھنے والا تفاعل کہتے ہیں اور جو وجہ کے بڑھنے سے گھٹے اور وجہ کے گھٹنے سے بڑھے اوسے گھٹنے والا تفاعل کہتے ہیں۔

چونکہ عف (۳ لا^{۲}) = ۶ لا، اس لئے ۳ لا^{۲}، لا کی تمام منفی قیمتوں کے لئے گھٹنے والا تفاعل ہے اور لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے بڑھنے والا تفاعل ہے، یہ تفاعل گھٹنا بند کرتا ہے اور بڑھنا شروع کرتا ہے جب یہ صفر کی قیمت میں سے گذرتا ہے، اس لئے جب لا = ۰ تو تفاعل کی اقل قیمت حاصل ہوتی ہے (دفعہ ۱۷، (۴)) اور یہ قیمت صفر ہے۔

قابل توجہ ہے کہ جب لا = ۰ تو مشتق صفر ہوتا ہے یعنی اقل قیمت کے لئے تغیر کی شرح صفر ہوتی ہے۔

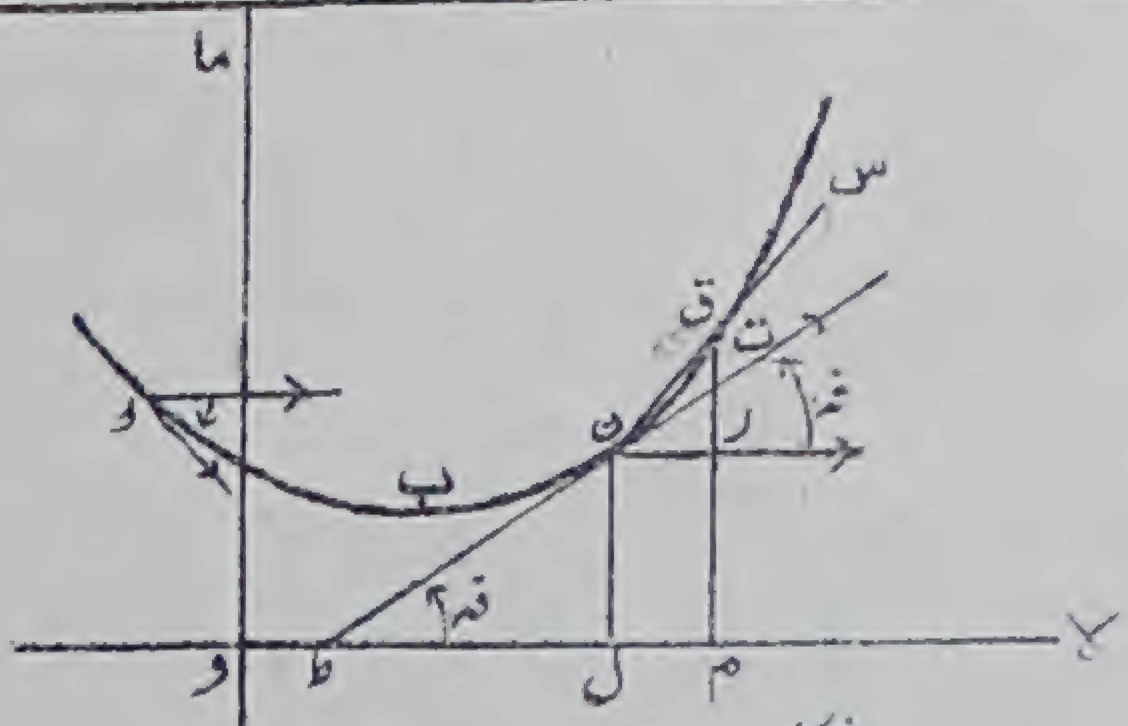
۳لا² - ۴لا + ۳ کا مشتق ۶لا - ۴ ہے اسلئے جبتک ۶لا - ۴ مثبت رہے یعنی جبتک ۶لا ۴ سے بڑا ہو یعنی لا، ۲/۳ سے زیادہ ہو یہ تفاعل بڑھتا ہے اور بخلاف اسکے جبتک لا (جبریہ لحاظ سے) ۲/۳ سے کم رہے یہ تفاعل گھٹتا ہے۔ جب لا = ۲/۳ تو تفاعل کی قیمت اقل ہوتی ہے اور یہ اقل قیمت ۵/۳ ہے۔ یہاں پھر ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا = ۲/۳ تو مشتق صفر ہوتا ہے یعنی اقل قیمت پر تفاعل کے تغیر کی شرح صفر ہے۔

اچل قیمتیں۔ تفاعلوں کے بڑھنے اور گھٹنے کے متعلق اوپر جو نتائج حاصل کئے گئے ہیں وہ لا کی ان قیمتوں کے لئے درست نہیں رہتے جن کے لئے فَ (لا) صفر ہوتا ہے۔ چونکہ فَ (لا) تفاعل کی شرح تغیر کو ناپتا ہے اسلئے تفاعل کی ان قیمتوں کو جن کے لئے فَ (لا) صفر ہوتا ہے اچل قیمتیں یا اقامت کی قیمتیں کہتے ہیں۔

مثال۔ ثابت کرو کہ لا = ۰ کے لئے تفاعل لا³ + ۱ کی قیمت اچل ہے اور لا کی اور محدود قیمتوں کے لئے یہ بڑھنے والا تفاعل ہے۔

۵۳۔ مشتق کی ہندسی تعبیر۔ تفاعل کی ترسیم سے مشتق کی خاص طور پر کار آمد تعبیر حاصل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ (شکل ۲۸، ا، ب) میں فَ (لا) کی ترسیم بنائی گئی ہے۔ ترسیم پر کوئی نقطہ ن لو۔ تب و ل = لا اور ل ن = ما = فَ (لا)



شکل ۲۸ (ا)

فرض کرو کہ ل م = مف لا، تب و م = لا + مف لا،
م ق = ما + مف ما = ف (لا + مف لا)، ن سے
محور لا کے متوازی خط کھینچو جو م ق یا م ق ممدودہ سے
ر پر ملے، تب علامت اور مقدار دونوں کے لحاظ سے

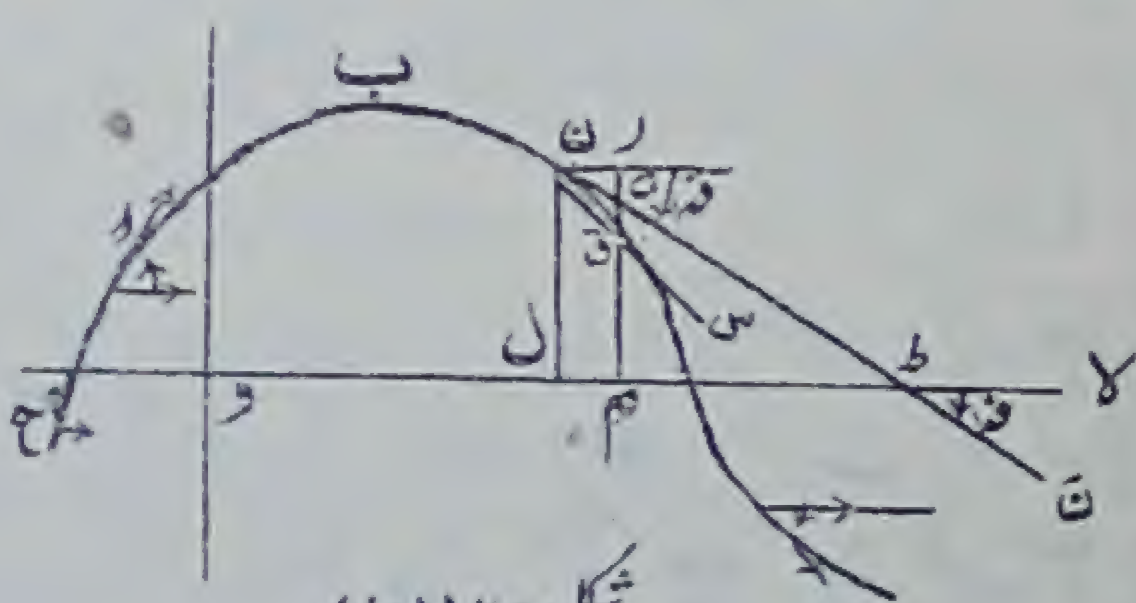
ر ق = م ق - م ر = م ق - ل ن
= ف (لا + مف لا) - ف (لا) = مف ف (لا)

اور مس ر ن ق = $\frac{\text{ر ق}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{ر ق}}{\text{ل م}} = \frac{\text{مف ف (لا)}}{\text{مف لا}}$

جب، مف لا مائل بہ صفر ہوتا ہے تو حاصل قسمت $\frac{\text{مف ف (لا)}}{\text{مف لا}}$
بطور اپنی انتہا کے فَ (لا) کی طرف مائل ہوتا ہے۔
لیکن جب مف لا مائل بہ صفر ہوتا ہے تو
م نقطہ ل پر اور ق نقطہ ن پر منطبق ہونے کو
ہوتا ہے۔

اب چونکہ مس ر ن ق ایک معین قیمت فَ (لا)
کی طرف مائل ہوتا ہے، اس لئے زاویہ ر ن ق بھی ایک
معین زاویہ کی طرف مائل ہوتا ہے، اس لئے قاطع خط

ن ق س بھی انتہا میں ایک معین محل یا مقام ن ت اختیار کرتا ہے۔
بموجب تعریف (دفعہ ۳۹ مثال ۷) خط ن ت منحنی کے نقطہ ن پر کا مماس ہے۔
اس لئے فَ (لا) اُس زاویہ کا مثلثی مماس ہے جو ترسیم کے نقطہ ن (لا، ف (لا)) پر کا ہندسی مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے مشتق کی اس خاصیت کی وجہ سے فَ (لا) کو منحنی کا ڈھال بھی کہتے ہیں (ملاحظہ ہو دفعہ ۲۲)
شکل ۲۸ (ا) میں مماس ن ت محور لا کے ساتھ مثبت زاویہ رن ت یا لا ط ن بناتا ہے، شکل ۲۸ (ب) میں یہ محور لا کے ساتھ منفی زاویہ رن ت یا لا طَ نَ بناتا ہے، ہم اس زاویہ کو بالعموم فہ سے تعبیر کریں گے، اس لئے
مس فہ = فَ (لا)



شکل ۲۸ (ب)

اوپر کی دونوں شکلوں میں مف لا کو مثبت لیا گیا ہے، مگر ظاہر ہے کہ یہی نتائج حاصل کئے جا سکتے ہیں اگر مف لا منفی ہو یعنی ق، ن کے بائیں جانب ہو۔
خاص صورتوں میں ایسا ہوگا کہ ن تک ہم صرف ایک ہی طرف سے پہنچ سکیں گے، مثلاً اگر ف (لا) = $\sqrt{لا^۳}$ تو لا منفی قیمتیں اختیار نہیں کر سکتا، اس لئے فَ (۰) معلوم

کرنے میں مف لا کو لازماً مثبت لینا چاہئیے، اس صورت میں

$$\text{فَ(٠)} = \underset{\text{مف لا}\to ٠}{\text{لہا}} \frac{\text{ف(مف لا)} - \text{ف(٠)}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to ٠}{\text{لہا}} \frac{\sqrt{(\text{مف لا})^{۳}}}{\text{مف لا}}$$

$$= \underset{\text{مف لا}\to ٠}{\text{لہا}} \sqrt{\text{مف لا}} = ٠$$

اور مماس محور لا کے ساتھ صفر زاویہ بناتا ہے، چونکہ فَ(٠) = ٠ اسلئے محور لا خود مبدا پر کا مماس ہے۔

مثال۔ ۳ لا^۲ - ۹ لا + ۳ کی ترسیم کا ڈھال ان نقطوں پر معلوم کرو جن کے فصلے -۱، ۰، $\frac{۲}{۳}$، ۱، ۲ ہیں۔

۵۴۔ مشتق، تفاعل کی ترسیم بنانے میں کسطرح مدد دیتا ہے

دفعہ ۵۲ میں مشتق کی علامت کے متعلق جو نتائج حاصل کئے گئے ہیں وہ تفاعل کے تغیرات کی ذہنی تصویر پیدا کرنے میں مدد دیتے ہیں، ایسے ہی دفعہ ۵۳ کے نتائج بھی تفاعل کی ترسیم بنانے میں کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

دفعہ ۵۳ کی تصویروں کو معیاری شکلیں قرار دیا جائے گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ڈھال فَ (لا) مثبت ہو تو ترسیمی نقطہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے جبکہ نقطہ لا محور لا پر دائیں جانب حرکت کرے، جیسے شکل ۲۸ (ا) کی قوس ب ن ق پر اور شکل ۲۸ (ب) کی قوس ج ا ب پر۔ اگر ڈھال منفی ہو تو ترسیمی نقطہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے جبکہ نقطہ لا دائیں جانب حرکت کرے جیسے شکل ۲۸ (ا) کی قوس ا ب پر اور شکل ۲۸ (ب) کی قوس ب ن ق پر۔ نقطہ ب پر ڈھال صفر ہے اور یہاں مماس محور لا کے متوازی ہے، ترسیمی نقطہ ایک لمحہ کے لئے اچل یا ساکن ہو جاتا ہے۔

طالب علم ترسیمی نقطہ کی اوپر وار حرکت سے یہ نہ سمجھے کہ نقطہ محور لا سے لازماً پرے حرکت کرتا ہے، مثلاً شکل (۲۸ ب) میں ح کے نزدیک ترسیمی نقطہ اوپر کی طرف حرکت کرنے میں محور لا کے قریب آتا ہے، پس اگر نقطہ لا دائیں جانب حرکت کرے تو ترسیمی نقطہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے جبکہ م ق جبریہ طور پر ل ن سے بڑا ہو اور ترسیمی نقطہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے جبکہ م ق جبریہ طور پر ل ن سے چھوٹا ہو۔ اور یہ اس لئے کہ م ق - ل ن = فَ (لا) مف لا (تقریباً) اور اگر فَ (لا) مثبت ہو اور مف لا کو بھی مثبت قرار دیا جائے تو م ق لازماً ل ن سے بڑا ہوگا۔ اگر ل ن اور م ق دونوں منفی ہوں تو ظاہر ہے کہ م ق، ل ن سے تعداداً کم ہوگا۔

بطور مشق کے ف (لا) = لا^{3} - ۳ لا + ۱ کی ترسیم کھینچو، اس سے قبل دفعہ ۲۳ میں یہ ترسیم بنائی گئی ہے۔

فَ (لا) = ۳ لا^{2} - ۳ = ۳ (لا + ۱) (لا - ۱)

جب تک کہ لا، -۱ سے کم ہوتا ہے یعنی جبتک کہ نقطہ لا نقطہ -۱ کے بائیں جانب ہوتا ہے ہر دو لا + ۱ اور لا - ۱ منفی ہوتے ہیں اور اس لئے فَ (لا) مثبت ہوتا ہے۔ اسلئے معلوم ہوا کہ جیسے نقطہ لا محور لا کے بائیں سرے سے نقطہ -۱ تک حرکت کرتا ہے ترسیمی نقطہ بالتدریج اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے۔

جب تک کہ لا، -۱ سے بڑا لیکن ۱ سے چھوٹا ہوتا ہے لا + ۱ مثبت اور لا - ۱ منفی ہوتا ہے، اس لئے فَ (لا) منفی ہوتا ہے، پس جب نقطہ لا، -۱ سے +۱ تک حرکت کرتا ہے تو ترسیمی نقطہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔

اگر لا ایک سے بڑا ہو تو فَ (لا) مثبت ہوتا ہے۔ اسلئے جب نقطہ لا نقطہ ۱ سے دائیں سرے تک حرکت کرتا ہے تو ترسیمی نقطہ بالتدریج اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے۔

ترسیم پر موڑ کے نقطہ لا = -۱ اور لا = +۱ ہیں، جہاں لا = -۱ وہاں تفاعل کی اعظم قیمت حاصل ہوئی ہے، وہ ۳ ہے اور جہاں لا = +۱ وہاں اقل قیمت -۱ حاصل ہوتی ہے۔

۵۵ - ممکن ہے کہ مشتق ایک معین عدد نہ ہو۔ یہ ممکن ہے کہ $\frac{\text{مف ف (لا)}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا کوئی معین عدد نہ ہو۔ ایسی دو مشہور صورتیں ہیں۔

(۱) جہاں فَ (لا)، لا کی خاص قیمتوں کے لئے لامتناہی ہو۔ مثلاً اگر ف (لا) = $\sqrt[3]{\text{لا}}$

$$\text{فَ}(0) = \lim_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{مف لا}} - 0}{\text{مف لا}} = \lim_{\text{مف لا}\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\text{مف لا}}} = \infty$$

لیکن لا کی اور مثبت محدود قیمتوں کے لئے

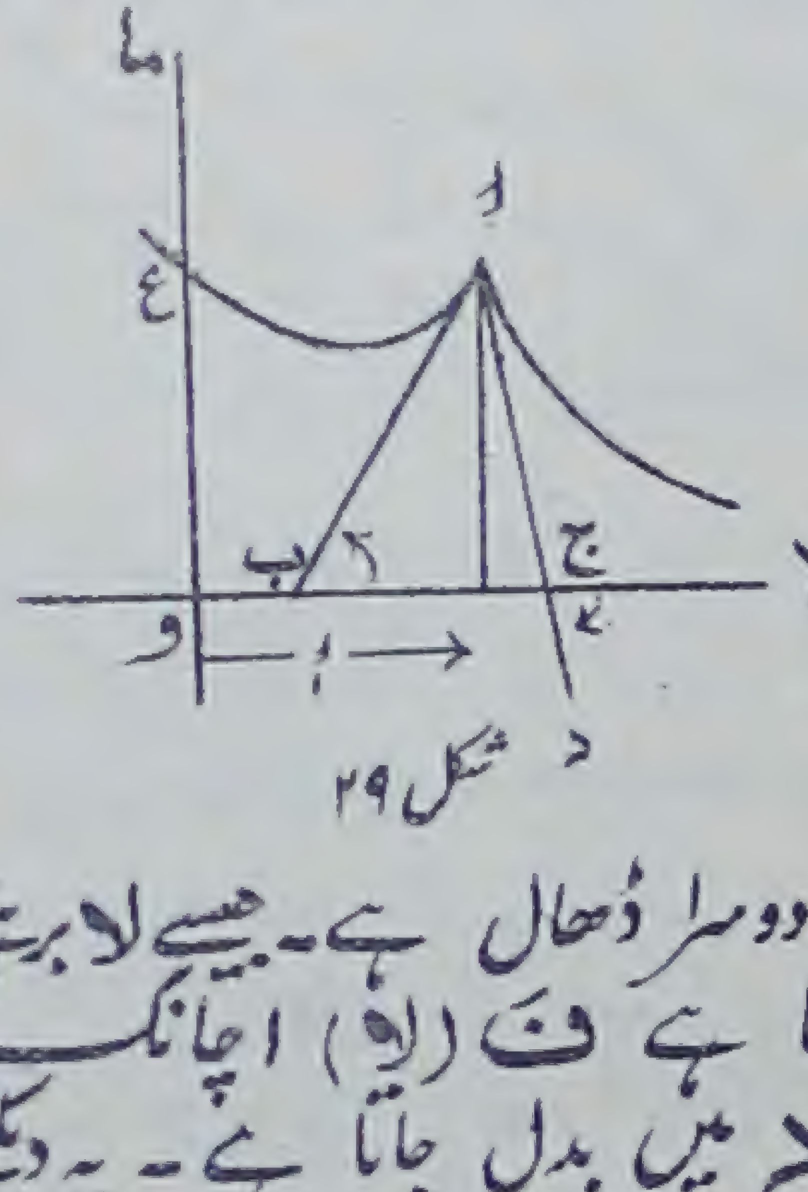
$$\text{فَ}(\text{لا}) = \lim_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{لا} + \text{مف لا}} - \sqrt[3]{\text{لا}}}{\text{مف لا}}$$

$$= \lim_{\text{مف لا}\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\text{لا} + \text{مف لا})} + \sqrt[3]{\text{لا}}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{\text{لا}}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا مبدأ کے پاس آتا ہے منحنی کا ڈھال بڑھتا جاتا ہے، اور بالآخر جب، لا مبدأ پر منطبق ہوتا ہے تو ترسیم کا مماس محور لا پر عمود وار ہو جاتا ہے۔ واضح ہو کہ بالعموم ترسیم کے ایسے نقطہ پر کا مماس جہاں پر فَ (لا) لامتناہی ہو محور لا پر عمود وار ہوگا۔ جب فَ (لا)، لا کی محدود قیمتوں کے لئے لامتناہی ہو جیسا کہ

$\frac{1}{لا}$ کی صورت میں لا = ۰ کے لئے، تو بالعموم یہ دیکھا جائیگا کہ جیسے لا اس محدود قیمت کے قریب آتا ہے ف (لا) بھی مائل بہ لاانتہا ہی ہوتا ہے، اس لئے ہم یہ کہ سکتے ہیں کہ جو مماس ایسے تفاعل کے منحنی سے لاانتہا فاصلہ پر ملتا ہے وہ محور لا پر عمود دار ہوتا ہے۔ ایسے مماس کو متقارب کہتے ہیں (ملاحظہ ہوں دفعہ ۲۴ کی ترسیمیں)

(۲) ایسا ممکن ہے کہ ترسیم کے خاص نقطوں پر ایک کی بجائے دو مماس ہوں جیسا کہ نقطہ ا پر، ملاحظہ ہو شکل ۲۹۔ اگرچہ تفاعل مسلسل ہے جبکہ لا = ا، ڈھال فَ (لا) مسلسل نہیں ہے، اگر ہم بائیں جانب سے ا کے قریب آئیں تو منحنی کا کوئی ایک ڈھال ہے اور



شکل ۲۹

اگر دائیں جانب سے آئیں تو دوسرا ڈھال ہے۔ جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت ا میں سے گذرتا ہے فَ (لا) اچانک مس لاب ا سے مس لاجد میں بدل جاتا ہے۔ یہ دیکھنے میں آئے گا کہ تمام معمولی تفاعلوں کی صورت میں سوائے لا کی خاص خاص قیمتوں کے لئے مشتق فَ (لا) بھی مسلسل تفاعل ہے، اس لئے نہایت مناسب طریق سے ایسے تفاعلوں پر ان کی ترسیموں کے ذریعہ بحث ہو سکتی ہے۔

۵۶۔ روانی یا بہاؤ۔ نیوٹن نے احصا کے متعلق اپنی تحقیق کی بنیاد اس تخیل پر قائم کی کہ ریاضی مقادیر اسطرح

بڑھتی گھٹتی ہیں گویا ان میں مسلسل حرکت یا بہاؤ ہے۔ اُسنے کسی متغیر کے بدلنے کی زمانی شرح کو اس کی روانی یا بہاؤ خیال کیا اور خود متغیر کو رواں یا بہنے والا سیّال فرض کیا۔ اُس نے ترقیم پر اتنا زور نہیں دیا لیکن بعض اوقات متغیر کے بہاؤ کو متغیر کے علامتی حرف (مثلاً لا) پر نقطہ دینے سے (یعنی لاْ) تعبیر کیا۔ اب تک علم حیل کی کتابوں میں تغیر کی زمانی شرح کو اکثر اوقات اسی طرح تعبیر کیا جاتا ہے۔

ہم یہاں ایک مثال کے ذریعہ تغیر کی زمانی شرح کی توضیح کرینگے۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ منحنی ا ن ق (شکل ۲۸) پر حرکت کرتا ہے جس کی مساوات ما = ف (لا) ہے اور کسی مقررہ آن سے ت سکنڈ کے بعد یہ نقطہ ن (لا، ما) پر ہوتا ہے۔ نیز قوس کو منحنی کے ثابت نقطہ ا سے ناپنا شروع کیا جاتا ہے

اور قوس ا ب ن کا طول (مثلاً فٹوں میں) س ہے۔ اس طرح لا، ما، س سب ت کے تفاعل ہوں گے۔

فرض کرو کہ جب وقت ت بڑھکر ت + مف ت ہو جاتا ہے تو ذرہ ن سے چلکر ق پر پہنچتا ہے (شکل ۲۸، ا، ب)۔ نیز لا، ما، س کے اضافے بالترتیب مف لا، مف ما، مف س ہیں۔ عام تعریفات کی بنا پر ذرہ کا ہٹاؤ وقت مف ت میں وتر ن ق ہے اور اس وقفہ میں ذرہ کی

اوسط رفتار $\frac{\text{ہٹاؤ}}{\text{مف ت}}$ ہے اور اس کی سمت، زاویہ

ر ن ق سے تعبیر ہوتی ہے۔ ٹھیک وقت ت پر رفتار حاصل کرنے کے لئے اوسط رفتار کی انتہا معلوم کرنی چاہئے جبکہ مف ت مائل بہ صفر ہو۔

اب زاویہ ر ن ق کی انتہا ر ن ت ہے، پس وقت ت پر رفتار کی سمت مماس ن ت کی سمت ہوگی۔ رفتار کی مقدار معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ انتہا معلوم کرنی ہوگی

$$\text{نہا}_{\text{مف ت} \to 0} \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف ت}}$$

اسے بطور اصول متعارفہ کے ہم مان لیتے ہیں کہ جب وتر ن ق بہت چھوٹا ہو تو قوس اور وتر تقریباً مساوی ہوتے ہیں یا انتہاؤں کی زیادہ معین اور محدود زبان میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ

$$\text{نہا}_{\text{وتر ن ق} \to 0} \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \right) = 1$$

اب $\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف ت}} = \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \times \frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف ت}} = \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}}$

چونکہ مف س ← ۰ جبکہ مف ت ← ۰، اس لئے

$$\text{رفتار کی مقدار} = \text{نہا}_{\text{مف ت} \to 0} \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف ت}} = \text{نہا}_{\text{ن ق} \to 0} \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \right) \times \text{نہا}_{\text{مف ت} \to 0} \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}} = \text{سَ}$$

اس کے صرف یہ معنی ہیں کہ رفتار کی مقدار س کے تغیر کی زبانی شرح ہے اور جملہ سَ رفتار کی تعریف کو رموز میں بیان کرنے کا ایک طریقہ ہے۔ لیکن شرح کا تخیل فی نفسہ خواہ کتنا ہی سادہ کیوں نہ ہو طالب علم کو بار بار اس عمل کی طرف عود کرنا چاہئے جس سے یہ عدد حاصل کیا جاتا ہے۔

نیز لاَ، لا کے تغیر کی شرح ہے یعنی جس شرح سے

نقطہ دائیں جانب حرکت کرتا ہے وہ لاَ ہے، اسی طرح ماَ وہ شرح ہے جس کے موافق نقطہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے، اِن دو شرحوں کو رفتار کے اجزائے ترکیبی کہتے ہیں جو محددوں کے محوروں کے متوازی ہیں۔
شکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2 = (\text{وتر ن ق})^2 = \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^2 (\text{مف س})^2$$

اِس لئے

$$\left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}}\right)^2 = \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^2 \left(\frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}}\right)^2$$

انتہا لینے سے جبکہ مف ت ← ۰ حاصل ہوگا

$$(\text{لاَ})^2 + (\text{ماَ})^2 = (\text{سَ})^2$$

یہ ضابطہ عام طور پر حاصل رفتار سَ کے معلوم کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے جبکہ اِس کے اجزائے ترکیبی لاَ اور ماَ معلوم ہوں۔

مثال۔ فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ت}$، $\text{ما} = \text{ت}^2$

ت کی ہر قیمت کے لئے $\text{ما} = \text{لا}^2$ یعنی نقطہ ن ہمیشہ ایک مکافی پر واقع ہوتا ہے جس کی مساوات $\text{ما} = \text{لا}^2$ ہے۔
جزوی رفتاریں یہ ہیں $\text{لاَ} = ۱$، $\text{ماَ} = ۲\,\text{ت}$ اور حاصل رفتار کی مقدار

$$\text{سَ} = \sqrt{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2} = \sqrt{۱ + ۴\,\text{ت}^2}$$

، اِس رفتار کی سمت ہے

$$\text{مس فہ} = \text{عف ما} = ۲\,\text{لا} = ۲\,\text{ت}$$

ملاحظہ ہو کہ نقطہ کا طریق اوپر ایسی شکل میں دیا گیا ہے جس سے

معلوم ہوتا ہے کہ کسی معلومہ آن میں نقطۂ مذکورہ کہاں ہے' کیونکہ اگر آن دی ہوئی ہو یعنی ت کی قیمت معلوم ہو تو لا' ما کی قیمتیں معلوم ہوسکتی ہیں۔ لا' ما کے لئے جو ت میں مساواتیں ہیں اُن سے ت کو ساقط کرنے سے ہمیں طریق پر کے ہر نقطہ کے محددوں میں رشتہ معلوم ہوتا ہے جو طریق کی مساوات مروج شکل میں ہے۔ [ملاحظہ ہو مشق ۴ سوال ۱۰' مشق ۶ سوالات ۴' ۶' ۱۰' ۱۱]

اب ہم یہ دیکھینگے کہ معمولی تفاعلوں کے مشتق کس طرح معلوم کئے جاتے ہیں' مشقوں میں کئی ایسے سوال ملینگے جن سے ہندسی اور طبیعی سوالات میں مشتق کے استعمال کی توضیح ہوتی ہے جب طالب علم کو اعمال تفرق میں کچھہ دسترس حاصل ہو جائیگی تو اس کے بعد ہم اس طرح کی اور مثالوں پر غور کرینگے۔

۵۷ ۔ قوت کا مشتق ۔ تعریف کے بموجب

$$\text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^{\text{ن}}) = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to .}\ \frac{(\text{لا} + \text{مف لا})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{مف لا}}$$

اور دفعہ ۴۷ کی رُو سے یہ انتہا ن $\text{لا}^{\text{ن}-1}$ ہے۔ پس

$$\text{عف}(\text{لا}^{\text{ن}}) = \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

پس اساس کی کسی قوت کا مشتق بلحاظ اساس کے' قوت نما کے ساتھ ضرب دینے اور اساس کے قوت نما کو بقدر ایک کے کم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ مشتق' لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے مسلسل ہے سوائے قیمت لا = ۰ کے لئے اور اس آخری صورت میں بھی یہ غیر مسلسل تب ہوگا جبکہ ن-۱ منفی ہو یعنی جبکہ ن جبریہ لحاظ سے ایک سے کم ہو۔

نتیجہ صریح ۔ اگر ا مستقل ہو تو $\text{عف}_{\text{لا}}(\text{ا}\ \text{لا}^{\text{ن}}) = \text{ن}\ \text{ا}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}$

مثال ۱۔ $\text{عف}(\text{لا}^{۵}) = ۵\,\text{لا}^{۴}$، $\text{عف}(\sqrt{\text{لا}^{۵}}) = \text{عف}(\text{لا}^{\frac{۵}{۲}}) = \frac{۵}{۲}\,\text{لا}^{\frac{۳}{۲}}$

$$\text{عف}\left(\frac{۵}{\sqrt{\text{لا}}}\right) = \text{عف}\left(۵\,\text{لا}^{-\frac{۱}{۲}}\right) = -\frac{۱}{۲}\times ۵\,\text{لا}^{-\frac{۳}{۲}} = -\frac{۵}{۲\sqrt{\text{لا}^{۳}}}$$

مثال ۲۔ تفاعیل ذیل کے مشتق بلحاظ ت کے معلوم کرو۔

$$\text{ت}^{۵}،\quad \frac{۲}{\text{ت}^{۲}}،\quad ۳\sqrt{\text{ت}}،\quad \frac{۴}{\sqrt{\text{ت}}}$$

مثال ۳۔ لا کا وہ تفاعل معلوم کرو جس کا مشتق $\text{لا}^{۲}$ ہو۔ مشتق معلوم کرنے کے عمل کو اُلٹا دو، یعنی قوت نما کو بقدر ایک کے بڑھاؤ اور نتیجہ کو نئے قوت نما پر تقسیم کرو۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ جس تفاعل کا لا، مشتق $\text{لا}^{۲}$ ہے وہ $\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$ ہے، اس کی صحت کی جانچ تفرق کرنے سے ہو سکتی ہے۔

مثال ۴۔ ذیل کے ہر ایک تفاعل کے جواب میں وہ تفاعل معلوم کرو جس کا یہ مشتق ہو

$$۵\,\text{لا}^{۴}،\quad \sqrt{\text{لا}}،\quad \frac{۲}{\sqrt{\text{لا}}}،\quad \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}،\quad \frac{۳}{\text{لا}^{۵}}$$

۵۸۔ عام مسائل۔ ذیل کے مسائل کثرت سے استعمال ہوتے ہیں، ان کی بحث میں ہم لا کو متغیر متبوع فرض کریں گے اگر یہ ذہن میں رہے تو مشتقوں کی ترقیم میں عامل کے لاحقہ کو حذف کر دینے میں کوئی ہرج نہ ہوگا۔

مسئلہ ۱۔ کسی تفاعل کے ساتھ جمع یا اضافہ کی شکل میں جو مستقل واقع ہو وہ عمل تفرق میں غائب ہو جاتا ہے یا اگر دو تفاعل صرف بلحاظ کسی مستقل کے ایکدوسرے سے مختلف ہوں تو ان کے مشتق وہی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (لا) = فا (لا) + ج جہاں ج مستقل ہے اور لا کے بدلنے سے نہیں بدلتا۔ پس ف (لا) اور فا (لا) صرف بقدر مستقل ج کے ایکدوسرے سے مختلف ہیں۔

[ف (لا + مف لا) - ف (لا)] / مف لا = ([فا (لا + مف لا) + ج] - [فا (لا) + ج]) / مف لا

= [فا (لا + مف لا) - فا (لا)] / مف لا

اِن مساوی مقداروں کی انتہا لینے سے جبکہ مف لا مائل بہ صفر ہو حاصل ہو گا

ف َ (لا) = فا َ (لا)

مثال عف (لا³ - ۴) = ۳ لا²

مسئلہ ۲۔ تفاعل کا مستقل جزوِ ضربی اس کے مشتق میں بھی بطور جزوِ ضربی کے قائم رہتا ہے۔

کیونکہ عف [ج ف (لا)] = نہا [ج ف (لا + مف لا) - ج ف (لا)] / مف لا

= ج نہا [ف (لا + مف لا) - ف (لا)] / مف لا

اِسلئے عف [ج ف (لا)] = ج عف ف (لا)

مسئلہ ۳۔ اگر تفاعلوں کی کسی محدود تعداد کا جبریہ حاصل جمع دیا ہوا ہو تو اِس حاصل جمع کا مشتق اِن تفاعلوں کے مشتقوں کے متناظر جبریہ حاصل جمع کے مساوی ہو گا۔

فرض کرو کہ ف (لا)، فا (لا)، فہ (لا)، لا کے تین تفاعل ہیں، یہ بآسانی معلوم ہو گا کہ

مف [ف (لا) + فا (لا) - فہ (لا)] = مف ف (لا) + مف فا (لا) - مف فہ (لا)

اسلئے مف لا پر تقسیم کرنے اور انتہا لینے سے حاصل ہو گا

عف [ف (لا) + فا (لا) - فہ (لا)] = عف ف (لا) + عف فا (لا) - عف فہ (لا)

یہی ثبوت تین سے زیادہ تفاعلوں کی صورت میں بھی صادق آئیگا۔ لیکن یاد رہے کہ تفاعلوں کی تعداد محدود ہونی چاہیئے، اگر تعداد لا متناہی ہو تو انتہاؤں کے متناظر مسئلہ کی طرح یہ ضروری نہیں کہ مسئلہ درست رہے [دفعہ ۴۲ مسئلہ ۱]

مثال۔ عف ($\text{۳ لا}^{۲}$ - ۵ لا + ۱) = عف ($\text{۳ لا}^{۲}$) - عف (۵ لا) [مسئلہ ۳ اور ۱]

= ۳ عف ($\text{لا}^{۲}$) - ۵ عف (لا) [مسئلہ ۲]

= ۶ لا - ۵

مسئلہ ۴۔ عف (ع و) = و عف ع + ع عف و جہاں ع اور و لا کے تفاعل ہیں۔

جب، لا کا اضافہ مف لا ہو تو فرض کرو کہ ع، و کے اضافے بالترتیب مف ع، مف و ہوتے ہیں، تب

مف (ع و) = (ع + مف ع) (و + مف و) - ع و

= و مف ع + ع مف و + مف ع مف و

$$\text{اسلئے } \frac{\text{مف (ع و)}}{\text{مف لا}} = \text{و} \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} + \text{ع} \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} \times \text{مف و}$$

جب مف لا مائل بہ صفر ہوتا ہے تو مف و بھی مائل بہ صفر ہوتا ہے۔ بائیں جانب کی آخری رقم کی انتہا صفر ہے، اسطرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

عف (ع و) = و عف ع + ع عف و

اگر حاصل ضرب میں دو اجزائے ضربی سے زیادہ ہوں مثلاً ع، و، ھ تو اوپر کے مسئلہ کو دو دفعہ استعمال کرنے سے ہم اس کی توسیع کر سکتے ہیں ۔

عف (ع و ھ) = عف (ع × و ھ) = و ھ عف ع + ع عف (و ھ)

لیکن عف (و ھ) = ھ عف و + و عف ھ

اسلئے عف (ع و ھ) = و ھ عف ع + ع ھ عف و + ع و عف ھ

طرفین کو ع و ھ پر تقسیم کرے ۔

عف (ع و ھ) / ع و ھ = عف ع / ع + عف و / و + عف ھ / ھ

زیادہ عام طور پر حاصل ضرب میں اگر ن اجزائے ضربی ہوں تو

عف (ع۱ ع۲ ... عن) / ع۱ ع۲ ... عن = عف ع۱ / ع۱ + عف ع۲ / ع۲ + ... + عف عن / عن

لوکارثمی تفرق اس شکل میں جب تفرق کو عمل میں لایا جائے تو اسے بالعموم لوکارثمی تفرق کہتے ہیں [ملاحظہ ہو دفعہ ۶۵ مثال ۳] خاص طور پر طالب علم دیکھے کہ حاصل ضرب کا مشتق اسکے اجزائے ضربی کے مشتقوں کے حاصل ضرب کے مساوی نہیں ہوتا ۔

مثال ۔ عف (۵ لا + ۲)(۳ لا − ۷) = (۳ لا − ۷) عف (۵ لا + ۲)
+ (۵ لا + ۲) عف (۳ لا − ۷)
= (۳ لا − ۷) × ۵ + (۵ لا + ۲) × ۳ = ۳۰ لا − ۲۹

پہلے اجزائے ضربی کو باہم ضرب دینے اور پھر تفرق کرنے سے اوپر کے نتیجہ کی تصدیق ہوسکتی ہے ۔

مسئلہ ۵ ۔ عف (ع / و) = (و عف ع − ع عف و) / و۲ بشرطیکہ

لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو زیر بحث ہیں و صفر نہ ہو۔

$$\text{مف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right)=\frac{\text{ع}+\text{مف ع}}{\text{و}+\text{مف و}}-\frac{\text{ع}}{\text{و}}=\frac{\text{و مف ع}-\text{ع مف و}}{\text{و}^{2}+\text{و مف و}}$$

$$\text{اسلئے}\quad \frac{\text{مف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right)}{\text{مف لا}}=\frac{\text{و}\frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}}-\text{ع}\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}^{2}+\text{و مف و}}$$

چونکہ جب، مف لا ← ۰ تو نسب نما کی انتہا و² ہے اور و² صفر نہیں ہے، اسلئے ہم اس مسئلہ کو استعمال کر سکتے ہیں کہ کسی حاصل قسمت کی انتہا شمار کنندہ اور نسب نما کی انتہاؤں کے حاصل قسمت کے مساوی ہوتی ہے۔ اس لئے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

اگر ہم $\frac{\text{ع}}{\text{و}}$ پر تقسیم کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{عف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right)}{\frac{\text{ع}}{\text{و}}}=\frac{\text{عف ع}}{\text{ع}}-\frac{\text{عف و}}{\text{و}}$$

$$\text{مثال}\quad \text{عف}\left(\frac{\text{لا}^{2}-1}{\text{لا}^{2}+1}\right)=\frac{(\text{لا}^{2}+1)\,\text{عف}(\text{لا}^{2}-1)-(\text{لا}^{2}-1)\,\text{عف}(\text{لا}^{2}+1)}{(\text{لا}^{2}+1)^{2}}$$

$$=\frac{(\text{لا}^{2}+1)\,2\text{لا}-(\text{لا}^{2}-1)\,2\text{لا}}{(\text{لا}^{2}+1)^{2}}=\frac{4\,\text{لا}}{(\text{لا}^{2}+1)^{2}}$$

مسئلہ ۲ ۔ اگر دو تفاعلوں کے مشتق، وجہ کی ہر ایک قیمت کے لئے مساوی ہوں تو تفاعل صرف بلحاظ ایک مستقل کے ایکدوسرے سے مختلف ہو سکتے ہیں، یہ مسئلہ (۱) کا عکس ہے اور معمولی تفاعلوں کی صورت میں اسکے ثبوت کی چنداں ضرورت نہیں معلوم ہوتی۔ تاہم اگر لا کی ہر قیمت کے لئے فَ (لا) = فہَ (لا) تو ما کو

ف (لا) - فہ (لا) کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوگا

$$عف_{لا}\ ما = عف_{لا}\,[ف(لا) - فہ(لا)] = فَ(لا) - فاَ(لا) = ۰$$

یعنی لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی ترسیم کا ڈھال صفر ہے، اسلئے یہ ترسیم لا کا محور ہونی چاہئیے یا ایک ایسا خط جو محور لا کے متوازی ہو۔ لیکن لا کے محور کے متوازی کسی خط کی مساوات ما = مستقل = ج ہے اور یہ مساوات خود محور لا کو تعبیر کریگی اگر ج = ۰، اس لئے

ما = ف (لا) - فہ (لا) = ج یعنی ف (لا) = فا (لا) + ج

مثال - اگر $عف_{لا}\ ما = لا^{۲} - ۱$ تو ما کی عام قیمت معلوم کرو۔

$\frac{۱}{۳} لا^{۳} - لا$ کا مشتق $لا^{۲} - ۱$ ہے، جسکی جانچ تفرق کرنے سے ہوسکتی ہے، اس لئے لا کی ہر قیمت کے لئے ما اور $\frac{۱}{۳} لا^{۳} - لا$ کے مشتق وہی ہیں۔ اس لئے ما اور $\frac{۱}{۳} لا^{۳} - لا$ کا فرق صرف کوئی مستقل مقدار ہوسکتی ہے

پس $ما = \frac{۱}{۳} لا^{۳} - لا + ج$، یہ عام قیمت ہے کیونکہ ہر ایک ایسا تفاعل جس کا مشتق وہی ہو جو ما کا مشتق ہے، $\frac{لا^{۳}}{۳} - لا$ سے صرف بقدر ایک مستقل کے مختلف ہوسکتا ہے اور ج کوئی مستقل ہے۔

اُس تفاعل کے لئے جس کی قیمت مثلاً ۲ ہو جبکہ لا = ۱، مستقل ج کی ایک خاص قیمت ہوگی۔ اب چونکہ لا کی ہر قیمت کے لئے

$$ما = \frac{۱}{۳} لا^{۳} - لا + ج$$

اِس لئے ۲ = $\frac{۱}{۳}$ - ۱ + ج اسلئے ج = $\frac{۸}{۳}$

اور ما = $\frac{۱}{۳}$ لا^{۳} - لا + $\frac{۸}{۳}$

یاد رہے کہ مشتق وجہ کی ہر قیمت کے لئے مساوی ہونے چاہئیں، مثلاً لا^{۲} - ۱ اور لا^{۳} - ۱ مساوی ہوتے ہیں جبکہ لا صفر یا ایک کے مساوی ہو، لیکن وہ تفاعل جن کے یہ مشتق ہیں یعنی $\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$ - لا + ج اور $\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}$ - لا + جَ اِن کا فرق محض ایک مستقل مقدار نہیں ہے۔ یہ مختلف تفاعل ہیں۔

مشق ۸

اشلہ ۱ تا ۱۰ میں بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

۱- ۷لا^{۳} + ۵لا^{۲} + ۴لا - ۲ ۲- (۷لا - ۳)(۸لا + ۲)

۳- (لا - ۱)(لا + ۲)(لا - ۳) ۴- $\frac{(۳\text{لا} - ۷)}{۵ - ۲\text{لا}}$

۵- $\sqrt{\text{لا}} + \frac{۱}{\sqrt{\text{لا}}}$ ۶- $\left(\sqrt{\text{لا}} - \frac{۱}{\sqrt{\text{لا}}}\right)^{۳}$

۷- لا^{ن} + $\frac{۱}{\text{لا}^{ن}}$ ۸- ا لا^{م} + $\frac{ب}{\text{لا}^{م}}$

۹- ۴ لا$^{\frac{۵}{۴}}$ + ۲ لا$^{\frac{۱}{۴}}$ - ۲ لا$^{-\frac{۱}{۴}}$ + لا$^{-\frac{۵}{۴}}$

۱۰- $\frac{\text{لا}^{۳} - ۲ + \text{لا}^{-۳}}{\text{لا} - ۲ + \text{لا}^{-۱}}$

اشلہ ۱۱ تا ۱۴ میں بلحاظ ت کے تفرق کرو۔

۱۱- $\frac{\text{ا ت + ب}}{\text{ج ت + د}}$ ۱۲- $\frac{\text{ا}}{\text{ب + ج ت}}$

۱۳- $\frac{\text{ا ت}^2 \text{ + ۲ ب ت + ج}}{\text{ا' ت}^2 \text{ + ۲ ب' ت + ج'}}$ ۱۴- $\frac{\text{(ت - ۱) (ت - ۲)}}{\text{(ت + ۱) (ت + ۲)}}$

۱۵- دفعہ ۵۸ کے مسئلہ ۱ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$\frac{\text{ع}}{\text{و}}$ = ھ یعنی عف ع = (و ھ)

کہنے سے مسئلہ (۵) کو مسئلہ (۴) سے حاصل کرو۔

۱۶- اگر وقت ت پر ایک مستطیل کے اضلاع ع اور و فٹ ہوں جہاں ع اور و دونوں ت کے تفاعل ہیں، تو ثابت کرو کہ وقت ت پر مستطیل کا رقبہ شرح و عَ + ع وَ سے بدل رہا ہے۔

اگر وقت ت پر ایک مستطیلی متوازی السطوح کے تین کنارے جو ایک ہی کونہ پر آکر ملتے ہیں ع، و، ھ ہوں تو حجم کے بڑھنے کی شرح معلوم کرو۔

دکھاؤ کہ ان نتائج سے مسئلہ ۴ دفعہ ۵۸ کی ہندسی تعبیر حاصل ہوتی ہے۔

۱۷- لا کی قیمتیں معلوم کرو جن کے لئے کہ ذیل کے تفاعل (۱) بڑھتے ہیں (۲) گھٹتے ہیں (۳) اچل ہیں، ان نتائج کو تفاعلوں کے مرتسم کرنے میں استعمال کرو اور ترسیموں پر موڑ کے نقطے معلوم کرو

(ا) ۳ - لا + لا^2 (ب) لا^3 - ۳ لا + ۲ (ج) لا^3 - ۲ لا^2 - ۱

۱۸- عام سے عام تفاعل معلوم کرو جنکے مشتق بالترتیب حسب

ذیل ہیں

(۱) ۲ لا - ۱ (۲) ۳ لا - $\frac{۱}{۲لا}$ (۳) ا لا^۲ + ب لا + ج

۱۹- ایک منحنی کا ڈھال لا^۲ - لا + ۱ ہے اور منحنی نقطہ (۱، $\frac{۵}{۶}$) میں سے گذرتا ہے، منحنی کی مساوات معلوم کرو۔

۲۰- اگر د ح = د ج جہاں د اور ج مستقل ہیں تو ثابت کرو کہ

- ح عف$_ج$ د = د جہاں د اور ح متغیر ہیں۔

۲۱- ابتدائے حرکت سے ت سکنڈ کے بعد ایک ذرہ کی رفتار و - ج ت ہے جہاں ج اسراع بجاذبۂ ارض ہے اور و مستقل ہے، بتاؤ کہ ت سکنڈوں میں اِس ذرہ نے کتنا فاصلہ طے کیا ہے۔

۵۹- تفاعل کے تفاعل کا مشتق اور مقلوب تفاعلوں کے مشتق۔

دفعہ ۵۷ میں کسی قوت کے مشتق معلوم کرنے کا جو قاعدہ دیا گیا ہے اس کے بلا واسطہ استعمال سے ایسے تفاعل (لا^۲ - لا + ۱)$^{\frac{۱}{۲}}$ کا مشتق معلوم نہیں ہو سکتا، ایسی صورت میں ہم یوں عمل کر سکتے ہیں، (لا^۲ - لا + ۱)$^{\frac{۱}{۲}}$ کو ما سے تعبیر کرو اور رکھو لا^۲ - لا + ۱ = ع، تب ما = ع$^{\frac{۱}{۲}}$ جہاں ع = لا^۲ - لا + ۱ پس ما، ع کا تفاعل ہے جہاں ع، لا کا تفاعل ہے۔ دوسرے الفاظ میں ما، لا کے ایک تفاعل کا تفاعل ہے (دفعہ ۴۶)

اگر لا کا اضافہ مف لا ہو تو فرض کرو کہ ع کا اضافہ مف ع ہوتا ہے اور ع کے اضافے مف ع کے جواب میں ما کا اضافہ مف ما ہوتا ہے۔ اسلئے جب، لا اضافہ

مف لا اختیار کرتا ہے تو ما کا اضافہ مف ما ہوتا ہے اور جب، مف لا مائل بہ صفر ہوتا ہے تو مف ع اور مف ما دونوں مائل بہ صفر ہوتے ہیں - اب

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ع}} \times \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$$

اسلئے

$$\underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف ع}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ع}} \times \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}}$$

یعنی $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{ما} \times \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ع}$

مشتق $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}$ میں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ما تصریحی طور پر لا کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے، مگر $\text{عف}_{\text{ع}}\,\text{ما}$ میں ما، ع کی رقوم میں بیان کرلیا گیا ہے یعنی

$$\text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^2 - \text{لا} + 1)^{\frac{1}{2}} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{ع}^{\frac{1}{2}} \times \text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^2 - \text{لا} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}\text{ع}^{-\frac{1}{2}} \times (2\text{لا} - 1) = \frac{2\text{لا} - 1}{2(\text{لا}^2 - \text{لا} + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

جہاں عمل تفرق کے بعد ع کو لا کی رقوم میں لکھدیا گیا ہے یعنی $\text{ع} = \text{لا}^2 - \text{لا} + 1$

یہ استدلال بالکل عام ہے، اس لئے یہ مسئلہ حاصل ہوتا ہے اگر ما = ف (ع) اور ع = فہ (لا) تو ما، لا کے ایک تفاعل کا تفاعل ہے اور

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{ف}(\text{ع}) \times \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{فہ}(\text{لا})$$

یا

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{ما} \times \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ع}$$

اگر ما = ف (ع)، ع = فہ(و)، و = سا (لا) تو
بالکل اسی طرح حاصل ہوگا

عف_لا ما = عف_ع ف(ع) × عف_و فہ(و) × عف_لا سا(لا)

یا عف_لا ما = عف_ع ما × عف_و ع × عف_لا و

اسی طریقے سے مقلوب تفاعل کا مشتق بھی حاصل ہوسکتا ہے
فرض کرو کہ ما = ف (لا) جہاں لا متغیر متبوع ہے۔

مقلوب تفاعل لا = ف^{-۱}(ما) ہے، اس میں ما کو متغیر متبوع خیال کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ لا اور ما کے متناظر اضافے مف لا اور مف ما ہیں، پس مف لا اور مف ما ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔ تب

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}} = 1$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} \times \text{نہا}_{\text{مف ما}\to 0} \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}} = 1$$

یعنی عف_لا ما × عف_ما لا = ۱

یہ نتیجہ ہندسی طریق پر بھی ظاہر ہے۔ شکل ۲۸ (دفعہ ۵۳) میں عف_لا ما اُس زاویہ کا مماس ہے جو ن ت، و لا کے ساتھ بناتا ہے، عف_ما لا اُس زاویہ کا مماس ہے جو ن ت، و ما کے ساتھ بناتا ہے اور چونکہ یہ زاویے ایکدوسرے کے متمم ہیں، اسلئے ان کے مماسوں کا حاصل ضرب ایک ہے۔

مقلوب تفاعلوں کے مشتق دریافت کرنے میں یہ مسئلہ نہایت کارآمد ہوتا ہے (دفعات ۶۴، ۶۵)، فی الحال ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{عف}_{\text{ما}}\ \text{لا} = \frac{1}{\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما}}$$

اور یہ مسئلہ درست رہتا ہے خواہ ایک مشتق صفر ہو۔
طالب علم ذیل کی مثالوں کا غور سے مطالعہ کرے، ان میں ہر منزل پر تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کا قاعدہ استعمال کرنا پڑتا ہے۔

مثال ۱۔ $\text{عف}_{\text{لا}}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ن ا}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}-1}$

رکھو $\text{ا لا} + \text{ب} = \text{ع}$

تب $\text{عف}_{\text{لا}}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{عف}_{\text{ع}}\ \text{ع}^{\text{ن}} \times \text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ع} = \text{ن ع}^{\text{ن}-1} \times \text{ا}$

$= \text{ن ا}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}-1}$

تھوڑی سی مشق کے بعد ع کو درج کرنے کی ضرورت نہیں رہے گی۔ اوپر کا عمل یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{عف}_{\text{لا}}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ن}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}-1} \times \text{ا} = \text{ن ا}\ (\text{ا لا} + \text{ب})^{\text{ن}-1}$$

$$\text{عف}_{\text{لا}}\ (3\text{لا} - 2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3\text{لا} - 2)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2(3\text{لا} - 2)^{\frac{1}{2}}}$$

مثال ۲۔ $\text{عف}_{\text{لا}}\ (\text{لا}^2 - \text{ا}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\text{لا}^2 - \text{ا}^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2\text{لا} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}$

مثال ۳۔ اگر $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما} = \text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$ اور $\text{ع} = \text{لا}^2 - \text{ا}^2$ تو $\text{عف}_{\text{ع}}\ \text{ما}$ معلوم کرو۔

$$\text{عف}_{\text{ء}}\,\text{ما} = \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} \times \text{عف}_{\text{ء}}\,\text{لا} = \frac{\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}}{\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ء}} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}}}{۲\ \text{لا}}$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{عف}_{\text{ء}}\,\text{ما} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{\text{ء}}$$

مثال ۴ - اگر ما، لا کا تفاعل ہو تو $\text{ما}^{۲}$، $\text{ما}^{۳}$، .... لا ما، $\text{لا}^{۲}\text{ما}$، ....
سب لا کے تفاعل ہونگے اور

$$\text{عف}_{\text{لا}}(\text{ما}^{۲}) = \text{عف}_{\text{ما}}(\text{ما}^{۲}) \times \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = ۲\,\text{ما}\ \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}$$

$$\text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا ما}) = \text{لا}\ \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} + \text{ما}\ \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{لا} = \text{لا}\ \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} + \text{ما}$$

اور $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}$ کی بجائے ماَ استعمال کرنے سے بالعموم

$$\text{عف}_{\text{لا}}(\text{ما}^{\text{ن}}) = \text{ن}\ \text{ما}^{\text{ن}-۱}\ \text{ماَ}$$

$$\text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}}) = \text{لا}^{\text{م}}\ \text{عف}_{\text{لا}}(\text{ما}^{\text{ن}}) + \text{ما}^{\text{ن}}\ \text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^{\text{م}})$$

$$= \text{لا}^{\text{م}} \times \text{ن}\ \text{ما}^{\text{ن}-۱}\ \text{ماَ} + \text{ما}^{\text{ن}}\ \text{م}\ \text{لا}^{\text{م}-۱}$$

$$= \text{لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,(\text{ن لا ماَ} + \text{م ما})$$

برعکس اسکے $\text{ما ماَ} = \text{عف}_{\text{لا}}(\tfrac{۱}{۲}\,\text{ما}^{۲})$، $\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{ماَ} = \text{عف}_{\text{لا}}(\tfrac{۱}{\text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}})$
یہ استحالہ خاص طور پر حیلی سوالات میں کارآمد ثابت ہوتا ہے
مثلاً اگر وجہ ت ہو تو $\text{لا لاَ} = \text{عف}_{\text{ت}}(\tfrac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲})$، $\text{ما ماَ} = \text{عف}_{\text{ت}}(\tfrac{۱}{۲}\,\text{ما}^{۲})$

جہاں $\text{لاَ} = \frac{\text{ور لا}}{\text{ور ت}}$ وغیرہ

مثال ۵ - اگر $\text{و} = \text{کَس}$ تو ثابت کرو کہ $\text{وَ} = \text{عف}_{\text{س}}(\tfrac{۱}{۲}\,\text{و}^{۲})$

وَ = عفت و = عفس و × عفت س = سَ عفس و = و عفس و

= عفس (½ و۲)

یا دوسرے الفاظ میں و کے تغیر کی زمانی شرح ½ و۲ کے تغیر کی مکانی شرح کے مساوی ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۶۹)

مثال ۶ ۔ اگر کسی منحنی کے کسی نقطہ کے محدد اس شکل میں معلوم ہوں لا = ف (ت) ، ما = فہ (ت) جہاں ت (مثلاً) وقت کو تعبیر کرتا ہے تو عفلا ما معلوم کرو ۔

ما ، ت کا تفاعل ہے اور ت پہلی مساوات سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے

اسلئے عفلا ما = عفت ما × عفلا ت

لیکن مقلوب تفاعلوں کے قاعدہ تفرق کی رو سے

عفلا ت = ۱ / عفت لا ، اسلئے

عفلا ما = عفت ما / عفت لا = مَا / لَا

مثلاً اگر لا = ا ت۲ ، ما = ۲ ا ت تو

عفلا ما = مَا / لَا = ۲ ا / ۲ ا ت = ۱ / ت = ۲ ا / ما

مثال ۷ ۔ جس صورت میں ما ، لا کا تضمینی تفاعل ہو اور اس طرح کی مساوات سے اس کی قیمت کا تعین ہو

ا لام مان + ب لات مات + ... + ک لا + ل ما + ص = ... (عم)

تو مثال (۴) کے طریقہ کے موافق ہم مَا کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

لا خواہ کس طرح بدلے، اسکے بدلنے سے ما اس طرح بدلیگا کہ مساوات (عہ) ہمیشہ درست رہے۔

اسلئے لا کے بدلنے سے (عہ) کے دائیں رکن کے تغیر کی شرح ہمیشہ صفر ہو گی، یعنی

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left(\text{ا}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}} + \ldots\ldots + \text{ک}\,\text{لا} + \text{ل}\,\text{ما} + \text{ص}\right) = ۰$$

یعنی $\text{ا}\,\text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}}) + \text{ب}\,\text{عف}_{\text{لا}}(\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}}) + \text{ک} + \text{ل}\,\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = ۰$

ہر رقم کو تفرق کرنے کے بعد مساوات سے $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}$ یا مَا معلوم ہو سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ مساوات یہ ہے۔

$$\text{لا}^{۲} + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^{۲} - ۱ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{بہ})$$

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left(\text{لا}^{۲} + \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^{۲} - ۱\right) = ۰$$

$$\text{یعنی}\quad ۲\,\text{لا} + \text{لا}\,\text{مَا} + \text{ما} + ۲\,\text{ما}\,\text{مَا} = ۰$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{مَا} = -\frac{۲\,\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} + ۲\,\text{ما}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{جہ})$$

خاص نقاط پر ناقص (بہ) کا ڈھال معلوم کرنیکے لئے یوں عمل کرنا چاہئے

جب، $\text{لا} = ۱$، $\text{ما}^{۲} + \text{ما} = ۰$ یعنی $\text{ما} = ۰$ یا -۱

$$\text{نقطہ}\ (۱،۰)\ \text{پر}\quad \text{مَا} = -\frac{۲ + ۰}{۱ + ۰} = -۲$$

$$\text{نقطہ}\ (۱،-۱)\ \text{پر}\quad \text{مَا} = -\frac{۲ - ۱}{۱ - ۲} = ۱$$

یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کن نقاط پر مماس محور لا کے متوازی ہے ہمیں (بہ) اور اس مساوات کو جو ما = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے ایک ساتھ حل کرنا چاہئے لیکن اس میں یہ احتیاط رکھنی چاہئے کہ لا اور ما کی وہ قیمتیں جو ما کے شمار کنندہ کو صفر بناتی ہیں اس کے نسب نما کو بھی صفر نہ بنادیں، کیونکہ اگر ایسا ہو تو ما یہ شکل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ اختیار کرے گا، اور اس صورت میں یہ ممکن ہے کہ ما صفر کے مساوی ہو یا نہ ہو، مذکورہ بالا صورت میں ہمیں (بہ) اور ۲ لا + ما = ۰ کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے، ان سے لا، ما کی یہ قیمتیں معلوم ہوتی ہیں

$$\text{لا} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} ،\ \text{ما} = -\frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad \text{اور} \quad \text{لا} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} ،\ \text{ما} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

ان نقطوں پر مماس محور لا کے متوازی ہے۔

جن نقطوں پر مماس محور لا پر عمود وار ہے ان کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں (بہ) اور لا + ۲ ما = ۰ کو (جس سے ما لا متناہی ہوتا ہے) ایک ساتھ حل کرنا چاہئے، یہ نقطے

$$\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}} ،\ -\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) \ \text{اور}\ \left(-\frac{۲}{\sqrt{۳}} ،\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$ ہیں۔

مشق ۹

جملات ۱ تا ۸ کو بلحاظ لا کے تفرق کرو

۱- $\sqrt{\text{۱ - لا}}$　　۲- $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱ - لا}}}$　　۳- $\sqrt{(\text{۲لا+۱})(\text{لا-۲})}$

۴- $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}}$　　۵- $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲}}$　　۶- $\sqrt{\text{الا}^۲ + \text{ب لا + ج}}$

۷- $\sqrt{\dfrac{لا^{۲} + ۱}{لا^{۲} - ۱}}$ ۸- $\dfrac{\sqrt{ا لا^{۲} + ۲ب لا + ج}}{\sqrt{ا_{۱} لا^{۲} + ۲ب_{۱} لا + ج_{۱}}}$

جب اس شکل $(لا + ا)^{م} / (لا + ب)^{ن}$ کے حاصل قسمت کو تفرق کرنا مقصود ہو تو اسے عام طور پر حاصل ضرب $(لا + ا)^{م} (لا + ب)^{-ن}$ کی شکل میں لکھنا مفید ہوگا، مختصر کرنے پر نتیجہ مفرد ترین رقوم میں حاصل ہوگا۔ اس طریقہ سے تفرق کرو

۹- $\dfrac{(لا + ۱)^{۳}}{(لا - ۱)^{۴}}$ ۱۰- $\dfrac{(لا + ا)^{م}}{(لا + ب)^{ن}}$ ۱۱- $\dfrac{۱}{لا^{۲}(لا - ۱)^{۲}}$

۱۲- اس مساوات کو الفاظ میں بیان کرو

$$عف_{ت}\, ما = عف_{لا}\, ما \times عف_{ت}\, لا$$

۱۳- اگر $و^{۲} = ۲ک \left(\dfrac{۱}{س} - \dfrac{۱}{ا}\right)$ تو ثابت کرو کہ $\dot{و} = -\dfrac{ک}{س^{۲}}$ جہاں س اور و وقت کے تفاعل ہیں۔

۱۴- اگر $۲لا^{۲} + ۳ما^{۲} = ۵$ تو $\acute{ما}$ معلوم کرو۔ پھر ذیل کے ہر نقطہ پر ڈھال دریافت کرو
(۱) (۱، ۱) (۲) (−۱، ۱) (۳) (−۱، −۱)
(۴) (۱، −۱)

۱۵- اگر $(لا + ما)^{۲} - ۵لا + ما = ۱$ تو $\acute{ما}$ معلوم کرو۔ جس نقطہ (یا نقاط) پر خط مستقیم $لا + ما = ۱$ منحنی کو کاٹتا ہے اس کے محدد معلوم کرو۔

۱۶- اگر لا = ا ت، ما = ب ت − $\frac{1}{2}$ ج $ت^2$ تو محوروں کے متوازی نقطہ (لا، ما) کی رفتار کے اجزائے ترکیبی معلوم کرو اور جس سمت میں نقطہ وقت ت پر حرکت کر رہا ہے اُسے معلوم کرو۔ [مقابلہ کرو مشق ۶ سوال ۴ کے ساتھ]

۱۷- ذیل کی صورتوں میں $عف_{لا}$ ما معلوم کرو

(۱) $(لا - ا)^2 + (ما - ب)^2 = ج^2$ (۲) $ما^2 = ا لا + ب لا^2$

(۳) لا ما = $ج^2$ (۴) $لا^م ما^ن = ج^{م+ن}$

۱۸- اگر $عف_{لا}$ ما = $\frac{لا^2}{\sqrt{ا لا^3 + ب}}$ اور ع = $ا لا^3 + ب$ تو $عف_{ع}$ ما معلوم کرو۔

۱۹- اگر $عف_{لا}$ ما = $(لا + ا)(لا^2 + ۲ ا لا + ب)^ن$ اور ع = $لا^2 + ۲ ا لا + ب$ تو $عف_{ع}$ ما معلوم کرو۔

۲۰- اگر $عف_{لا}$ ما = ف (ا لا + ب) اور ع = ا لا + ب تو $عف_{ع}$ ما معلوم کرو۔

۶۰- تفرقہ۔ دفعہ ۵۳ کی شکل ۲۸، ا اور ب میں فَ(لا) یا $عف_{لا}$ ما کی قیمت مس ر ن ت ہے اور

$$فَ(لا) = \frac{ر ت}{ن ر} = \frac{ر ت}{ل م}$$

اب فرض کرو کہ جیسے لا، و ل سے و م تک بڑھتا ہے معین ما یا ف (لا) یکساں طور پر شرح فَ(لا) یا مس ر ن ت سے بڑھتا ہے، اس صورت میں نقطہ

ن توس ن ق پر حرکت کرنے کی بجائے مماس ن ت پر حرکت کرتا ہے اور اِس مفروض کی بنا پر ما کا اضافہ ر ق ہونے کی بجائے ر ت ہوتا ہے۔

ما کے اِس فرضی اضافہ کو تفاعل ما یا ف (لا) کا تفرّقہ (یا تفرقی) کہتے ہیں اور اسے فرما یا فرف (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔ ما کا حقیقی اضافہ جسے مف ما یا مف ف (لا) سے ہم نے تعبیر کیا ہے ر ت نہیں ہے بلکہ ر ق ہے۔ حسب معمول لا کے اضافے ل م کے لئے مف لا لکھنے سے

فرما = ر ت = فَ (لا) مف لا

مف ما = ر ق = [فَ (لا) + عہ] مف لا

جہاں عہ سے وہی متغیر مراد ہے جس کا دفعہ ۵۲ میں ذکر ہوا۔ اگر ف (لا) خود تفاعل لا ہو یعنی

اگر ف (لا) = لا تو فَ (لا) = ۱ اور

فرف (لا) = فرلا = ۱ × مف لا

پس ہم دیکھتے ہیں کہ متغیر متبوع کی صورت میں مف لا اور فرلا کے ایک ہی معنی ہیں، اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

فرما = ر ت = فَ (لا) فرلا، مف ما = ر ق = [فَ (لا) + عہ] فرلا

پہلی مساوات سے مشتق کی ایک نئی ترقیم حاصل ہوتی ہے یعنی

فَ (لا) = فرما / فرلا = فرف (لا) / فرلا

عام طور پر یہی ترقیم زیادہ مروج ہے، اس میں فائدہ یہ ہے کہ

اس کی شکل سے اُس عمل کا پتہ چلتا ہے جس سے مشتق حاصل کیا گیا تھا۔ نیز اس میں ایک اور فائدہ ہے

مف ما۔ فرما = [فَ (لا) + عہ] فرلا ۔ فَ (لا) فرلا = عہ فرلا

اور جب فرلا یا ل م بہت چھوٹا ہو تو عہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اور (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۲) اسلئے مف ما تقریباً فرما کے مساوی ہوتا ہے۔ تفرقوں کی ترقیم کا موجد لیب نیٹز ہے، تفرقہ کی مندرجہ بالا طرز تعریف بالعموم اگوشی کے ساتھ منسوب کی جاتی ہے لیکن تفرقہ یا "تفرقی" نیوٹن کے "معیار اثر" کا معادل ہے جس کی تشریح بنجمن رُوبن نے بعینہ اسی طرح کی ہے۔ (ملاحظہ ہوں بنجمن رُوبن کے ریاضی رسائل، لنڈن ۱۷۶۱) اگر خوش قسمتی سے رُوبن کے رسائل مل جائیں تو ان کا مطالعہ طالب علم کے لئے مفید ثابت ہوگا۔ یہ رسائل آسانی سے میسر نہیں آتے۔

تکملی احصا میں تفرقوں کی ترقیم ضرور اختیار کرنی پڑتی ہے، اس کے بغیر چارہ نہیں، طالب علم کو چاہیئے کہ اس سے بخوبی مانوس ہو جائے، عملی طور پر فرلا اور اس لئے فرما کو بالعموم نہایت چھوٹی مقداریں فرض کیا جاتا ہے، لیکن یاد رہے کہ یہ ان کی نسبت ہے جو خاص اہمیت رکھتی ہے۔

رمز فرما/ورلا کو اکثر ایسے فر/فرلا ما لکھتے ہیں، لیکن جب اسے اس طرح لکھا جائے تو پوری علامت "فر/فرلا" کو اکھٹا لینا چاہئے اور اسے عف لا کا مرادف سمجھنا چاہئے۔

اگر لا متغیر متبوع ہو تو فرع = عف‌لا ع فرلا اور.

فرو = عف‌لا و فرلا وغیرہ

اور فر(ع + و - ھ) = فرع + فرو - فرھ

فر(ع و) = و فرع + ع فرو وغیرہ

دراصل مسائل دفعہ ۵۸ میں عف کی بجائے فر لکھا جاسکتا ہے۔

نیز چونکہ فرع/فرلا سے مراد ہے عف‌لا ع، اس لئے

فر(ع + و - ھ)/فرلا یا ف/فرلا (ع + و - ھ) = فرع/فرلا + فرو/فرلا - فرھ/فرلا

فر(ع و)/فرلا = و فرع/فرلا + ع فرو/فرلا

فرما/فرلا = فرما/فرع × فرع/فرلا ، فرما/فرلا = ۱/(فرلا/فرما) (دفعہ ۵۹)

وغیرہ وغیرہ

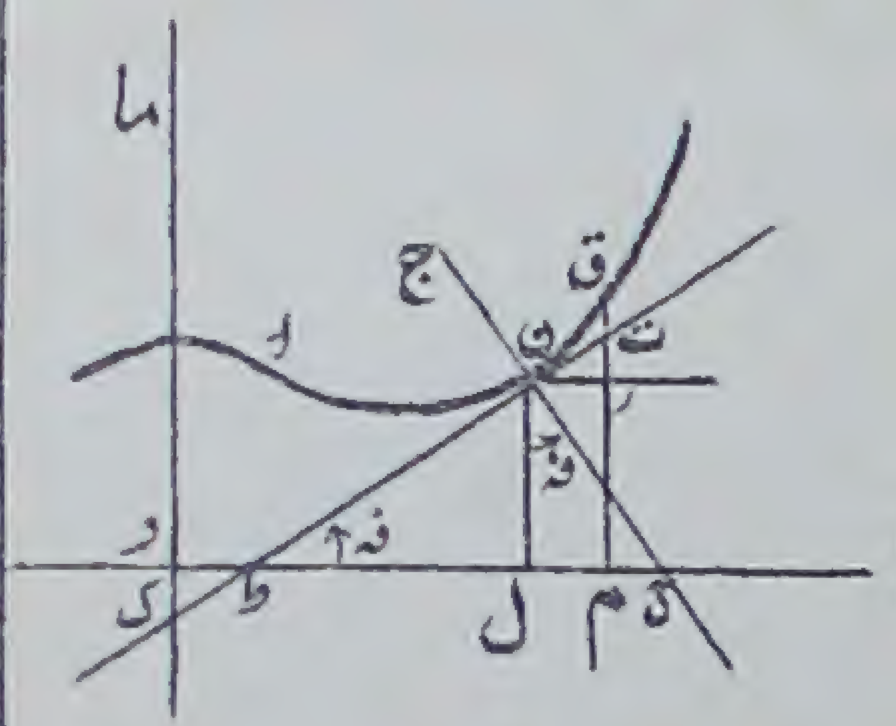
مثال ۱- فر(۳لا² - لا + ۱) = عف‌لا(۳لا² - لا + ۱) فرلا
= (۶لا - ۱) فرلا

مثال ۲- فر√(لا² - ا²) = ½(لا² - ا²)^(-½) ۲لا فرلا = لا فرلا/√(لا² - ا²)

مثال ۳- لا فرلا = فر(½لا²)، (لا² - ۱)فرلا = فر(لا³/۳ - لا)

مثال ۴- مشق ۹ امثلہ ۱ تا ۶ کو تفرقوں کی شکل میں بیان کرو۔

۶۱- ہندسی استعمال- فرض کرو کہ ایک منحنی کی مساوات ما = ف(لا) ہے اور اس پر ایک نقطہ ن ہے جسکا فصلہ و ل اور معین ل ن ہے۔ فرض کرو کہ ن پر کا



شکل ۳۰

مماس محوروں سے ط اور ک پر ملتا ہے (شکل ۳۰) نقطہ ن میں سے مماس پر عمود وار ایک خط ج ن گ کھینچا گیا ہے جو منحنی کے نقطہ ن پر عماد کہلاتا ہے، مماس اور عماد لامتناہی طول کے خط ہیں، لیکن جب ان کے محدود حصوں کا ذکر کیا جائے تو مقطوعوں ن ط اور ن گ سے مراد ہوتی ہے جو نقطہ ن اور محور لا کے درمیان کٹتے ہیں۔

اسی طرح ان حصوں کے جو ظل ہیں محور لا پر یعنی ط ل اور ل گ ان کو بالترتیب زیر مماس اور زیر عماد کہتے ہیں۔ نقطہ ن پر لا، ما، ماَ کی جو قیمتیں ہیں ان کی رقوم میں یہ حصے بیان ہو سکتے ہیں۔

زیر مماس = ط ل = ما / مس فہ = ما / ماَ

زیر عماد = ل گ = ما مس فہ = ما ماَ

مماس = ط ن = ما قم فہ = ما √(۱ + ماَ²) / ماَ

عماد = گ ن = ما قط فہ = ما √(۱ + ماَ²)

وط = ول ـ وط = لا ـ ما / ماَ = (لا ماَ ـ ما) / ماَ

وک = ـ وط مس فہ = ـ (لا ماَ ـ ما) / ماَ × ماَ = ما ـ لا ماَ

یہ جملے ن کے تمام مقامات کے لئے درست ہیں بشرطیکہ حصوں کی علامات کو ملحوظ رکھا جائے، مثلاً اگر ط ل کسی منفی عدد سے تعبیر ہو تو ط کو ل کے دائیں جانب ہونا چاہئے کیونکہ ہم نے اوپر معیاری شکل میں ط ل کو مثبت مانا ہے اور ط، ل کے بائیں جانب ہے۔ طالب علم اِن ضابطوں کو زبانی یاد رکھنے کی کوشش نہ کرے، یہ قیمتیں شکل کھینچنے سے فوراً معلوم ہوسکتی ہیں۔

نیز ہم مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرسکتے ہیں۔ امتیاز کی خاطر نقطہ ن پر لا، ما، ما′ کی جو قیمتیں ہیں انہیں لا_1، ما_1، $\text{ما}'_1$ سے تعبیر کرو کیونکہ مماس ط ن یا عماد گ ن پر کے کسی نقطہ کے محدد ہم (لا، ما) سے تعبیر کرینگے۔

چونکہ مماس ایک ایسا خطِ مستقیم ہے جو نقطہ (لا_1، ما_1) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے، اسلئے مماس کی مساوات ہے $\text{ما} - \text{ما}_1 = (\text{لا} - \text{لا}_1)\ \text{مس فہ}$

یا $\text{ما} - \text{ما}_1 = \text{ما}'_1 (\text{لا} - \text{لا}_1)$

محور لا کے ساتھ جو حادہ (منفی) زاویہ عماد بناتا ہے وہ $\text{فہ} - \frac{\pi}{2}$ ہے اور $\text{مس}\left(\text{فہ} - \frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{مم فہ} = -\frac{1}{\text{ما}'_1}$، پس عماد کی مساوات ہے

$$\text{ما} - \text{ما}_1 = -\frac{1}{\text{ما}'_1}(\text{لا} - \text{لا}_1)$$

مثال ۱۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کا زیر مماس اور زیر عماد معلوم کرو۔ اگر ما کو مثبت فرض کیا جائے تو

$$\text{ما} = +\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\,،\quad \text{ما}' = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \cdot \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$$

$$\text{زیر مماس} = \frac{\text{ما}}{\text{ماَ}} = -\frac{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}{\text{لا}}$$

$$\text{زیر عماد} = \text{ما ماَ} = -\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2}$$

اگر لا مثبت ہو تو یہ دونوں عدد منفی ہوتے ہیں، اسلئے ط، ل کے دائیں جانب واقع ہوتا ہے اور گ بائیں جانب اگر لا منفی ہو تو یہ مقام الٹ جاتے ہیں۔

$$\text{وط} = \text{لا} - \text{زیر مماس} = \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}}$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{وط} \times \text{ول} = \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}} \times \text{لا} = \text{ا}^2$$

جو ناقص کی ایک مشہور خاصیت ہے، نقطہ و ناقص کا مرکز ہے، دفعہ ۲۶ میں بھی اس نقطہ کو و سے موسوم کیا گیا ہے۔

مثال ۲۔ منحنی کی مساوات لا ما = ج² ہے، ک ن اور ط ن کی باہمی نسبت معلوم کرو۔

$$\text{یہاں}\quad \frac{\text{ک ن}}{\text{ط ن}} = \frac{\text{و ل}}{\text{ط ل}} = \frac{\text{لا ماَ}}{\text{ما}} = -\frac{\text{ج}^2}{\text{لا}} \div \frac{\text{ج}^2}{\text{لا}} = -1$$

نسبت کی یہ قیمت بلحاظ علامت اور مقدار کے ہے، اسلئے ن، ک اور ط کے درمیان واقع ہوتا ہے اور ک ط کی تنصیف ن پر ہوتی ہے۔ منحنی قطع زائد ہے (دفعہ ۲۷، ۲، مثال) اور مذکورہ بالا اسکی مشہور خاصیت ہے۔

۶۲۔ قوس کا مشتق۔ منحنی پر (شکل ۳۰) ایک ثابت نقطہ ا سے قوس ان کا طول س ناپا گیا ہے، عف$_{\text{لا}}$س، عف$_{\text{ما}}$س معلوم کرو۔

دفعہ ۵۶ کے موافق عمل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(\text{مف لا})^{۲} + (\text{مف ما})^{۲} = \left(\frac{\text{وترن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^{۲} (\text{مف س})^{۲} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں لا کے اضافے مف لا کے جواب میں س اور ما کے اضافے بالترتیب مف س اور مف ما ہیں، مف س = قوس ن ق۔ بلحاظ لا کے س کے تغیر کی اوسط شرح یعنی $\frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}}$ مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$۱ + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^{۲} = \left(\frac{\text{وترن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^{۲} \left(\frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}}\right)^{۲}$$

چونکہ مف لا ← ۰ کے لئے $\left(\frac{\text{وترن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^{۲}$ کی انتہا ایک ہے

$$\text{اسلئے} \quad ۱ + (\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما})^{۲} = (\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{س})^{۲}$$

$$\text{یا} \quad \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{س} = \sqrt{۱ + (\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما})^{۲}}$$

بالکل اسی طرح سے حاصل ہوگا

$$\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{س} = \sqrt{۱ + (\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لا})^{۲}}$$

$$\text{نیز جم فہ} = \text{نہا}_{\text{ن ق}\to۰} \frac{\text{مف لا}}{\text{ن ق}} = \text{نہا}_{\text{ن ق}\to۰} \left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{قوس ن ق}}{\text{وترن ق}}\right)$$

$$= \text{عف}_{\text{س}}\,\text{لا} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}$$

$$\text{جب فہ} = \text{نہا}_{\text{ن ق}\to۰} \frac{\text{مف ما}}{\text{ن ق}} = \text{نہا}_{\text{ن ق}\to۰} \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{قوس ن ق}}{\text{وترن ق}}\right) = \text{عف}_{\text{س}}\,\text{ما} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}}$$

ہم تفرقوں کی ترقیم استعمال کرتے ہیں اور لیتے ہیں ن ر = ورلا
تب ر ت = ورما اور ن ت = ورس
تفرقوں کی ترقیم میں ذیل کی مساوات حاصل ہوتی ہے

(ورس)۲ = (ورلا)۲ + (ورما)۲ .... (رَ)

اور (ورلا)۲ یا (ورما)۲ پر تقسیم کرنے سے س کا مشتق بلحاظ لا یا ما کے معلوم ہوتا ہے۔
اگر متغیر متبوع (ت) ہو اور ورت اس کا تفرقہ ہو تو حاصل ہوگا

ورلا = لاَ ورت، ورما = ماَ ورت، ورس = سَ ورت

ان قیمتوں کو (رَ) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
حسب دفعہ ۵۶ لاَ۲ + ماَ۲ = سَ۲
نیز ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{لاَ} = \frac{\text{ورلا}}{\text{ورت}} = \frac{\text{ورلا}}{\text{ورس}} \times \frac{\text{ورس}}{\text{ورت}} = \text{سَ جم فہ}$$

$$\text{ماَ} = \frac{\text{ورما}}{\text{ورت}} = \frac{\text{ورما}}{\text{ورس}} \times \frac{\text{ورس}}{\text{ورت}} = \text{سَ جب فہ}$$

مشق ۱۰

۱۔ ثابت کرو کہ مکانی ما۲ = ۴ ا لا میں زیر عماد مستقل ہے۔
نوٹ۔ ان الفاظ کو "وہ منحنی جسکی مساوات ما = ف (لا) ہے" اختصاراً لکھتے ہیں "منحنی ما = ف (لا)"
۲۔ اگر کسی منحنی کا زیر عماد مستقل ہو تو ثابت کرو کہ یہ منحنی مکانی ما۲ = ۴ ا لا + ج ہے جہاں ج مستقل ہے۔
۳۔ مکانی ما۲ = ۴ ا لا کے نقطہ (لا۱، ما۱) پر جو مماس اور

عماد کھینچ سکتے ہیں ان کی مساواتیں دریافت کرو۔
ثابت کرو کہ زیر مماس کی راس پر تنصیف ہوتی ہے۔
۴۔ اگر قطع ناقص (شکل ۲۰، دفعہ ۲۶) کے نقطہ ن پر کا مماس محور اعظم سے ط اور محور اصغر سے ط, پر ملے تو ثابت کرو کہ و م × و ط = و ع^2 اور و م, × و ط, = و ص^2
جہاں م اور م, ن کے ظل ہیں بالترتیب ع ع َ اور ص صَ پر۔

۵۔ ثابت کرو کہ زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ (لا, ، ما,) پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{لا\,لا_1}{ا^2} - \frac{ما\,ما_1}{ب^2} = ۱$$

مثال ۴ کی ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ
و م × و ط = و ع^2 ، و م, × و ط, = ــ و ص^2
اور منفی علامت کے معنی بیان کرو۔

۶۔ ناقص کے نقطہ (لا, ، ما,) پر عماد کی مساوات ہے

$$(لا - لا_1)\frac{ا^2}{لا_1} = (ما - ما_1)\frac{ب^2}{ما_1}$$

۷۔ اگر ناقص (شکل ۲۰) کے نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم سے گ پر ملے تو ثابت کرو کہ و گ = ز^2 × و م بلحاظ علامت اور مقدار، یہ بھی ثابت کرو کہ

$$س\,گ = ز(ع\,و + ز × و\,م) = ز × س\,ن$$
$$گ\,سَ = ز × سَ\,ن$$
$$س\,گ : گ\,سَ = س\,ن : سَ\,ن$$

موخرالذکر مساوات سے ظاہر ہے (اقلیدس ۳ ، ۲ ش ۳)
کہ ن پر کا عماد ن کے ماسکی فاصلوں کے درمیانی داخلی زاویہ
کی تنصیف کرتا ہے اور مماس خارجی زاویہ کی۔

۸۔ ناقص کے لئے مثال ۷ میں جو نتائج حاصل کئے گئے
ہیں ان کے متناظر نتائج زائد کے لئے ثابت کرو۔

۹۔ ایک مرکز دار تراش کے نقطہ ن پر مماس کھینچا گیا ہے
اور ماسکوں س، سَ سے اس مماس پر عمود س ے،
سَ ےَ کھینچے گئے ہیں (اشکال ۲۰ اور ۲۱)
ثابت کرو کہ س ے × سَ ےَ = ج ص²

$$\text{ناقص کی صورت میں س ے × سَ ےَ} = \frac{\frac{\text{ز لا}_1}{\text{ا}} - ۱}{\text{د}} \times \frac{-\frac{\text{ز لا}_1}{\text{ا}} - ۱}{\text{د}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ز}^2\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} - ۱}{\text{د}^2}$$

$$\text{جہاں } \text{د}^2 = \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4} = \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \frac{۱}{\text{ب}^2}\left(۱ - \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}\right)$$

کیونکہ لا₁، ما₁ ناقص پر واقع ہے۔ تھوڑی سی تحویل کے بعد
معلوم ہوگا کہ

$$\text{د}^2 = \frac{۱}{\text{ب}^2}\left(۱ - \frac{\text{ز}^2\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}\right) \quad \text{کیونکہ ز}^2 = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

(ملاحظہ ہو مشق ۶ سوال ۱۸)

۱۰۔ ناقص پر کوئی نقطہ ن (ا جم طہ، ب جب طہ) ہے،
ثابت کرو کہ ن پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں ہیں

(ملاحظہ ہو مشق ۵ سوال ۵)

لا/ا جم طہ + ما/ب جب طہ = ۱، ا/جم طہ لا − ب/جب طہ ما = ا² − ب²

۱۱- مکافی ما² = ۴ ا لا پر کوئی نقطہ ن (ات²، ۲ ات) ہے، ثابت کرو کہ ن پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں (ملاحظہ ہو مشق ۵، سوال ۶) ہیں

ما = لا/ت + ات، ما = − ت لا + ۲ ات + ات³

۱۲- مثال ۳ کے نتیجہ سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ اگر مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس (شکل ۱۹) محور سے ط پر ملے تو ثابت کرو کہ

ط س = ع س + ع م = س ن

ل ن کو ق تک خارج کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ط ن زاویہ س ن ل اور عماد ن گ زاویہ س ن ق کی تنصیف کرتا ہے۔ نیز اگر س ل راس پر کے مماس کو ے پر قطع کرے تو س ے، ط ن پر عمود ہے اور اسکی تنصیف کرتا ہے اور س ے² = ع س × س ن

۱۳- دفعہ ۶۱ کی ترقیم کے موافق منحنیات لا^م ما^ن = ج^(م+ن) کے لئے ثابت کرو کہ ک ن : ط ن = − م : ن

منحنی کو کھینچو اگر (۱) م = ۷، ن = ۵ (۲) م = ۱۰، ن = ۹

ان کو حرناگذار منحنی کہتے ہیں۔

۱۴- مکافی ما² = ۴ ا لا کے لئے ثابت کرو کہ

در س/در لا = √(۱ + ا/لا)، در س/در ما = √(۱ + ما²/۴ ا²)

۱۵۔ نیم کعبی مکافی $\text{ا}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{3}$ کے لئے ثابت کرو کہ (ترقیم دفعہ ۶۱)

$$\text{ط ل} = \frac{2}{3}\,\text{لا}\,،\quad \text{ل گ} = \frac{3}{2\,\text{ا}}\,\text{لا}^{2}\,،\quad \text{ل گ} = \frac{27}{8\,\text{ا}}\,\text{ط ل}^{2}$$

نیز ثابت کرو کہ
$$\frac{\text{د س}}{\text{د لا}} = \sqrt{1 + \frac{9\,\text{لا}}{4\,\text{ا}}}$$

اور اگر قوس س کا طول مبدأ سے ناپنا شروع کیا جائے تو اسکی تصدیق کرو کہ

$$\text{س} = \frac{8\,\text{ا}}{27}\left(1 + \frac{9\,\text{لا}}{4\,\text{ا}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\,\text{ا}}{27}$$

۱۶۔ ثابت کرو کہ جن نقاط پر خط مستقیم $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} = 0$ ناقص

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{2} = 1$$

کو کاٹتا ہے ان پر کے مماس محور لا کے متوازی ہیں اور جہاں $\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} = 0$ منحنی کو کاٹتا ہے وہاں پر کے مماس محور ما کے متوازی ہیں۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ اُن نقطوں پر کے کارٹیزی پتے کے مماس جہاں پر مکافی $\text{ا}\,\text{ما} = \text{لا}^{2}$ اس پتے [مساوات $\text{لا}^{3} + \text{ما}^{3} = 3\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{ما}$ مشق ۶ سوال ۱۲] کو کاٹتا ہے محور لا کے متوازی ہیں اور جن نقطوں پر مکافی $\text{ما}^{2} = \text{ا}\,\text{لا}$ پتے کو کاٹتا ہے ان پر کے مماس محور ما کے متوازی ہیں۔

مبدأ (۰، ۰) اِن میں سے ایک نقطہ ہے اور محددوں کے محور مماس ہیں اگرچہ یہ ایک مستثنیٰ صورت ہے جس کا دفعہ ۵۹ مثال ۷ میں ذکر کیا گیا ہے، باقی نقطے

$$\left(\text{ا}\sqrt[3]{2}\,،\ \text{ا}\sqrt[3]{4}\right)\,،\quad \left(\text{ا}\sqrt[3]{4}\,،\ \text{ا}\sqrt[3]{2}\right)$$ ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ کے لئے

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ا^4 - ز^2 لا^2}{ا^2 - لا^2}\right)}$$ اور زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لئے

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ز^2 لا^2 - ا^2}{لا^2 - ا^2}\right)}$$

۱۹۔ ثابت کرو کہ منحنی $ما = ج\, لا^{م}$ کے لئے

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(۱ + م^2 ج^2 لا^{2م-2}\right)}$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ منحنی $لا^{\frac{2}{3}} + ما^{\frac{2}{3}} = ا^{\frac{2}{3}}$ کے لئے

$$\frac{ds}{dx} = \left(\frac{ا}{لا}\right)^{\frac{1}{3}}،\quad س = \frac{3}{2}\, ا^{\frac{1}{3}}\, لا^{\frac{2}{3}}$$

جبکہ قوس کو نقطہ (۰، ا) سے ناپنا شروع کیا جائے۔

باب ہفتم

تفرق (مسلسل) ماورائی تفاعل، اعلیٰ رتبہ کے مشتق

۶۳- مثلثی تفاعلوں کے مشتق - دفعہ ۳۹ (۴) میں اساسی انتہا معلوم کی گئی ہے یعنی

نہا (ط ← ۰) (جب ط) / (ط) = ۱

(۱) عف لا جب لا = جم لا

کیونکہ عف لا جب لا = نہا (جب (لا + مف لا) - جب لا) / (مف لا)

اب (جب (لا + مف لا) - جب لا) / (مف لا) = (۲ جب (مف لا / ۲) جم (لا + مف لا / ۲)) / (مف لا)

= (جب (مف لا / ۲)) / (مف لا / ۲) جم (لا + مف لا / ۲)

پہلے جزوِ ضربی کی انتہا مف لا ← ۰ کے لئے ایک ہے اور دوسرے جزو ضربی کی انتہا جم لا ہے، اسلئے

عف لا جب لا = جم لا

(۲) عف لا جم لا = - جب لا

کیونکہ $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{جم لا} = \text{نہا}_{\text{عف لا}\to 0}\ \frac{\text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{جم لا}}{\text{عف لا}}$

اور $\text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{جم لا} = -\,\text{۲ جب}\,\frac{\text{مف لا}}{\text{۲}}\ \text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{\text{۲}}\right)$

باقی عمل ویسا ہی ہے جیسا (۱) میں۔

(۳) $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{مس لا} = \frac{\text{۱}}{\text{جم}^{2}\text{ لا}} = \text{قط}^{2}\text{ لا}$

کیونکہ $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{مس لا} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مس}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{مس لا}}{\text{مف لا}}$

$= \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{۱}}{\text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا})\ \text{جم لا}} \times \frac{\text{جب مف لا}}{\text{مف لا}}$

$= \frac{\text{۱}}{\text{جم}^{2}\text{ لا}} = \text{قط}^{2}\text{ لا}$

اگر مس لا کو $\frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$ کی شکل میں رکھکر حاصل تقسیم کے تفرق کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو بھی یہ نتیجہ حاصل ہو سکتا ہے۔

ابتدائی اصولوں کی بنا پر یا حاصل تقسیم کا کلیہ استعمال کرنے سے بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

(۴) $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{قم لا} = -\,\text{قم لا حم لا}$

(۵) $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{قط لا} = \text{قط لا مس لا}$

(۶) $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{حم لا} = -\,\frac{\text{۱}}{\text{جب}^{2}\text{ لا}} = -\,\text{قم}^{2}\text{ لا}$

شتقوں کے متعلق واقفیت تفاعلوں کی ترسیم میں مفید

ثابت ہوتی ہے، طالب علم کو چاہئے کہ اب تک جتنی ترسیمیں اُسنے بنائی ہیں ان کا اس نقطۂ نظر سے معائنہ کرے کہ مشتق، منحنی کے ڈھال کو تعبیر کرتا ہے۔

جیب اور جیب التمام دونوں کے مشتق وجہ کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہیں۔ باقی مثلثی تفاعلوں کی صورت میں متغیر کی جن قیمتوں کے لئے تفاعل غیر مسلسل ہوتے ہیں انہی قیمتوں کے لئے ان کے مشتق بھی غیر مسلسل ہوتے ہیں۔

تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کا کلیہ اکثر استعمال کرنا پڑتا ہے، کیونکہ بہت ہی کم صورتوں میں ایسا ہوتا ہے کہ متغیر محض لا ہو، لیکن جس صورت میں متغیر، لا کا خطی تفاعل یعنی ا لا + ب ہو وہ نہایت ضروری ہے۔

رکھو ا لا + ب = ع تو حاصل ہوگا

عف لا جب (ا لا + ب) = عف ع جب ع × عف لا (ا لا + ب)

= جم ع × ا = ا جم (ا لا + ب)

اسی طرح عف لا جم (ا لا + ب) = -ا جب (ا لا + ب)

عف لا مس (ا لا + ب) = ا قط² (ا لا + ب) وغیرہ وغیرہ

دراصل طالب علم کو چاہئے کہ ابتدا سے ہی ان صورتوں کے ساتھ مانوس ہوجائے۔

نیز جب² (ا لا + ب) کا مشتق معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ جب (ا لا + ب)، ع کے مساوی ہے۔ تب

عف لا [جب² (ا لا + ب)] = عف ع ع² × عف لا جب (ا لا + ب)

= ۲ ع × ا جم (ا لا + ب)

= ۲ ا جب (ا لا + ب) جم (ا لا + ب)

ذراسی مشق کے بعد اس اندراج کی بھی ضرورت نہیں رہے گی،

نوٹ - اگر زاویہ ڈگریوں میں بیان کیا گیا ہو تو اس صورت میں

عفلا جب لا، جم لا کے مساوی نہیں ہوگا بلکہ π/۱۸۰ جم لا کے

مساوی ہوگا کیونکہ لا درجے π لا/۱۸۰ نیم قطریوں کے مساوی ہوتے ہیں اور

جب (لا درجے) = جب (π لا/۱۸۰ نیم قطری)

عفلا جب (لا درجے) = عفلا جب (π لا/۱۸۰ نیم قطری)

= π/۱۸۰ جم (π لا/۱۸۰ نیم قطری)

= π/۱۸۰ جم (لا درجے)

مشق ۱۱

امثلہ ۱ تا ۹ میں بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

۱- جب ۳ لا + جم ۳ لا ۲- جب $\frac{\pi ۲}{۱}$ (لا + ب)

۳- جب م لا جم ن لا ۴- لا جب لا + جم لا

۵- جب لا - لا جم لا ۶- $\frac{۱}{۲}$ لا - $\frac{۱}{۴}$ جب ۲ لا

۷- $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۱}{۴}$ جب ۲ لا ۸- $\frac{۳}{۴}$ جب لا + $\frac{۱}{۱۲}$ جب ۳ لا

۹- - $\frac{۳}{۴}$ جم لا + $\frac{۱}{۱۲}$ جم ۳ لا

سوالات ۱۰ تا ۱۵ میں جو تفاعل دئے گئے ہیں اُن میں سے ہر ایک کے جواب میں ایک ایسا تفاعل معلوم کرو جس کا لا، مشتق وہ دیا ہوا تفاعل ہو۔

۱۰- جم ۲ لا - جب ۳ لا　　　۱۱- جم (ا لا + ب)

۱۲- قط² (ا لا + ب)　　　۱۳- جم² لا

۱۴- جب² لا　　　۱۵- جب ۴ لا جم ۲ لا

سوالات ۱۶ تا ۲۲ کے جملات کو بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

۱۶- جم² (ا لا + ب)　　　۱۷- مس² (½ لا + ۱)

۱۸- $\sqrt{\text{جب ۲ لا}}$　　　۱۹- $\frac{\text{جب}^2\text{ لا}}{\text{جم}^3\text{ لا}}$

۲۰- $\frac{\text{۱}}{\text{۱ + جم لا}}$　　　۲۱- $\frac{\text{۱ - جم لا}}{\text{۱ + جم لا}}$

۲۲- $\frac{\text{جب لا}}{\text{۱ + مس لا}}$

۲۳- ثابت کروکہ $\text{عف}_{\text{لا}}\left[\text{مس } \frac{\text{لا}}{\text{۲}}\right] = \frac{\text{۱}}{\text{۱ + جم لا}}$

اور $\text{عف}_{\text{لا}}\left[\text{لا مس } \frac{\text{لا}}{\text{۲}}\right] = \frac{\text{لا + جب لا}}{\text{۱ + جم لا}}$

۲۴- ثابت کروکہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ بالتدریج گھٹتا ہے جیسے لا صفر سے $\frac{\pi}{\text{۲}}$ تک بڑھتا ہے، اس تفاعل کو لا = ۰ سے لا = π تک مرتسم کرو (نیز ملاحظہ ہو سوال ۳۴)

یہ مسئلہ ثابت کرنیکے لئے دکھاؤ کہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کا مشتق منفی ہے اور اسلئے $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ گھٹنے والا تفاعل ہے، اگر لا = $\frac{\pi}{\text{۲}}$ تو $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{۲}}{\pi}$ اور جب لا < لا، اسلئے یہ لاتساویاں

حاصل ہوتی ہیں $\frac{۲}{\pi}$ لا $<$ جب لا $<$ لا

جو سعت صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان درست رہتی ہیں۔

۲۵۔ ایک نقطہ ایک خطِ مستقیم پر حرکت کرتا ہے اور اس کا فاصلہ س وقت ت پر اس خط پر کے ایک ثابت نقطہ سے اس مساوات س = اِ جم (ن ت ـ ع) سے حاصل ہوتا ہے۔ معلوم کرو کہ ت کی کن قیمتوں کے لئے اس کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہے اور اسوقت نقطہ کہاں ہے، ت کی کن قیمتوں کے لئے اسکی رفتار صفر ہوتی ہے اور ان آنوں میں نقطہ کہاں ہوتا ہے۔

۲۶۔ وقت ت پر ایک نقطہ کے محدد لا، ما ان مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں لا = اِ جم ت، ما = ب جب ت، ثابت کرو کہ جیسے ت صفر سے ۲π تک (یا تا سے تا + ۲π تک) بدلتا ہے یہ نقطہ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ وقت ت پر نقطہ کی رفتار کے اجزاء ترکیبی اور اسکی سمت حرکت دریافت کرو۔

۲۷۔ ایک نقطہ کے محدد ان مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

لا = اِ (طہ ـ جب طہ)، ما = اِ (۱ ـ جم طہ)

جہاں صفر $\leqq$ طہ $\leqq$ ۲π، ثابت کرو کہ نقطہ کے طریق کا مماس محور لا کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{۲}$ ـ $\frac{طہ}{۲}$ بناتا ہے اور اگر قوس کو مبدأ سے ناپا جائے تو س = ۴ اِ (۱ ـ جم $\frac{طہ}{۲}$)۔ نقطہ کے طریق کو خط تدویر کہتے ہیں (دفعہ ۱۴۶)

۲۸۔ جیبوں کے منحنی کی مساوات ما = اجب $\frac{لا}{ب}$ ہے،

اِس کا زیر مماس اور زیر عماد معلوم کرو۔

۲۹۔ اگر عفص ما = √(اُ² - لا²) اور لا = ا جب طہ تو ثابت کرو کہ

عفص ما = اُ جم² طہ

تفرقوں کی ترقیم میں ہم لکھ سکتے ہیں کہ

فرما = √(اُ² - لا²) فرلا ، فرلا = ا جم طہ فرطہ ، فرما = اُ جم² طہ فرطہ

۳۰۔ اگر فرما = √(لا² + اُ²) فرلا اور لا = ا مس طہ تو ثابت کرو کہ

فرما = اُ قط³ طہ فرطہ

۳۱۔ اگر فرما = فرلا / √(اُ² - لا²) اور لا = ا جب طہ، تو ثابت کرو کہ

فرما = فرطہ

۳۲۔ اگر فرما = فرلا / √(۲ ا لا - لا²) اور لا = ا (۱ + جب طہ) تو ثابت کرو کہ فرما = فرطہ

۳۳۔ اگر ف (لا) = ۱ - ½ لا² - جم لا تو ثابت کرو کہ جب، لا مثبت ہو تو فَ (لا) منفی ہوتا ہے، اسلئے دکھاؤ کہ لا کی مثبت قیمتوں کے لئے

۱ - ½ لا² < جم لا < ۱

ف (لا) گھٹنے والا تفاعل ہے۔ نیز چونکہ ف(لا) = ۰ جبکہ لا = ۰ اسلئے لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے اسے لازماً منفی ہونا چاہئیے۔

۳۴۔ اگر لا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

لا - ⅙ لا³ < جب لا < لا

فرض کرو کہ $\text{فہ}(\text{لا}) = \text{لا} - \frac{۱}{۶}\text{لا}^{۳} - \text{جب لا}$، تب (مثال ۳۳ کی رو سے) $\text{فہَ}(\text{لا})$ منفی ہے کیونکہ $\text{فہَ}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{لا})$

۳۵- اسی طرح سے ثابت کرو کہ جب لا مثبت ہو تو

$$۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} < \text{جم لا} < ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\lfloor ۴}\text{لا}^{۴}$$

$$\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} < \text{جب لا} < \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\lfloor ۵}$$

ان لاتساویوں کو کسی رقم تک لیجا سکتے ہیں۔

۳۶- لا کی منفی قیمتوں کے لئے سوالات ۳۳، ۳۴، ۳۵ کی لاتساویاں کس طرح بیان کی جا سکتی ہیں۔

۳۷- اگر لا مثبت ہو اور $\frac{\pi}{۲}$ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} < \frac{۱}{۳}\text{مس لا} + \frac{۲}{۳}\text{جب لا}$$

۴۶- مثلثی تفاعل خود وحید القیمت ہیں، لیکن مقلوب مثلثی تفاعلوں کو وحید القیمت بنانے کے لئے زاویہ کو خاص حدود کے اندر محدود کرنا پڑتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۲۸)، جیب، قاطع التمام، مماس اور مماس التمام کے مقلوب تفاعلوں کے لئے یہ وسعت $-\frac{\pi}{۲}$ سے $\frac{\pi}{۲}$ ہے اور جیب التمام اور قاطع کے لئے ۰ سے π۔

مقلوب تفاعلوں کے مشتق معلوم کرنے میں اس مسئلہ $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \frac{۱}{\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لا}}$ کو استعمال کیا گیا ہے [ملاحظہ ہو دفعہ ۵۹]

$$\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{جب}^{-1}\text{لا} = +\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$$

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\text{لا}$، تب $\text{لا} = \text{جب ما}$

اور $\text{عف}_{\text{ما}}\text{لا} = \text{جم ما} = +\sqrt{1-\text{لا}^2}$ کیونکہ جم ما مثبت ہے جبکہ ما، $-\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہو۔

اسلئے $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{جب}^{-1}\text{لا} = \text{عف}_{\text{لا}}\text{ما} = \frac{1}{\text{عف}_{\text{ما}}\text{لا}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$

(۲) $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{جم}^{-1}\text{لا} = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{جم}^{-1}\text{لا}$، تب $\text{لا} = \text{جم ما}$ اور

$\text{عف}_{\text{ما}}\text{لا} = -\text{جب ما} = -\left[+\sqrt{1-\text{لا}^2}\right]$ کیونکہ جب ما مثبت ہوتا ہے جبکہ ما، صفر اور π کے درمیان واقع ہو، اسلئے

$$\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{جم}^{-1}\text{لا} = \text{عف}_{\text{لا}}\text{ما} = \frac{1}{\text{عف}_{\text{ما}}\text{لا}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$$

یہ نتیجہ اِس مساوات سے بھی حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{جم}^{-1}\text{لا} = \frac{\pi}{2} - \text{جب}^{-1}\text{لا}$$

اسی طرح ذیل کے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۳) $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{1+\text{لا}^2}$ (۴) $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{مم}^{-1}\text{لا} = -\frac{1}{1+\text{لا}^2}$

(۵) $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{قم}^{-1}\text{لا} = -\frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ (۶) $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{قط}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}}$

ان نتائج میں سے (۱) اور (۳) نہایت ضروری ہیں، جذر مثبت عدد ہے اسلئے (مثلاً) $\sqrt{\text{لا}^2}$ سے مراد + لا ہوتی ہے اگر لا مثبت ہو اور − لا اگر لا منفی ہو۔ نتائج (۵) اور (۶) درست رہتے ہیں جبتک کہ لا مثبت رہے، جب، لا منفی ہو تو ہر ایک کی علامت بدل دینی پڑے گی۔

یہ بات قابل توجہ ہے کہ مقلوب مثلثی تفاعلوں کے مشتق ماورائی تفاعل نہیں ہیں بلکہ عام جبریہ تفاعل ہیں۔

مشتق (۱)، (۲)، (۵)، (۶) غیر مسلسل ہو جاتے ہیں $\text{لا} = \pm 1$ کیلئے۔ (۳) اور (۴)، لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مسلسل رہتے ہیں۔

مقلوب تفاعلوں کی صورت میں بھی طالب علم کو اس شکل کا پورے طور پر عادی ہونا چاہئے جبکہ متغیر متبوع لا نہ ہو بلکہ لا کا خطی تفاعل ہو خاص طور پر $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ یا $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ک}}}$۔

مثلاً اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{ع}$ تو

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{جب}^{-1}\text{ع} \times \text{عف}_{\text{لا}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\text{ع}^2}} \times \frac{1}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$$

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{مس}^{-1}\text{ع} \times \text{عف}_{\text{لا}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\text{ع}^2} \times \frac{1}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}$$

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ک}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\text{ک}-\text{لا}^2}}\text{،}\quad \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ک}}} = \frac{\sqrt{\text{ک}}}{\text{ک}+\text{لا}^2}$$

مشق ۱۲

سوالات ۱ تا ۶ کو بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

۱۔ $\text{جب}^{-1}\,\text{۲لا}$ ۲۔ $\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{۲لا} - ۱}{۳}\right)$

۳۔ $\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{۲لا} - ۱}{۲}\right)$ ۴۔ $\text{جب}^{-1}(۱ - \text{لا})$

۵۔ $\text{لا}\,\text{جب}^{-1}\,\text{لا}$ ۶۔ $\text{لا}\,\text{مس}^{-1}\,\text{لا}$

تفاعیل ۷ تا ۹ میں سے ہر ایک کے جواب میں ایک ایسا تفاعل لکھو جس کا لا مشتق دیا ہوا تفاعل ہو۔

۷۔ $\frac{۱}{\sqrt{۳ - \text{۲لا}^۲}}$ ۸۔ $\frac{۱}{۳ + \text{۲لا}^۲}$ ۹۔ $\frac{۱}{\sqrt{۴ - (\text{لا} - ۱)^۲}}$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left\{\frac{۱}{۲}\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲} + \frac{۱}{۲}\,\text{ا}^۲\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right\} = \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{ب} + \text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا}}{\text{ا} + \text{ب}\,\text{جم}\,\text{لا}}\right) = \frac{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}}{\text{ا} + \text{ب}\,\text{جم}\,\text{لا}}$

اگر $\text{ا}^۲$ کم ہو $\text{ب}^۲$ سے تو مشتق خیالی ہے، اسکی تشریح کرو۔

نوٹ۔ مثال ۱۱ کے مشتق کی قیمت صرف اسی صورت میں درست ہوگی جبکہ ا مثبت ہو اور لا پہلے یا دوسرے مثبت ربع میں واقع ہو۔ اگر ا منفی ہو یا لا پہلے یا دوسرے منفی ربع میں واقع ہو تو نتیجہ کی علامت کو بدل دینا ہوگا۔

اسی طرح کے الفاظ مثال ۱۲ پر بھی صادق آتے ہیں، مثال ۱۴ میں نتیجہ درست ہوگا اگر ا مثبت ہو اور لا پہلے مثبت ربع یا پہلے منفی ربع میں واقع ہو۔

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left\{\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}\,\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{ب}+\text{ا جم لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}}\right)-\frac{\text{ا جب لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}}\right\}=\frac{(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{جم لا}}{(\text{ا}+\text{ب جم لا})^2}$$

۱۳ - ثابت کرو کہ

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{۱-\text{ک}^2}\;\text{مس لا}\right)=\frac{\sqrt{۱-\text{ک}^2}}{۱-\text{ک}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا}}$$

۱۴ - ثابت کرو کہ

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{ب}+\text{ا جب لا}}{\text{ا}+\text{ب جب لا}}\right)=\frac{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}{\text{ا}+\text{ب جب لا}}$$

۱۵ - اگر لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ اور لا، ما، ر، طہ سب ت کے تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{لاَ} = \text{رَ جم طہ} - \text{ر جب طہ طہَ}$ (۲) $\text{ماَ} = \text{رَ جب طہ} + \text{ر جم طہ طہَ}$

(۳) $\text{لا ماَ} - \text{ما لاَ} = \text{ر}^2\,\text{طہَ}$

۶۵ - **قوت نمائی اور لوکارثمی تفاعل** - اس صورت میں اساسی انتہا وہ ہے جو دفعہ ۴۸ میں معلوم کی گئی ہے یعنی

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}}=\text{نو}$$

اور وہ جو نتیجہ صریح دفعہ ۴۹ میں بیان کی گئی ہے جسے اس شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\frac{\text{نو}^{\text{مف لا}}-۱}{\text{مف لا}}=۱$$

(۱) $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{نو}^{\text{لا}}=\text{نو}^{\text{لا}}$

کیونکہ $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{قو}^{\text{لا}} = \text{بہیا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{قو}^{\text{لا}+\text{مف لا}} - \text{قو}^{\text{لا}}}{\text{مف لا}} = \text{قو}^{\text{لا}}\,\text{بہیا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{قو}^{\text{مف لا}} - ۱}{\text{مف لا}} = \text{قو}^{\text{لا}}$

نتیجہ صریح　$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ا}^{\text{لا}} = \text{لوک ا} \times \text{ا}^{\text{لا}}$

کیونکہ اگر ک = لوک ا، $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{قو}^{\text{ک لا}}$، پس ک لا کو ع کے مساوی رکھنے سے

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ا}^{\text{لا}} = \text{عف}_{\text{ع}}\,\text{قو}^{\text{ع}} \times \text{عف}_{\text{لا}}(\text{ک لا}) = \text{قو}^{\text{ک لا}} \times \text{ک} = \text{لوک ا} \times \text{ا}^{\text{لا}}$$

(۲)　$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{لوک لا} = \frac{۱}{\text{لا}}$

کیونکہ $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{لوک لا} = \text{بہیا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{لوک}(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{لوک لا}}{\text{مف لا}}$

$$= \text{بہیا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{۱}{\text{مف لا}}\,\text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

رکھو $\frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} = \frac{۱}{\text{م}}$ پس اگر لا $\neq$ ۰ تو جیسے مف لا مائل بہ صفر ہوتا ہے م مائل بہ ∞ ہوتا ہے، اب

$$\frac{۱}{\text{مف لا}}\,\text{لوک}\left(۱+\frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right) = \frac{\text{م}}{\text{لا}}\,\text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{م}}\right) = \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لوک}\left[\left(۱+\frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right]$$

اور $\text{بہیا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{۱}{\text{مف لا}}\,\text{لوک}\left(۱+\frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right) = \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{بہیا}_{\text{م}\to\infty}\,\text{لوک}\left[\left(۱+\frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right]$

$$= \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لوک}\left[\text{بہیا}_{\text{م}\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right] = \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لوک قو}$$

چونکہ لوکارثموں کا اساس قو فرض کیا گیا ہے، اسلئے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح　$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{لوک}_{۱۰}\,\text{لا} = \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لوک}_{۱۰}\,\text{قو}$

اگر لوک لا کا مشتق ۱/لا مان لیا جائے تو قولا کا مشتق مقلوب تفاعلوں کے مشتق معلوم کرنے کے قاعدہ کو استعمال کرنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔ اور برعکس اس کے لوک لا کا مشتق قولا کے مشتق سے حاصل ہوسکتا ہے، مثلاً

فرض کرو کہ ما = قولا تب لا = لوک ما اور عف_ما لا = ۱/ما

عف_لا قولا = عف_لا ما = ۱/(عف_ما لا) = ما = قولا

نیز عف_لا لوک (ا لا + ب) = ا/(ا لا + ب)

کیونکہ رکھو ا لا + ب = ع تو حاصل ہوگا

عف_لا لوک (ا لا + ب) = عف_ع لوک ع × عف_لا (ا لا + ب) = ۱/ع × ا

= ا/(ا لا + ب)

چونکہ لوک لا حقیقی عدد صرف اُس وقت ہوتا ہے جبکہ لا مثبت ہو، اس لئے لوک (- لا) صرف اُس صورت میں حقیقی ہوگا جبکہ لا منفی ہو، لیکن لوک (- لا) کا مشتق ۱/لا ہے جیسے کہ مندرجۂ بالا میں ا = - ۱ اور ب = ۰ رکھنے سے معلوم ہوسکتا ہے،

پس وہ تفاعل جس کا لا، مشتق ۱/لا ہے لوک لا ہوگا اگر لا مثبت ہو اور لوک (- لا) ہوگا اگر لا منفی ہو۔

یہ قابل توجہ ہے کہ لوک لا کا مشتق جبریہ تفاعل ہے جو اپنے ابتدائی تفاعل کی طرح لا = ۰ کے لئے غیر مسلسل ہے۔

مثال ۱۔
$$\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}}$$

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}$ ، تب

$$\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}\right) = \text{عف}_{\text{ع}}\ \text{لوک ع} \times \text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ع} = \frac{1}{\text{ع}} \times \text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ع}$$

$$\text{اور عف}_{\text{لا}}\ \text{ع} = 1 + \frac{1}{2}\left(\text{لا}^2 + \text{ک}\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2\,\text{لا} = \frac{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}} + \text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}}$$

اور نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔
یہ قابل توجہ ہے کہ

$$\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}} = \text{لا، مشتق لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}\right)\ \text{کا}$$

$$\text{لیکن}\ \frac{1}{\sqrt{\text{ک} - \text{لا}^2}} = \text{〃}\quad\text{〃}\quad \text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ک}}}\right)\ \text{یا}\ -\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ک}}}\right)\ \text{کا،}$$

تکملی احصا میں یہ نتائج کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ $\text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})$ اور $\text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})$ کے مشتق معلوم کرو، طبیعیات کی بعض شاخوں میں یہ تفاعل کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left\{\text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})\right\} = \text{ا}\ \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})$$
$$+\ \text{ب}\ \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})$$
$$= \text{و}^{\text{ا لا}}\left\{\text{ا جب}(\text{ب لا} + \text{ج}) + \text{ب جم}(\text{ب لا} + \text{ج})\right\}$$

یہ نتیجہ نہایت موزوں شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

ا، ب کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں ر اور طہ ہمیشہ اس طرح پر معلوم ہو سکتے ہیں کہ

$$\text{ر جتم طہ} = \text{ا} ، \quad \text{ر جیب طہ} = \text{ب}$$

ان مساواتوں سے $\text{ر} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ ، $\text{مس طہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اب ا، ب کی بجائے بالترتیب ر جتم طہ، ر جیب طہ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left[\text{قو}^{\text{ا لا}}\,\text{جیب}(\text{ب لا} + \text{ج})\right] = \text{ر قو}^{\text{ا لا}}\left\{\text{جتم طہ جیب}(\text{ب لا} + \text{ج}) + \text{جیب طہ جتم}(\text{ب لا} + \text{ج})\right\} = \text{ر قو}^{\text{ا لا}}\,\text{جیب}(\text{ب لا} + \text{ج} + \text{طہ})$$

اسی طرح سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عف}_{\text{لا}}\left[\text{قو}^{\text{ا لا}}\,\text{جتم}(\text{ب لا} + \text{ج})\right] = \text{ر قو}^{\text{ا لا}}\,\text{جتم}(\text{ب لا} + \text{ج} + \text{طہ})$$

جہاں ر اور طہ کے وہی معنی ہیں جو اوپر بیان ہوئے۔

اس استحالہ میں احتیاط ضروری ہے کیونکہ مماس کے معلوم ہونے سے طہ یگانہ طور پر نہیں معلوم ہو سکتا، جس ربع میں طہ واقع ہوتا ہے وہ ا اور ب کی علامتوں سے معلوم ہوگا۔ پس اگر ر کو مثبت مانا جائے اور ا، ب دونوں مثبت ہوں تو طہ پہلے ربع میں واقع ہوگا لیکن اگر ا، ب دونوں منفی ہوں تو مس طہ مثبت ہوگا لیکن طہ تیسرے ربع میں واقع ہوگا، اسی طرح کے مشاہدات صادق آئیں گے جبکہ ا اور ب کی علامتیں مختلف ہوں۔

عملی طور پر اس میں سہولت ہوگی کہ ر کو مثبت مانا جائے جبکہ ا مثبت ہو اور منفی مانا جائے جبکہ ا منفی ہو اور پھر طہ کو مثبت یا منفی حادہ زاویہ قرار دیا جائے۔ عددی مثالوں کو عام

ضابطہ لگانے کے بغیر حل کرنا مناسب ہوگا۔

$$\text{عف}_{\text{لا}} \left\{ \text{قو}^{-۳\text{لا}}\, \text{جم}\,(۴\text{لا}+۱) \right\} = -\text{قو}^{-۳\text{لا}} \left\{ ۳\,\text{جم}\,(۴\text{لا}+۱) + ۴\,\text{جب}\,(۴\text{لا}+۱) \right\}$$

س اور طہ کو اسطرح منتخب کرو کہ س جم طہ = ۳، س جب طہ = ۴

اس لئے س = ۵، مس طہ = $\frac{۴}{۳}$ = مس ۵۳° ۸'

اور ۵۳° ۸' = ۰.۹۲۷۴ نیم قطری، اسلئے

$$\text{عف}_{\text{لا}} \left\{ \text{قو}^{-۳\text{لا}}\, \text{جم}\,(۴\text{لا}+۱) \right\} = -۵\,\text{قو}^{-۳\text{لا}} \left\{ \text{جم طہ جم}\,(۴\text{لا}+۱) + \text{جب طہ جب}\,(۴\text{لا}+۱) \right\}$$

$$= -۵\,\text{قو}^{-۳\text{لا}}\, \text{جم}\,(۴\text{لا}+۱-\text{طہ}) = -۵\,\text{قو}^{-۳\text{لا}}\, \text{جم}\,(۴\text{لا}+۰.۰۷۲۶)$$

مثال ۳۔ $\sqrt{\frac{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)}{(\text{لا}-۳)(\text{لا}-۴)}}$ کا لا، مشتق معلوم کرو۔

اِس صورت میں اور ایسی اور صورتوں میں جہاں تفاعل حاصل ضرب کی شکل میں ہو اس میں سہولت ہوگی کہ سب سے پہلے تفاعل کا لوکارتم لیا جائے اور پھر اسے تفرق کیا جائے۔ اِس تفاعل کو ما سے تعبیر کرو، تب

$$\text{لوک ما} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۱) + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۲) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۳) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۴)$$

$$\text{اب عف}_{\text{لا}}\,\text{لوک ما} = \text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لوک ما} \times \text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \frac{۱}{\text{ما}}\,\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}$$

$$\text{اسلئے } \frac{۱}{\text{ما}}\,\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\text{لا}-۱} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\text{لا}-۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\text{لا}-۳} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\text{لا}-۴}$$

$$= -\frac{۲\text{لا}^۲ - ۱۰\text{لا} + ۱۱}{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)(\text{لا}-۳)(\text{لا}-۴)}$$

اسلئے $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = -\dfrac{۲\,\text{لا}^{۲} - ۱۰\,\text{لا} + ۱۱}{(\text{لا}-۱)^{\frac{۱}{۲}}(\text{لا}-۲)^{\frac{۱}{۲}}(\text{لا}-۳)^{\frac{۳}{۲}}(\text{لا}-۴)^{\frac{۳}{۲}}}$

اسی طرح اگر تفاعل $\dfrac{\text{ع و ی}}{\text{ع}_۱\text{و}_۱\text{ی}_۱}$ ہو جہاں ع، و ... ی$_۱$ سب لا کے تفاعل ہیں تو تفاعل کو ما سے تعبیر کرنے اور تفرق کرنے سے حاصل ہوگا (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۸، مسئلہ ۴)

$$\frac{\text{عف ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{عف ع}}{\text{ع}} + \frac{\text{عف و}}{\text{و}} + \frac{\text{عف ی}}{\text{ی}} - \frac{\text{عف ع}_۱}{\text{ع}_۱} - \frac{\text{عف و}_۱}{\text{و}_۱} - \frac{\text{عف ی}_۱}{\text{ی}_۱}$$

مثال ۴۔ اگر ع اور و دونوں لا کے تفاعل ہوں تو ہم $\text{ع}^{\text{و}}$ کا مشتق اس طرح معلوم کر سکتے ہیں

رکھو $\text{ما} = \text{ع}^{\text{و}}$ اور طرفین کے لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک ما} = \text{و لوک ع}$$

$$\frac{\text{عف ما}}{\text{ما}} = \text{عف و} \times \text{لوک ع} + \text{و}\,\frac{\text{عف ع}}{\text{ع}}$$

$$\text{عف ع}^{\text{و}} = \text{ع}^{\text{و}}\left\{\text{عف و} \times \text{لوک ع} + \frac{\text{و}}{\text{ع}}\,\text{عف ع}\right\}$$

مثلاً $\text{عف لا}^{\text{لا}} = \text{لا}^{\text{لا}}\,(\text{لوک لا} + ۱)$

مشق ۱۳

جملات ۱ تا ۱۲ کو بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

۱۔ لا لوک لا   ۲۔ $\text{لا}^{\text{ن}}$ لوک لا

۳۔ لوک جب لا   ۴۔ لوک جم لا

۵۔ لوک مس $\dfrac{\text{لا}}{۲}$ ۶۔ لوک $\left(\dfrac{۱+\text{جب لا}}{۱-\text{جب لا}}\right)$

۷- $\text{لوک}\ \dfrac{\sqrt{\text{ا}+\text{لا}}}{\sqrt{\text{ا}-\text{لا}}}$ ۸- $\text{لوک}\left(\dfrac{\text{۱}-\text{جم لا}}{\text{۱}+\text{جم لا}}\right)$

۹- $\text{لوک}\left(\sqrt{\text{لا}+\text{ا}}+\sqrt{\text{لا}-\text{ا}}\right)$ ۱۰- $\text{لا}\ \text{قو}^{\text{لا}}$

۱۱- $\text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{\text{لا}}$ ۱۲- $\text{قو}^{-\text{لا}}(\text{جب لا}+\text{جم لا})$

۱۳- $\dfrac{\text{قو}^{\text{لا}}}{\text{۱}+\text{لا}}$

تفاعیل ۱۴ تا ۱۸ میں سے ہر ایک کے جواب میں ایک تفاعل معلوم کرو جس کا لا، مشتق دیا ہوا تفاعل ہو۔

۱۴- $\dfrac{\text{۱}}{\text{۳لا}+\text{۴}}$ ۱۵- $\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{ا}^{\text{۲}}}\left[=\dfrac{\text{۱}}{\text{۲ا}}\left(\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}-\text{ا}}-\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}+\text{ا}}\right)\right]$

۱۶- $\dfrac{\text{۱}}{\text{۴لا}^{\text{۲}}-\text{۹}}$ ۱۷- $\dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱}}}$ ۱۸- $\text{قو}^{\text{ا لا}}$

۱۹- اگر $\text{ما}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ک}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ک}\ \text{لوک}\left\{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ک}}\right\}$

تو ثابت کرو کہ $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما}=\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ک}}$

مقابلہ کرو مشق ۱۲ سوال ۱۰ کے ساتھ۔

۲۰- اگر $\text{ما}=\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ک}}-\sqrt{\text{ک}}\ \text{لوک}\left\{\dfrac{\sqrt{(\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ک})}+\sqrt{\text{ک}}}{\text{لا}}\right\}$

تو ثابت کرو کہ $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما}=\dfrac{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ک}}}{\text{لا}}$

۲۱- اگر $\text{ما}=\text{لوک}\ \dfrac{\text{ب}+\text{ا جم لا}+\sqrt{\text{ب}^{\text{۲}}-\text{ا}^{\text{۲}}}\ \text{جب لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}}$

تو ثابت کرو کہ $\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما}=\dfrac{\sqrt{\text{ب}^{\text{۲}}-\text{ا}^{\text{۲}}}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}}$

مقابلہ کرو مشق ۱۲ سوال ۱۱ کے ساتھ

۲۲۔ قوت نما منحنی $ما = ج \, قو^{\frac{لا}{ا}}$ میں زیر مماس اور زیر عماد معلوم کرو۔

۲۳۔ جس منحنی کی مساوات $ما = \frac{ا}{۲} \left(قو^{\frac{لا}{ا}} + قو^{-\frac{لا}{ا}} \right)$ ہے اُسے ہم زنجیرہ کہیں گے، اس کا زیر مماس، زیر عماد اور عماد معلوم کرو۔ اگر اِس منحنی کے کسی نقطہ سے محور لا پر معین کھینچا جائے اور معین کے پایہ سے اس نقطہ پر کے مماس پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اِس عمود کا طول مستقل ہے، اِس منحنی کو مرتسم کرو۔

۲۴۔ اگر زنجیرہ میں قوس کو نقطہ $لا = ۰$ سے ناپنا شروع کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{دس}{دلا} = \frac{۱}{۲} \left(قو^{\frac{لا}{ا}} + قو^{-\frac{لا}{ا}} \right) \quad اور \quad س = \frac{ا}{۲} \left(قو^{\frac{لا}{ا}} - قو^{-\frac{لا}{ا}} \right)$$

دفعہ ۶۶۔ **زائدی تفاعل**۔ حال میں ہی کئی اور تفاعل جنہیں ہم **زائدی تفاعل** کہتے ہیں احاطۂ ریاضی میں شریک کئے گئے ہیں، یہ مثلثی تفاعلوں کے ساتھ کئی طرح کی مشابہت رکھتے ہیں اور کئی لحاظ سے قائم زائد کے ساتھ اِن کا وہی تعلق ہے جو مثلثی تفاعلوں کا دائرہ کے ساتھ ہے، ہم انہیں زیادہ استعمال نہیں کرینگے تاہم اس جگہ اِن کی تعریف دیدینا مناسب معلوم ہوتا ہے تاکہ جب کبھی طالب علم کو اپنے مطالعہ میں کہیں ان سے واسطہ پڑے تو وہ اِن سے مطلق ناشناس نہ ہو۔ ان تفاعلوں کو ہم زائدی جیب، زائدی جیب التمام، زائدی مماس، وغیرہ کہیں گے اور اِن کے لئے بالترتیب یہ علامات

استعمال کریں گے۔ جبز، جمز، مسز، وغیرہ وغیرہ۔ ان کی تعریفات یہ ہیں۔

$$\text{جبز}\,لا = \frac{قو^{لا} - قو^{-لا}}{۲}\ ،\quad \text{جمز}\,لا = \frac{قو^{لا} + قو^{-لا}}{۲}$$

$$\text{مسز}\,لا = \frac{\text{جبز}\,لا}{\text{جمز}\,لا} = \frac{قو^{لا} - قو^{-لا}}{قو^{لا} + قو^{-لا}}\ ،\quad \text{ممز}\,لا = \frac{\text{جمز}\,لا}{\text{جبز}\,لا}\ ،$$

$$\text{قمز}\,لا = \frac{۱}{\text{جبز}\,لا}\ ،\quad \text{قطز}\,لا = \frac{۱}{\text{جمز}\,لا}$$

تماثل۔ ذیل کے تماثل لا کی رقوم میں تفاعلوں کی قیمتیں مندرج کرنے سے بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں، یہ مثلثی تفاعلوں کے تماثلوں سے خاص مشابہت رکھتے ہیں۔

(۱) $\text{جمز}^{۲}\,لا - \text{جبز}^{۲}\,لا = ۱$ (۲) $۱ - \text{مسز}^{۲}\,لا = \text{قطز}^{۲}\,لا$

(۳) $\text{ممز}^{۲}\,لا - ۱ = \text{قمز}^{۲}\,لا$ جہاں $\text{جمز}^{۲}\,لا$ سے مراد $(\text{جمز}\,لا)^{۲}$ ہے وغیرہ وغیرہ۔

مسئلہ جمع۔ علم مثلث کے مسئلہ جمع کے جواب میں

(۴) $\text{جبز}\,(لا \pm ما) = \text{جبز}\,لا\ \text{جمز}\,ما \pm \text{جمز}\,لا\ \text{جبز}\,ما$

(۵) $\text{جمز}\,(لا \pm ما) = \text{جمز}\,لا\ \text{جمز}\,ما \pm \text{جبز}\,لا\ \text{جبز}\,ما$

ما = لا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

(۶) $\text{جبز}\,۲لا = ۲\,\text{جبز}\,لا\ \text{جمز}\,لا$

(۷) $\text{جمز}\,۲لا = \text{جمز}^{۲}\,لا + \text{جبز}^{۲}\,لا = ۲\,\text{جمز}^{۲}\,لا - ۱$

$$= ۱ + ۲\,\text{جبز}^{۲}\,لا$$

ان تفاعلوں کی ترسیمیں بنانے میں یہ یاد رہے کہ جیب، مماس اور انکے متکافی، طاق تفاعل ہیں، لیکن جیب التمام اور اس کا متکافی

دونوں جفت تفاعل ہیں ۔ جیب کی کوئی قیمت $-\infty$ سے $+\infty$ تک ہو سکتی ہے، جیب التمام کبھی ایک سے کم نہیں ہو سکتی اور ہمیشہ مثبت ہوتی ہے ۔ مماس کی کوئی قیمت ‎-۱ اور ‎+۱ کے درمیان ہو سکتی ہے اور خطوط ما = ± ۱، مسنز لا کی ترسیم کے متقارب ہیں ۔

مشتق ۔ مشتق بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں

عف‌لا جبز لا = جمز لا ، عف‌لا جمز لا = جبز لا

عف‌لا مسنز لا = قطز^{۲} لا ، عف‌لا ممز لا = ‎-قمز^{۲} لا

عف‌لا قمز لا = ‎-قمز لا ممز لا ، عف‌لا قطز لا = ‎-قطز لا مسنز لا

مقلوب زائدی تفاعل۔ مقلوب تفاعل لوکارثموں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں

ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ما = جب$^{-۱}$ لا تو جب ما = لا

اسی طرح اگر ما = جبز$^{-۱}$ لا تو لا = جبز ما

پس ما کی لوکارثمی صورت معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس مساوات کو حل کرنا چاہئے

لا = $\frac{۱}{۲}$ (قو^{ما} - قو$^{-ما}$) یعنی قو^{۲ما} - ۲ لا قو^{ما} - ۱ = ۰

جس سے حاصل ہوتا ہے قو^{ما} = لا ± $\sqrt{\text{لا}^{۲} + ۱}$

چونکہ قو^{ما} ہمیشہ مثبت ہوتا ہے، اسلئے صرف مثبت علامت لی جاسکتی ہے ۔

اسلئے قو^{ما} = لا + $\sqrt{\text{لا}^{۲} + ۱}$ اور جبز$^{-۱}$ لا = ما = لوک (لا + $\sqrt{\text{لا}^{۲} + ۱}$)

اسی طرح سے حاصل ہوتا ہے جمز$^{-۱}$ لا = لوک (لا ± $\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}$)

اب چونکہ $لا - \sqrt{لا^{۲} - ۱} = \frac{۱}{لا + \sqrt{لا^{۲} - ۱}}$ ، اس لئے

$$لوک \left(لا - \sqrt{لا^{۲} - ۱}\right) = - لوک \left(لا + \sqrt{لا^{۲} - ۱}\right)$$

اس صورت میں مقلوب تفاعل وحیدالقیمت نہیں ہے، لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو ایک سے بڑی ہو $جمز^{-۱} لا$ کی دو قیمتیں ہوتی ہیں جو باہم مساوی مگر مختلف العلامت ہیں۔ جمز لا کی ترسیم عام صورت میں $۱ + لا^{۲}$ کی ترسیم کی مانند ہے، $۱ + لا^{۲}$ کی ترسیم کو زاویہ لا و ما کے منصف کے گرد گھمانے سے ایک ایسا منحنی ملنا چاہئے جو $جمز^{-۱} لا$ کی ترسیم سے مشابہت رکھتا ہو۔ یہ منحنی محور لا کے گرد متشاکل ہوگا چونکہ جمز لا کا منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہے۔

اگر $لا^{۲} < ۱$ تو $مسز^{-۱} لا = \frac{۱}{۲} لوک \frac{۱ + لا}{۱ - لا}$

اگر $لا^{۲} > ۱$ تو $ممز^{-۱} لا = \frac{۱}{۲} لوک \frac{لا + ۱}{لا - ۱}$

مقلوب تفاعلوں کے مشتق۔ مقلوب تفاعلوں کے مشتق حسب ذیل ہیں، سہولت کی خاطر ان میں لا کی بجائے $\frac{لا}{ا}$ لیا گیا ہے۔

$$عف_{لا}\, جبز^{-۱} \frac{لا}{ا} = \frac{۱}{\sqrt{لا^{۲} + ا^{۲}}}$$

$$عف_{لا}\, جمز^{-۱} \frac{لا}{ا} = \pm \frac{۱}{\sqrt{لا^{۲} - ا^{۲}}}$$

$$عف_{لا}\, مسز^{-۱} \frac{لا}{ا} = \frac{ا}{ا^{۲} - لا^{۲}} \quad (لا^{۲} < ا^{۲})$$

$$عف_{لا}\, ممز^{-۱} \frac{لا}{ا} = \frac{-ا}{لا^{۲} - ا^{۲}} \quad (لا^{۲} > ا^{۲})$$

جبتر$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کے مثبت معین کے لئے مشتق میں مثبت علامت لینی چاہئیے۔ یہ قابل توجہ ہے کہ

$$\text{جبتر}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}} = \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}\right) - \text{لوک ا}$$

پس جبتر$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کا مشتق وہی ہے جو لوک $\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}\right)$ کا ہے کیونکہ عمل تفرق میں لوک ا غائب ہو جاتا ہے، لیکن جب ایک ہی نتیجہ کی لوکارتمی شکل اور مقلوب زائدی جیب (یا جیب التمام) والی شکل کا باہم مقابلہ کرنا مقصود ہو تو یہ یاد رکھنا چاہئیے کہ جبتر$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کی لوکارتمی صورت کے نسب نما میں ا واقع ہوتا ہے۔

۶۷۔ اعلیٰ رتبہ کے مشتق۔ بالعموم ف (لا) کا مشتق خود لا کا تفاعل ہوتا ہے، اس لئے اسے پھر تفرق کر سکتے ہیں۔ مثلاً لا^{3} کا مشتق ۳ لا^{2} ہے اور ۳ لا^{2} کا ۶ لا۔ اس طرح ہم ۶ لا کو لا^{3} کا دوسرا مشتق کہیں گے اور ۳ لا^{2} کو جو اب تک صرف مشتق کے نام موسوم ہوتا رہا ہے امتیاز کی خاطر لا^{3} کا پہلا مشتق کہینگے۔

قوت نماؤں کی ترقیم کی نظیر کے موافق اعلیٰ مشتقوں کے لئے ترقیم وضع کی جا سکتی ہے۔

ما کا پہلا لا مشتق $\text{عف}_{\text{لا}}$ ما ہے

ما کا دوسرا 〃 $\text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{ما})$ ہے، اسے ہم لکھینگے $\text{عف}^{2}_{\text{لا}}$ ما

〃 تیسرا 〃 $\text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}^{2}_{\text{لا}}\ \text{ما})$ 〃 〃 $\text{عف}^{3}_{\text{لا}}$ ما

〃 ن، واں 〃 $\text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}^{\text{ن}-1}_{\text{لا}}\ \text{ما})$ 〃 〃 $\text{عف}^{\text{ن}}_{\text{لا}}$ ما

اگر پہلے مشتق کو اس شکل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ میں لکھا جائے تو اعلیٰ مشتقوں کی ترقیم میں $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کو عف$_{\text{لا}}$ کا معادل خیال کیا جائیگا

مثلاً عف$^{۲}_{\text{لا}}$ ما کی بجائے $\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فر لا}^{۲}}$ ما یا $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ ہوگا اور بالعموم عف$^{\text{ن}}_{\text{لا}}$ ما کی بجائے $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$ ما یعنی $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$ لکھا جائے گا۔

اعلیٰ مشتقوں کی ترقیم میں بعض اوقات زبریں بھی استعمال کی جائیں گی۔

مثلاً ف (لا) کا دوسرا، تیسرا، چوتھا، ن، واں مشتق بالترتیب فً (لا)، فً (لا)، ف$^{(۴)}$ لا، ... ف$^{(\text{ن})}$ لا سے تعبیر ہوگا جہاں ن کے گرد خطوط وحدانی لکھدی گئی ہے تاکہ ن، ویں قوت اور ن، ویں مشتق میں تمیز ہو سکے، اسی طرح اً، ماً... لاً، لاً، ... بھی استعمال ہو سکتے ہیں لیکن جب زبریں یا نقطے دو سے زیادہ ہوں تو یہ ترقیم بے ڈھب ہو جاتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر ف (لا) = ا لا^{۴} + ب لا^{۳} + ج لا^{۲} + د لا + ع تو فَ (لا)، فً (لا)، ف$^{(۳)}$ (لا) معلوم کرو۔

فَ (لا) = ۴ ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۲ ج لا + د

فً (لا) = ۱۲ ا لا^{۲} + ۶ ب لا + ۲ ج

فً (لا) = ۲۴ ا لا + ۶ ب

ف^{۴} (لا) = ۲۴ ا

چونکہ ف^{۴} (لا) مستقل ہے، اس لئے پانچواں اور اس سے اعلیٰ تمام مشتق صفر ہونگے۔ یہ بآسانی معلوم ہوگا کہ لا^{ن} کا ن' واں مشتق |ن ہے اور ن سے اعلیٰ رتبہ کے سب مشتق صفر ہیں۔

مثال ۲۔ اگر لا = ا جم ن ت تو ف^{۲}لا / فت^{۲} معلوم کرو

فلا / فت = - ن ا جب ن ت، ف^{۲}لا / فت^{۲} = - ن^{۲} ا جم ن ت

= - ن^{۲} لا

مثال ۳۔ اگر ما = ئو^{الا} تو ثابت کرو کہ عف^{ن} ما = ا^{ن} ئو^{الا} = ا^{ن} ما

عف ما = ا ئو^{الا}، عف^{۲} ما = ا عف ئو^{الا} = ا^{۲} ئو^{الا} وغیرہ

اس صورت میں گویا تفرق کا عمل، تفاعل کو ا کے ساتھ ایک دفعہ ضرب دیدینے کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ اگر ما = ئو^{الا} جب (ب لا + ج) تو معلوم کرو عف^{۲} ما، عف^{ن} ما

عف ما = ر ئو^{الا} جب (ب لا + ج + طہ) (دفعہ ۶۵ مثال ۲)

عف^{۲} ما = ر ر ئو^{الا} جب (ب لا + ج + طہ + طہ)

= ر^{۲} ئو^{الا} جب (ب لا + ج + ۲ طہ)

اس سے بآسانی معلوم ہوتا ہے یا استقراء حسابیہ سے یہ تحقیق کے ساتھ ثابت ہو سکتا ہے کہ

عف^{ن} ما = ر^{ن} ئو^{الا} جب (ب لا + ج + ن طہ)

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ عف^{ن} جب (ا لا + ب) = ا^{ن} جب (ا لا + ب + ن π/۲)

عف جب (ا لا + ب) = ا جم (ا لا + ب) = ا جب (ا لا + ب + $\frac{\pi}{۲}$) وغیرہ

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

عف^{ن} جم (ا لا + ب) = ا^{ن} جم (ا لا + ب + $\frac{ن\pi}{۲}$)

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ عف^{ن} لوک لا = (-۱)$^{ن-۱}$ $\frac{|ن-۱}{لا^{ن}}$

۶۸۔ **لیب نیز کا مسئلہ۔ مثالیں۔** عام طور پر اعلےٰ مشتقوں کے معلوم کرنے کا عمل طوالانی اور پریشان کن ہوتا ہے۔ بہت کم ایسے تفاعل ہیں جیسے لا^{ن} یا و^{لا} جن کے نؔ ویں مشتق بآسانی صریح طور پر بیان ہو سکتے ہیں۔ ذیل کے مسئلہ کی مدد سے کسی حاصل ضرب کا نؔ واں مشتق معلوم ہو سکتا ہے۔ اسے لیب نیز نے دریافت کیا اور یہ اُسی کے نام سے موسوم ہے۔

لیب نیز کا مسئلہ۔ اگر ما، لا کے دو تفاعلوں ع اور و کا حاصل ضرب ہو تو

عف^{ن} ما = و عف^{ن} ع + ج$^{ن}_{۱}$ عف و عف$^{ن-۱}$ ع + ج$^{ن}_{۲}$ عف^{۲} و عف$^{ن-۲}$ ع + ...

.... + ج$^{ن}_{۲}$ عف$^{ن-۲}$ و عف^{۲} ع + ج$^{ن}_{۱}$ عف$^{ن-۱}$ و عف ع + عف^{ن} و × ع ....(۱)

جہاں ج$^{ن}_{۱}$، ج$^{ن}_{۲}$، ...... مسئلہ ثنائی کے پھیلاؤ میں رقموں کے سر ہیں۔

اِس مسئلہ کا ثبوت دفعہ ۵۸ کے مسئلہ ۴ کو بار بار استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے، زبروں والی ترقیم کے موافق چونکہ ما = ع و

اس لئے

ما′ = و ع′ + و′ ع

ما″ = و ع″ + و′ ع′ + و′ ع′ + و″ ع = و ع″ + ۲ و′ ع′ + و″ ع

ما‴ = و ع‴ + و′ ع″ + ۲ و′ ع″ + ۲ و″ ع′ + و″ ع′ + و‴ ع

= و ع‴ + ۳ و′ ع″ + ۳ و″ ع′ + و‴ ع

ما″، ما‴ کے لئے یہ جملے صریحاً اس قانون کے موافق ہیں جو (۱) میں منضبط ہے۔ عام مسئلہ اب استقراء سے حاصل ہو سکتا ہے۔
(۱) میں رؔ ویں اور (ر+۱) ویں رقموں کا حاصل جمع ہے

ج^ن_{ر-۱} و^{(ر-۱)} ع^{(ن-ر+۱)} + ج^ن_ر و^{(ر)} ع^{(ن-ر)}

اور اگر (۱) کو تفرق کیا جائے تو اس طرح عف^{ن+۱} ما کے لئے جو جملہ حاصل ہوگا اس میں و^ر ع^{ن-ر+۱} کا سر یہ ہوگا

ج^ن_{ر-۱} + ج^ن_ر یعنی ج^{ن+۱}_ر

اسلئے عف^{ن+۱} ما = و ع^{(ن+۱)} + ج^{ن+۱}_۱ و′ ع^{(ن)} + ج^{ن+۱}_۲ و″ ع^{(ن-۱)} + ...

پس عف^{ن+۱} ما کے لئے جو جملہ حاصل ہوتا ہے وہ (۱) کے قانون کے موافق ہے، لیکن اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ مسئلہ صحیح ہے جبکہ ن = ۲ یا ۳، اس لئے یہ صحیح ہے خواہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

آگے چلکر یہ مسئلہ بہت مفید ثابت ہوگا جبکہ تفاعلوں کو سلسلوں میں پھیلانے کا مضمون بحث میں آئیگا [باب ہشدہم]

فی الحال مشقوں میں کئی ایسے سوالات ملینگے جن میں آ مسئلہ استعمال ہو سکتا ہے، اگلے باب میں اور بعد کے بابوں میں اعلےٰ مشتقوں کی ہندسی اور طبیعی تعبیریں دی جائینگی، تاہم فی الحال طالب علم دوسرے مشتق فً (لا) کا ہندسی مفہوم اس بنا پر معلوم کرنے کی کوشش کرے کہ یہ ڈھال فَ (لا) کے تغیر کی شرح کو ناپتا ہے، مثلاً یہ دیکھنا علم آموز ہوگا کہ اگر لا دائیں طرف حرکت کرے تو نقطہ ن (لا، ف (لا)) پر کا مماس اپنے نقطہ تماس کے گرد کس طرح حرکت کرتا ہے۔

اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم چند مثالیں حل کرینگے۔

مثال ۱۔ (عف ما)^{۲} کا مشتق معلوم کرو جہاں وجہ لا ہے۔ (عف ما)^{۲} سے مراد ہے ما کے مشتق کا مربع۔ عف^{۲} ما سے ما کا دوسرا مشتق مراد ہے، ما^{۲} کا مشتق اس طرح لکھا جائیگا عف (ما^{۲}) یا عف ما^{۲}۔ یہ تینوں شکلیں (عف ما)^{۲}، عف^{۲} ما، عف (ما^{۲}) مفہوم کے لحاظ سے بالکل ایکدوسرے سے مختلف ہیں، ان میں احتیاط سے تمیز کی جائے

$$(\text{عف ما})^{۲} \text{ سے مراد ہے } \left(\frac{\text{ق ما}}{\text{ق لا}}\right)^{۲}$$

$$\text{عف}^{۲}\text{ ما}\quad\text{〃 〃 〃}\quad \frac{\text{ق}^{۲}\text{ ما}}{\text{ق لا}^{۲}}$$

$$\text{عف(ما}^{۲}\text{) یا عف ما}^{۲}\quad\text{〃 〃 〃}\quad \frac{\text{ق(ما}^{۲}\text{)}}{\text{ق لا}} \text{ یا } \frac{\text{ق ما}^{۲}}{\text{ق لا}}$$

عف ما کی بجائے ع رکھنے سے

$$\text{عف (عف ما)}^{۲} = \text{عف}_{\text{لا}}(\text{ع}^{۲}) = \text{عف}_{\text{ع}}(\text{ع}^{۲})\,\text{عف}_{\text{لا}}\text{ع} = ۲\text{ع عف}_{\text{لا}}\text{ع}$$

$$\text{لیکن عف}_{\text{لا}}\text{ع} = \text{عف} \times \text{عف ما} = \text{عف}^{۲}\text{ ما، اس لئے}$$

$عف (عف\ ما)^۲ = ۲\ عف\ ما\ عف^۲\ ما$ ، یہ مساوات اِن شکلوں میں بھی لکھی جا سکتی ہے

$عف_{لا} (ماَ)^۲ = ۲\ ماَ\ ماً$ ، $\frac{فر}{فرلا}\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۲ = ۲\ \frac{فرما}{فرلا}\ \frac{فر^۲ما}{فرلا^۲}$ ، اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$عف_{لا} (ماَ)^۳ = ۳ (ماَ)^۲\ ماً$ ، $\frac{فر}{فرلا}\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^ن = ن \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^{ن-۱} \frac{فر^۲ما}{فرلا^۲}$

مثال ۲۔ اگر لا، ما متغیر ت کے تفاعل ہوں تو $عف^۲_{لا}\ ما$ کو لا، ما کے ت، مشتقوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

یہاں $عف_{لا}\ ما = \frac{عف_{ت}\ ما}{عف_{ت}\ لا} = \frac{ماَ}{لاَ}$ جہاں زبریں ت، مشتقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

$$عف^۲_{لا}\ ما = عف_{لا}\left(\frac{ماَ}{لاَ}\right) = عف_{ت}\left(\frac{ماَ}{لاَ}\right) / عف_{ت}\ لا$$

لیکن $عف_{ت}\left(\frac{ماَ}{لاَ}\right) = \frac{لاَ\ عف_{ت}\ ماَ - ماَ\ عف_{ت}\ لاَ}{(لاَ)^۲} = \frac{لاَ\ ماً - ماَ\ لاً}{لاَ^۲}$

اسلئے $عف^۲_{لا}\ ما = \frac{لاَ\ ماً - لاً\ ماَ}{لاَ^۳}$ جہاں $لاَ^۳$ سے مراد $(لاَ)^۳$ ہے۔

مثال ۳۔ اگر $ما = ا لا^۲ + \frac{ب}{لا}$ تو ثابت کرو کہ $لا^۲\ ماً = ۲\ ما$

چونکہ $ما = ا لا^۲ + \frac{ب}{لا}$ اسلئے $ماَ = ۲ ا لا - \frac{ب}{لا^۲}$ ، $ماً = ۲ا + \frac{۲ب}{لا^۳}$

ا، ب کو اِن تین مساواتوں سے ساقط کرو، اِس صورت میں دوسری مساوات کی دراصل ضرورت نہیں، کیونکہ تیسری مساوات کو $لا^۲$ کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا^۲\ ماً = ۲ ا لا^۲ + \frac{۲ب}{لا} = ۲\ ما$$

عام طور پر ا، ب کو ساقط کرنے کے لئے تینوں مساواتوں کی ضرورت ہوگی، لا² ماً = ۲ ما کو تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

مثال ۴۔ اگر ما = لا² ع جہاں ع، لا کا تفاعل ہے تو عفⁿ ما معلوم کرو، لیب نیز کے مسئلہ کی رو سے

عفⁿ ما = لا² عفⁿ ع + ن (۲ لا) عفⁿ⁻¹ ع + (ن(ن-۱))/(۱ × ۲) (۲) عفⁿ⁻² ع

اس کے بعد لا² کے سب اعلیٰ مشتق صفر ہیں۔ پس

عفⁿ ما = لا² عفⁿ ع + ۲ن لا عفⁿ⁻¹ ع + ن (ن - ۱) عفⁿ⁻² ع

مشق ۱۴

۱۔ اگر ما = ۷ لا⁴ - ۲ لا³ + ۴ تو ماً، ماً، ما⁽⁴⁾ معلوم کرو۔

۲۔ اگر ما = √(لا² + ۱) تو ماً معلوم کرو۔

۳۔ اگر ما = لا² (ا - لا)² تو ماً، ماً معلوم کرو۔

۴۔ اگر ما = (لا² + ۴ لا + ۱)/(لا³ + ۲ لا² - لا - ۲) تو ثابت کرو کہ

ما = ۱/(لا - ۱) + ۱/(لا + ۱) - ۱/(لا + ۲)، اس سے پھر ماً، ماً، ما⁽ⁿ⁾ معلوم کرو۔

۵۔ اگر ما = جب² لا تو ماً اور ما⁽ⁿ⁾ معلوم کرو

[جب² لا = ۱/۲ - ۱/۲ جم ۲ لا]

۶۔ اگر ما = لا² جم لا تو ماً اور ما⁽ⁿ⁾ معلوم کرو۔

۷۔ اگر ما = جب لا جم³ لا تو ماً اور ما⁽ⁿ⁾ معلوم کرو۔

۸- اگر ما = لا لوک لا تو مَا اور ما^(ن) معلوم کرو۔

۹- اگر ما = لا قو^لا تو ما^(ن) دریافت کرو۔

۱۰- اگر ما = لا^۲ قو^لا تو ما^(ن) دریافت کرو۔

۱۱- اگر ما، لا کا منطق صحیح ن ویں درجہ کا تفاعل ہو مثلاً

ما = ا لا^ن + ب لا^(ن-۱) + ... + ک لا + ل

تو ثابت کرو کہ ما^(ن) = لن ا، ما^(ن+۱) = ۰، ما^(ن+۲) = ۰ ....

۱۲- امثلہ ۱ اور ۲ میں تفاعلوں کے موڑ کی قیمتیں معلوم کرو اور تفاعلوں کو مرتسم کرو۔

۱۳- اگر ما = ۱ / (۱ + لا^۲) تو ترسیم کے موڑ کے نقطے دریافت کرو۔ نیز معلوم کرو کہ مَا کہاں صفر ہوتا ہے، اور دکھاؤ کہ ایسے نقطوں پر مماس اپنے گھماؤ کی سمت بدلتا ہے۔

۱۴- اگر ما = ا لا^(ن+۱) + ب لا^(-ن) تو ثابت کرو کہ لا^۲ مَا = ن (ن+۱) ما

۱۵- اگر ما = ا قو^(ن لا) + ب قو^(-ن لا) تو ثابت کرو کہ مَا - ن^۲ ما = ۰

۱۶- اگر ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا تو ثابت کرو کہ مَا + ن^۲ ما = ۰

۱۷- اگر ما = قو^(-۱/۲ ک لا) (ا جم ن لا + ب جب ن لا) تو ثابت کرو کہ

مَا + ک مَا + (ن^۲ + ۱/۴ ک^۲) ما = ۰

۱۸- اگر ف (لا) = (لا - ا)^۲ فہ (لا) جہاں فہ (لا) ایک منطق صحیح تفاعل ہے جو لا = ا کے لئے صفر نہیں ہوتا تو ثابت کرو کہ ف (ا) = ۰، فَ (ا) = ۰، فً (ا) = ۲ فہ (ا)

۱۹- اگر ف (لا) = (لا - ا)^ل فہ (لا) جہاں ل مثبت صحیح عدد ہے اور فہ (لا) مثال ۱۸ کا تفاعل ہے تو ثابت کرو کہ

ف (ا) = ۰، فَ (ا) ... ف^(ل-۱) (ا) = ۰، ف^ل (ا) = ل! فہ (ا)

۲۰- اگر لا مثبت ہو تو دکھاؤ کہ لا - ½ لا^۲ < لوک (۱ + لا) < لا

رکھو ف (لا) = لا - ½ لا^۲ - لوک (۱ + لا)، فہ (لا) = لا - لوک (۱+لا)

پھر دیکھو مشق ۱۱ سوال ۳۳-

۲۱- اگر لا مثبت ہو اور ایک سے کم ہو تو ثابت کرو کہ

- لوک (۱ - لا) > لا

۲۲- اگر جـن = ۱ + ½ + ⅓ + ... + ۱/ن تو ثابت کرو کہ

ن ← ∞ کے لئے جـن - لوک ن کی انتہا ایک محدود مقدار ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے

[اسکو یولر کا مستقل کہتے ہیں]

سوالات ۲۰ اور ۲۱ کی لا تساویوں کی رو سے

- لوک (۱ - ۱/ن) > ۱/ن > لوک (۱ + ۱/ن)

یا لوک ن/(ن-۱) > ۱/ن > لوک (ن+۱)/ن

اسلئے لوک ن/(ن-۱) > ۱/(ن-۱) > لوک (ن-۱)/(ن-۲)

. . . .

لوک {۲/۱} > ½ > لوک (۳/۲)

لوک $\frac{۲}{۱}$ > ۱ = ۱

جمع کرنے سے ۱+ لوک ن > ج$_{ن}$ > لوک (ن+۱)

اس لئے ۱ > ج$_{ن}$ - لوک ن > لوک $(۱+\frac{۱}{ن})$

جس سے نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ مستقل کی قیمت ہے ۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹۰ء

۲۳۔ اگر لا = ات^۲، ما = ۲ ات تو عف$^۲_{لا}$ ما کو ت کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۴۔ اگر لا = اجم ت، ما = ب جب ت تو عف$^۲_{لا}$ ما کو ت کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۵۔ اگر و^۲ = لا^۲ + ما^۲ تو دکھاؤ کہ دفعہ ۶۲ کی ترقیم کے موافق و$_{ء}$ = لا$_{ء}$ جم فہ + ما$_{ء}$ جب فہ

۲۶۔ اگر ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\text{عف}^۲ \text{ ما} = (\text{ھ}^۲ - \text{اب}) / (\text{ھ لا} + \text{ب ما})^۳$$

۲۷۔ اگر ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ تو ثابت کرو کہ

$$\text{عف}^۲ \text{ ما} = \frac{\text{اب ج} + ۲ \text{ ف گ ھ} - \text{اف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ھ}^۲}{(\text{ھ لا} + \text{ب ما} + \text{ف})^۳}$$

۲۸۔ اگر لا^۳ + ما^۳ - ۳ ا لا ما = ۰ تو ثابت کرو کہ

$$\text{عف}^۲ \text{ ما} = \frac{۲ \text{ ا}^۲ \text{ لا ما}}{(\text{ا لا} - \text{ما}^۲)^۳}$$

۲۹۔ اگر ع، لا کا تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{عف}^{ن}(و^{لا}\,ع) = و^{لا}\left(ا^{ن}ع + ج^{ن}_{۱}\,ا^{ن-۱}\,\text{عف}\,ع + ج^{ن}_{۲}\,ا^{ن-۲}\,\text{عف}^{۲}ع + \ldots\ldots + \text{عف}^{ن}ع\right)$$

۳۰۔ اگر $ما = \text{مس}^{-۱}\,لا$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{عف}\,ما = \text{جم}^{۲}\,ما$ (۲) $\text{عف}^{۲}\,ما = \text{جم}\left(۲ما + \frac{\pi}{۲}\right)\text{جم}^{۲}\,ما$

(۳) $\text{عف}^{۳}\,ما = ۲\,\text{جم}\left(۳ما + ۲\,\frac{\pi}{۲}\right)\text{جم}^{۳}\,ما$

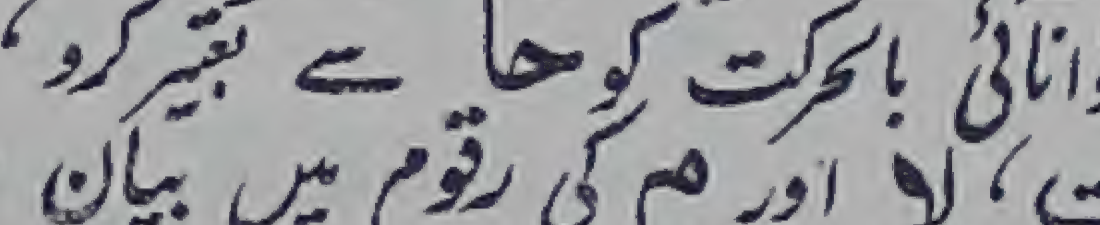
(۴) $\text{عف}^{ن}\,ما = \underline{|ن-۱}\;\text{جم}\left(ن\,ما + \frac{\pi(ن-۱)}{۲}\right)\text{جم}^{ن}\,ما$

باب ہشتم

طبیعیات میں استعمال

۶۹- علم حرکت میں مشتقات کا استعمال - طبیعی مسائل میں مشتقات کے استعمال کی چند مثالیں ہم باب ہذا میں درج کرتے ہیں۔

پہلے ایک ذرہ کے خطِ مستقیم پر حرکت کرنے کی مثال پر غور کرو اور فرض کرو کہ وقت، طول اور سکنڈ کی اکائیاں بالترتیب سکنڈ، فٹ اور پونڈ ہیں، نیز قوت اور کام کی اکائیاں بالترتیب پونڈل اور فٹ پونڈل ہیں۔ فرض کرو کہ وقت ت پر، یعنی کسی مقررہ آن سے ت سکنڈ کے بعد ذرہ نقطہ ن پر ہے جو خط حرکت پر کے کسی ثابت نقطہ و سے لا فٹ کے فاصلہ پر ہے، نیز فرض کرو کہ ذرہ کی کمیت م پونڈ ہے۔ وقت ت پر جو رفتار ہے اسکو ع سے، اسراع کو عہ سے، معیار حرکت کو ھ سے، قوت کو ق سے اور توانائی بالحرکت کو حا سے تعبیر کرو، یہ سب مقداریں ت، لا اور م کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں۔



شکل ۳۱

جب، ت میں مف ت کا اضافہ ہوتا ہے تو فرض کرو کہ لا میں مف لا = ن نَ کا اضافہ ہوتا ہے، تب ولا کی سمت میں یعنی جس سمت میں لا بڑھتا ہے وقفہ مف ت کے اندر اوسط رفتار مف لا / مف ت ہے اور وقت ت پر جو رفتار ہے وہ اس مقدار کی انتہا ہے جبکہ مف لا ← ۰، اسلئے

لاَ = ف لا / ف ت = نہا (مف ت ← ۰) مف لا / مف ت = ع

ع بالعموم ت کا تفاعل ہوتا ہے، وقفہ مف ت میں اوسط اسراع اس سمت میں جس میں کہ لا بڑھتا ہے مف ع / مف ت ہے جہاں مف ع، ع کا اضافہ ہے وقت مف ت میں، نیز وقت ت پر کا اسراع اس حاصل قسمت کی انتہا ہے جبکہ مف ت ← ۰، لہذا

لاً = ف² لا / ف ت² = ف / ف ت (ف لا / ف ت) = ف ع / ف ت = نہا (مف ت ← ۰) مف ع / مف ت = عَ

معیار حرکت لا کے بڑھنے کی سمت میں

مر = م عَ = م لاَ

نیوٹن کے دوسرے کلیہ کی رو سے قوت ق اس سمت میں جس میں کہ لا بڑھتا ہے وقت کے لحاظ سے معیار حرکت کی تبدیلی (اسی سمت میں) کی شرح ہے، اس لئے

ق = ف مر / ف ت = م عَ = م لاً

ہم ق کو ایک اور شکل میں بھی بیان کر سکتے ہیں، ع کو لا کا اور لا کو ت کا تفاعل تصور کرو (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۹ مشق ۹)

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \text{ع} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{1}{2}\text{ع}^2\right)$$

اب $\text{حا} = \frac{1}{2}\,\text{م ع}^2$ اور اس لئے

$$\text{ق} = \text{م}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{1}{2}\text{م ع}^2\right) = \frac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}}$$

پس ہم قوت کو معیار حرکت کی تبدیلی کی زمانی شرح یعنی $\frac{\text{فرم}}{\text{فرت}}$ خیال کر سکتے ہیں یا توانائی بالحرکت کی تبدیلی کی مکانی شرح $\frac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}}$ تصور کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک قوت ق ایک ذرہ کو معیاری محل (جس پر فرض کرو کہ لا = ر) سے مقام ن تک حرکت دینے میں ل کام کرتی ہے اور ن سے نَ تک حرکت دینے میں مف ل کام کرتی ہے، نقطہ نَ پر قوت ق + مف ق ہے، اس لئے جب مف لا چھوٹا ہو، تو جو کام ہوتا ہے وہ ق مف لا اور (ق + مف ق) مف لا کے درمیان ہے کیونکہ ق × مف لا وہ کام ہے جو اس مفروضہ کی بنا پر حاصل ہوتا ہے کہ قوت وقفہ ن نَ میں مستقل رہتی ہے اور اس کی قیمت ن پر کی قیمت کے مساوی ہے اور (ق + مف ق) × مف لا وہ کام ہے جو اس مفروضہ کی بنا پر حاصل ہوتا ہے کہ قوت وقفہ ن نَ میں مستقل رہتی ہے اور اس کی قیمت نَ پر کی قیمت کے مساوی ہے صریحاً قوت کا کام ان دونوں قیمتوں کے درمیان ہے،

یعنی مف ل۲ / مف لا کی قیمت ق اور ق + مف ق کے درمیان واقع ہے، لہذا

فر ل۲ / فر لا = ق

چونکہ فر حا / فر لا بھی ق کے مساوی ہے، اس لئے حا اور ل۲ میں صرف کسی مستقل کا فرق ہو سکتا ہے۔

نیز قوت کے کام کرنے کی زمانی شرح فر ل۲ / فر ت ہے، اور چونکہ ل۲ کو لا کا تفاعل اور لا کو ت کا تفاعل تصور کیا جا سکتا ہے، اس لئے

فر ل۲ / فر ت = فر ل۲ / فر لا × فر لا / فر ت = ق ع

طالب علم کو چاہئے کہ ان مقداروں کے بعدی ضابطوں پر بھی توجہ کرے (دفعہ ۲۴۳)، اگر لا طول کا ناپ ہو تو فر لا بھی طول کا ناپ ہے اور رفتار ع یعنی فر لا / فر ت کے لئے بعدی ضابطہ ل ت$^{-1}$ ہے۔ دیگر مقادیر کے بعدی ضابطے بھی اسی طرح معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ قوت ق مستقل ہے، اس صورت میں اسراع مستقل ہو گا جو فرض کرو کہ ع کے مساوی ہے، اسلئے اگر رفتار ع ہو تو عَ = ع

لہذا عَ = ع ت + مستقل

فرض کرو کہ حرکت ایسی ہے کہ جب، ت = ۰ تو ع = ع۰

اور لا۰ = ا، اِن کو ابتدائی شرائط کہتے ہیں۔ پس ع۰ کی مندرجہ بالا قیمت میں مستقل مذکور ع۰ کے مساوی ہے، اب ہم لا معلوم کر سکتے ہیں، کیونکہ

لاَ = عَ = ع ت + ع۰، لا = ½ ع ت² + ع۰ ت + مستقل

جس کی تصدیق تفرق کرنے سے ہو سکتی ہے، موخرالذکر مساوات میں مستقل ا ہے کیونکہ جب، ت = ۰ تو لا = ا، لہذا

لا = ½ ع ت² + ع۰ ت + ا

اب حا کی قیمت بھی ت کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہے،

حا = ½ م عَ² = ½ م (ع ت + ع۰)²

لا کے لئے جو قیمت اوپر معلوم کی گئی ہے اُسے استعمال کرنے اور ½ م ع۰² کی بجائے حا۰ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

حا − حا۰ = م ع (لا − ا) = ق (لا − ا)

یہ شکل سیدھی توانائی کی مساوات فرحا/فرلا = ق سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

بالآخر چونکہ فرک/فرلا = ق اس لئے ک = ق (لا − ا) کیونکہ جب، لا = ا تو کام صفر ہوتا ہے، لہذا حا − حا۰ = ک، یعنی توانائی بالحرکت کا اضافہ اُس کام کے مساوی ہے جو قوت نے کیا۔

مشق ۲۔ فرض کرو کہ قوت ق کشش کی قوت ہے جو و سے

ذرہ کے فاصلہ کے متناسب ہے۔ فرض کرو کہ کشش کا اشتداد یعنی وہ قوت جو اکائی کمیت پر ف سے اکائی فاصلہ پر عمل کرتی ہے مہ ہے، اگر لا مثبت ہو یعنی اگر ذرہ و کے دائیں جانب واقع ہو تو اس پر ف کی طرف عمل کرنے والی قوت مہ م لا ہے، اگر لا منفی ہو یعنی اگر ذرہ و کے بائیں جانب ہو تو و کی طرف عمل کرنے والی قوت اس پر م مہ (-لا) ہے لیکن دونوں صورتوں میں یہ قوت اس سمت میں جس میں کہ لا بڑھتا ہے۔ -مہ م لا ہے، اس لئے

م لاً = - مہ م لا یا لاً + مہ لا = ۰

اس مساوات کو ذرہ کی حرکت کی تفرقی مساوات کہتے ہیں، اسے تفرقی اس لئے کہتے ہیں کیونکہ اس میں تفرقی سر لاً شامل ہے۔

طالب علم آسانی سے اس کی تصدیق کرسکتا ہے (مشق ۱۴، سوال ۱۶) کہ مساواتِ بالا پوری ہوتی ہے جبکہ

لا = ا جم √مہ ت + ب جب √مہ ت

جہاں ا اور ب کوئی اختیاری مستقل ہیں۔

حرکت متعین ہو جاتی ہے اگر قوت کے قانون کے علاوہ ہمیں کسی آن میں ذرہ کی رفتار اور محل بھی معلوم ہوں۔ مثلاً فرض کرو کہ جب ت = ۰، لا = ا اور ع = ۰، مساوات بالا میں ت = ۰ اور لا = ا رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا = ا، ع معلوم کرنے کے لئے لا کو بلحاظ ت کے تفرق کرو، اس لئے

ع = د لا / د ت = -√مہ ا جب √مہ ت + √مہ ب جم √مہ ت

لیکن جب، ت = ۰ تو ع = ۰، اس لئے ب۱ = ۰ لہذا

لا = ا جم √مہ ت

سادہ موسیقی حرکت۔ جب قوت کا قانون وہ ہو جو مثال ہذا میں بیان کیا گیا ہے تو حرکت کو سادہ موسیقی حرکت کہتے ہیں اور ایسی صورت میں لا اور ت کا ربط ظاہر کرنے کی سادہ ترین شکل لا = ا جم √مہ ت ہے، ظاہر ہے کہ حرکت دوری ہے اور دور ۲π/√مہ ہے، کیونکہ جب، ت، ت۱ سے بڑھکر ت۱ + ۲π/√مہ ہو جاتا ہے تو لا اور لاَ دونوں اپنی تمام قیمتوں کے دور کو ایک دفعہ پورا کر لیتے ہیں۔ ہم ا کو حرکت کی سعت یا حیطہ کہینگے۔

طالب علم ثابت کرے کہ اگر لا = ج، ع = عؔ، جبکہ ت = ۰، تو

لا = ج جم √مہ ت + (عؔ/√مہ) جب √مہ ت = ا جم (√مہ ت - طہ)

جہاں ا = √(ج² + عؔ²/مہ)، ا جم طہ = ج، ا جب طہ = عؔ/√مہ

اس صورت میں بھی ا حیطۂ اہتزاز ہے اور ۲π/√مہ دور ہے۔

مشق ۳۔ ایک سلاخ کا قدرتی طول ا ہے اور کھینچکر اس کا طول ا + لا کر دیا جاتا ہے، اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ ھک کا کلیہ اثنائے تغیر میں برقرار رہتا ہے تو بتاؤ کہ طول کے بڑھانے میں کل کتنا کام کرنا پڑتا ہے؟ نسبت لا/ا کو ہم توسیع کہینگے، اب ھک کا کلیہ یہ ہے کہ

توسیع پیدا کرنے کے لئے جو قوت درکار ہوگی وہ اسی توسیع سے متناسب ہوگی۔ پس اگر قوت ق ہو تو $\text{ق} = \frac{\text{س لا}}{\text{ا}}$ جہاں س مستقل ہے، جب توسیع $\frac{\text{لا} + \text{مف لا}}{\text{ا}}$ ہوگی، تو قوت $\text{ق} + \text{مف ق} = \text{س} \times \frac{(\text{لا} + \text{مف لا})}{\text{ا}}$ ہوگی۔

اگر توسیع $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ پیدا کرنے کے لئے ک کام کرنا پڑے اور اگر مزید توسیع $\frac{\text{مف لا}}{\text{ا}}$ پیدا کرنے کے لئے مف ک کام کرنا پڑے تو مف ک، ق مف لا اور (ق + مف ق) مف لا کے درمیان واقع ہوگا یعنی $\frac{\text{مف ک}}{\text{مف لا}}$، ق اور ق + مف ق کے درمیان واقع ہوگا، جب مف لا انتہا میں صفر ہو جائے تو

$$\frac{\text{فر ک}}{\text{فر لا}} = \text{ق} = \text{س} \times \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{اس لئے}\quad \text{ک} = \frac{1}{2}\,\text{س}\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} + \text{مستقل}$$

چونکہ ک = ۰ جبکہ لا = ۰ تو مستقل صفر ہوتا ہے، اسلئے

$$\text{ک} = \frac{1}{2}\,\text{س}\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} = \frac{1}{2}\,\text{س}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \times \text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{ق لا}$$

مشق ۴۔ ایک سیال ایک اسطوانہ کے ساتھ جس کے اندر ایک فشارہ آزادانہ پھرتا ہے ملحق ہے، اسطوانہ کی چلیپی تراش مستقل ہے اور س کے مساوی ہے، فرض کرو کہ سیال فشارہ کو فاصلہ لا میں سے باہر دھکیلنے میں

ک کام کرتا ہے، نیز فرض کرو کہ فشارہ پر دباؤ کا اشتداد د
ہے، ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرک}}{\text{فرلا}} = \text{د} \times \text{س}$

فشارہ پر سیال کے دباؤ کی وجہ سے جو قوت عمل کرتی ہے وہ د س ہے
جب فشارہ کو مزید فاصلہ مف لا میں سے باہر دھکیلا جائے
تو فرض کرو کہ دباؤ کا اشتداد د + مف د ہو جاتا ہے یعنی
فشارہ پر قوت اب (د + مف د) س ہے، تب فشارہ کو فاصلہ
مف لا میں سے باہر دھکیلنے میں جو کام مف ک ہوتا ہے وہ
د س مف لا اور (د + مف د) س مف لا کے درمیان ہے
یعنی $\frac{\text{مف ک}}{\text{مف لا}}$ ، د س اور د س + مف د س کے درمیان واقع ہے۔

$$\text{لہذا} \quad \frac{\text{فرک}}{\text{فرلا}} = \text{د س}$$

اس نتیجہ کو ایک اور شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے، اگر
سیال کا حجم ح ہو تو س مف لا حجم کا اضافہ ہے جسکو
مف ح کہہ سکتے ہیں۔

اس لئے $\frac{\text{مف ک}}{\text{مف ح}}$ ، د اور د + مف د کے درمیان
واقع ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرح}} = \text{د}$$

مشق ۵ - ایک جسم ایک محور کے گرد حرکت کر رہا ہے۔
ایک خط جو جسم کے اندر ثابت ہے اور محور پر عمود
وار ہے ایک اور خط کے ساتھ جو فضا میں ثابت ہے
اور محور پر عمود وار ہے وقت ت پر زاویہ طہ بناتا ہے

معلوم کرو کہ $\dot{\text{طہ}}$ اور $\ddot{\text{طہ}}$ سے کیا تعبیر ہوتا ہے۔

$\dot{\text{طہ}}$ وقت کے لحاظ سے طہ کے اضافہ کی شرح ہے، یعنی $\dot{\text{طہ}}$ محور کے گرد جسم کی زاوی رفتار ہے۔ اسی طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\ddot{\text{طہ}}$ زاوی اسراع ہے۔

اگر ایک نقطہ ن ایک سطح مستوی میں حرکت کر رہا ہو اور نقطہ ن کو سطح مستوی کے ایک ثابت نقطہ و سے ملانے والا خط ایک اور ثابت خطِ مستقیم کے ساتھ جو و میں سے گزرتا ہو زاویہ طہ بنائے تو بعض اوقات $\dot{\text{طہ}}$ کو و کے گرد نقطہ ن کی زاوی رفتار اور $\ddot{\text{طہ}}$ کو و کے گرد نقطہ ن کا زاوی اسراع کہتے ہیں۔

مشق ۶ ۔ برق کا مثبت بار م ایک نقطہ و پر مجتمع ہے اور نقطہ ن (شکل ۳۱) پر کے اکائی بار پر م کی قوت دفع $\frac{\text{م}}{\text{لا}^2}$ ہے جہاں لا = و ن، جب یہ اکائی بار ا سے ب تک حرکت کرے تو بتاؤ کہ کتنا کام کیا گیا جہاں و ا = ا_1 اور و ب = ب_1

فرض کرو کہ ا سے ن تک جانے میں کام ک ہوتا ہے،

تب $\frac{\text{دک}}{\text{دلا}} = \frac{\text{م}}{\text{لا}^2}$ اور $\text{ک} = -\frac{\text{م}}{\text{لا}} +$ مستقل

جب، لا = ا_1 تو ک = ۰، اس لئے مستقل مذکور $\frac{\text{م}}{\text{ا}_1}$ ہے

لہٰذا ن پر کا کام ہے

$$\text{ک} = \frac{\text{م}}{\text{ا}_1} - \frac{\text{م}}{\text{لا}}$$

اِس لئے ا سے ب تک جانے میں جو کام $ک_{ا}$ ہوتا ہے وہ یہ ہے

$$ک_{ا} = \frac{م}{ر_{ا}} - \frac{م}{ب}$$

قوہ — جب ب اتنی دُور ہو کہ $\frac{م}{ر_{ا}}$ کے مقابلہ میں $\frac{م}{ب}$ نظر انداز ہو سکے تو $ک_{ا} = \frac{م}{ر_{ا}}$، اس لئے اِس صورت میں اکائی بار کے مقام ا سے میدان کے باہر چلے جانے میں جو کام ہوتا ہے وہ $\frac{م}{و ا}$ ہے، اِس تفاعل $\frac{م}{و ا}$ کو ا پر نقطہ و پر کے برقی بار م کا قوہ کہتے ہیں۔

ن پر قوہ $\frac{م}{و ن}$ ہے، اگر اِس کو و سے تعبیر کیا جائے تو

$$و = \frac{م}{لا}، \quad - \frac{ق و}{ق لا} = \frac{م}{لا^{۲}}$$

اِس لئے ن پر کی قوت، ن پر کے قوہ کی کمی کی مکانی شرح ہے، اور اِس قوت کی سمت بلند قوہ سے پست قوہ کی جانب ہے۔

دو ذرات م اور مَ (گرام) کے درمیان فاصلہ لا سنتی میٹر ہے، تجاذبی قوتوں کی صورت میں ان ذرات کے درمیان کشش $\frac{س م مَ}{لا^{۲}}$ ڈائن ہوگی جہاں س تجاذب کا مستقل ہے (جو $۶٫۶۶ \times ۱۰^{-۸}$ کے مساوی ہے)، ملاحظہ ہو گریمے کا رسالۂ طبیعیات۔ [لنڈن، جے اینڈ اے چرچل ۱۹۵]

نقطہ لا پر م کا قوہ و، $\frac{\text{س م}}{\text{لا}}$ ہے اور م کی سمت میں کشش۔ عف$_{\text{لا}}$ و ہے، م سے باہر کی طرف قوت = عف$_{\text{لا}}$ و ہے۔

علم حرکت کے رسالوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے (مثلاً گرے، دفعہ ۴۸۴، نیز ملاحظہ ہوں مشق ۳۰، سوال ۲۴) کہ نصف قطر ا اور یکساں کثافت ک والے ایک کرہ کا قوہ نقطہ لا پر

$$\text{و} = 2\pi\,\text{س ک}\left(\text{ا}^2 - \frac{1}{3}\text{لا}^2\right)$$

اندرونی نقطہ کے لئے (لا ≤ ا) .... (۱)

اور

$$\text{و} = \frac{4\pi\,\text{س ک}}{3} \times \frac{\text{ا}^3}{\text{لا}}$$

بیرونی نقطہ کے لئے (لا > ا) .... (۲)

چونکہ میدان تشاکلی ہے، اس لئے ہر نقطہ پر جو قوت ہے وہ نصف قطر کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اسلئے نقطہ لا پر کی کشش

$$-\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} = \frac{4\pi\,\text{س ک}}{3}\,\text{لا} \quad (\text{لا} < \text{ا})$$

$$-\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} = \frac{4\pi\,\text{س ک}}{3} \times \frac{\text{ا}^3}{\text{لا}^2} \quad (\text{لا} > \text{ا})$$

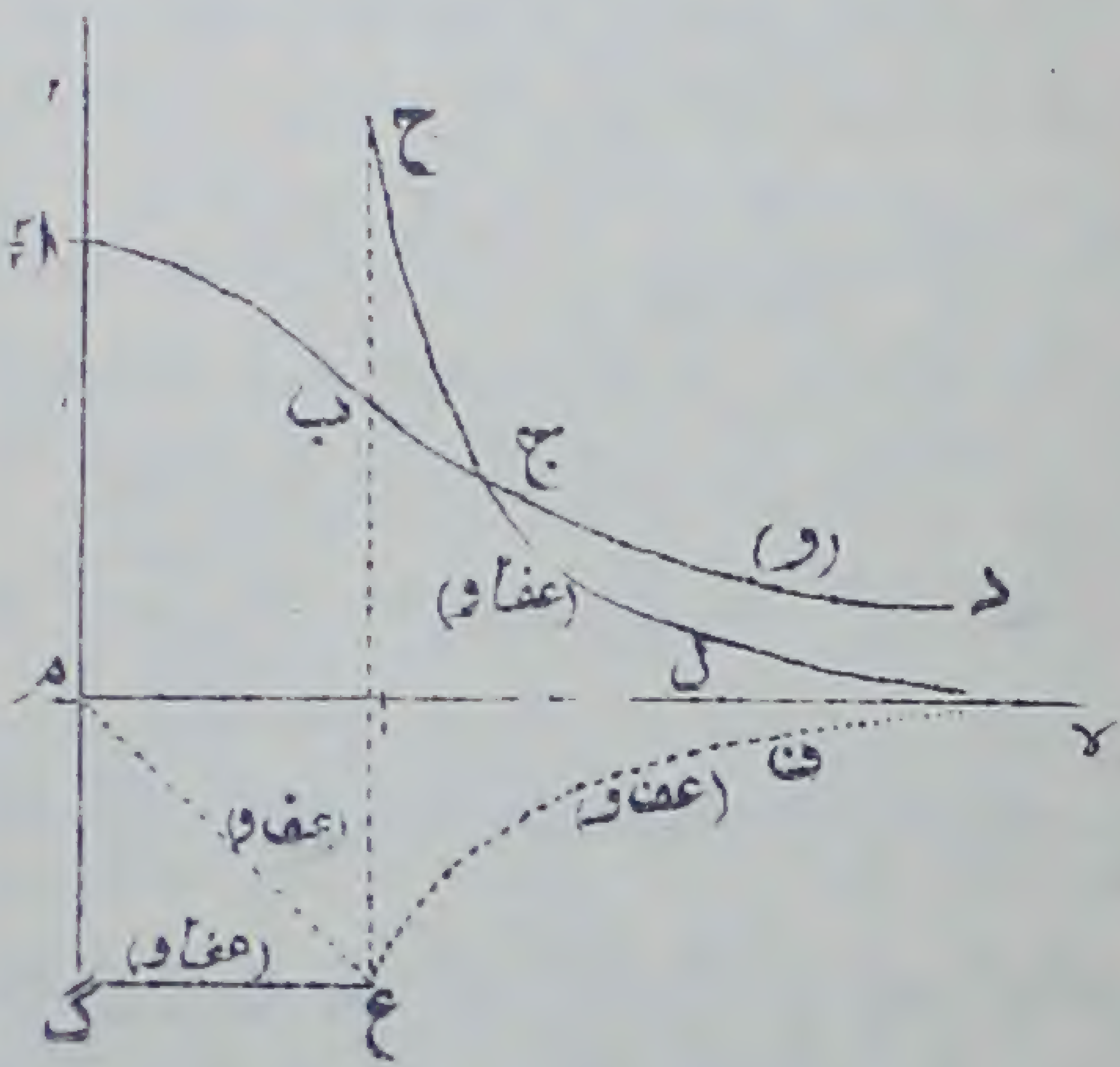
تفاعل و اور $\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$ کے لئے تحلیلی جملے لا کے ا سے کم ہونے کی صورت میں اور ا سے زیادہ ہونے کی صورت میں مختلف ہیں، لیکن ان میں سے ہر ایک لا = ا کے لئے مسلسل تفاعل ہے، کیونکہ ہم (۱) اور (۲) سے دیکھتے ہیں کہ لا خواہ ا سے بڑی قیمتوں کی طرف سے یا ا سے کم قیمتوں

کی طرف سے ا کی طرف مائل ہو دونوں صورتوں میں و
مائل بہ $\frac{۴\pi س ک ا^۲}{۳}$ ہوتا ہے اور $\frac{ف و}{ف لا}$ مائل بہ
$-\frac{۴\pi س ک ا}{۳}$ ہوتا ہے اور یہ بالترتیب و اور $\frac{ف و}{ف لا}$ کی
قیمتیں ہیں جبکہ لا = ا

برعکس اس کے تفاعل $\frac{ف^۲ و}{ف لا^۲}$، ا پر غیر مسلسل ہے
کیونکہ جب، لا ایسی قیمتوں میں سے بڑھتے بڑھتے مائل بہ ا
ہوتا ہے جو ا سے کم ہوں تو (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ
$\frac{ف^۲ و}{ف لا^۲}$ مائل بہ $-\frac{۴\pi س ک}{۳}$ ہوتا ہے اور جب، لا
ایسی قیمتوں میں سے جو ا سے بڑی ہوں کم ہوتے ہوتے
مائل بہ ا ہوتا ہے تو (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ
$\frac{ف^۲ و}{ف لا^۲}$ مائل بہ $+\frac{۸\pi س ک}{۳}$ ہوتا ہے۔ پس
تفاعل $\frac{ف^۲ و}{ف لا^۲}$ کی کوئی قیمت نہیں ہے جبکہ لا = ا،
لیکن ایک طرف سے لا کے ا کے قریب آنے سے اس کی
ایک محدود انتہا ہوتی ہے اور دوسری طرف سے لا کے
ا کے قریب آنے سے اس کی ایک اور محدود انتہا ہوتی
ہے (دیکھو دفعہ ۴۴)

تفاعیل و، $\frac{ف و}{ف لا}$، $\frac{ف^۲ و}{ف لا^۲}$ کی ترسیمیں بنانے کے لئے
فرض کرو (بغرض سہولت) کہ ا = ۱ اور $\frac{۴\pi س ک}{۳} = ۱$،

مستقلات کی اور قیمتوں کے لیے بھی ترسیمیں حسب معمول طریقوں سے بآسانی کھینچ سکتی ہیں۔ (ملاحظہ ہو شکل ۳۲)



شکل ۳۲

ا ب ج د قوہ و کی ترسیم ہے، اس کا حصہ ا ب مکافی ہے اور حصہ ب ج د قائم قطع زائد ہے۔

مبدأ م ہے اور نقطوں والا منحنی م ع ف، ف و / ف را کی ترسیم ہے جس کا حصہ م ع خط مستقیم ہے۔

ف² و / ف را² کی ترسیم و لا کے متوازی خط مستقیم گ ع ہے اور منحنی ح ج ل انتصابی نقطہ دار خط کے بائیں طرف کے حصے تفاعلوں کو

تعبیر کرتے ہیں جبکہ ﻻ > ا اور دائیں طرف کے حصے تفاعلوں کو تعبیر کرتے ہیں جبکہ ﻻ < ا ۔

۷۰ ۔ **لچک اور پھیلاؤ کی قدریں**۔ فرض کرو کہ دباؤ کا اشتداد د ہے اور سیال کی اکائی کمیت کا حجم ح ہے گویا د، ح کا ایک مخصوص تفاعل ہے۔ جب د میں مف د کا اضافہ ہو تو فرض کرو کہ ح میں مف ح کا اضافہ ہوتا ہے اگر ہم مف د کو مثبت فرض کریں تو مف ح منفی ہوگا۔ دباؤ د پر جو حجم ہے اسکی کمی کو حجم کے ساتھ جو نسبت ہے

وہ $-\frac{\text{مف ح}}{\text{ح}}$ سے تعبیر ہوتی ہے، اس نسبت کو اوسط پچکاؤ

یا صرف پچکاؤ کہتے ہیں۔ اور دباؤ کے اضافہ مف د کو تناظری پچکاؤ $-\frac{\text{مف ح}}{\text{ح}}$ کے

ساتھ جو نسبت ہو اسکی انتہا کو حجم کی لچک کی قدر (یا سر) یا محض حجم کی لچک کہتے ہیں۔ یعنی

$$\text{حجم کی لچک} = \text{نہا}_{\text{مف ح} \to} \frac{\text{مف د}}{-\frac{\text{مف ح}}{\text{ح}}} = -\text{ح}\frac{\text{مف د}}{\text{مف ح}}$$

جب کوئی گیس مستقل تپش پر پھیلے تو د ح = س (مستقل)

$$\text{پس حجم کی لچک} = -\text{ح}\frac{\text{فر}\left(\frac{\text{س}}{\text{ح}}\right)}{\text{و ح}} = -\text{ح}\,\frac{-\text{س}}{\text{ح}^2} = \text{د}$$

حرناگذار طرح سے پھیلنے والی گیس کے لئے $\text{د ح}^{\text{جـ}} = \text{س}$ (مستقل) اور اس صورت میں لچک = جـ د

ایک سلاخ کو جس کا طول معیاری تپش مثلاً ۰° سنٹی گریڈ پر

اکائی طول کے مساوی ہے طہ سنٹی گریڈ تک گرم کرنے سے پھیلایا گیا ہے اور اس کا طول ۱ + ف (طہ) ہو جاتا ہے، ۱ + ف (طہ) کو لا سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ جب تپش طہ + مف طہ ہو جاتی ہے تو طول لا + مف لا ہو جاتا ہے۔ خارج قسمت (مف لا)/(مف طہ) کو ہم خطی پھیلاؤ کی اوسط قدر کہینگے جبکہ تپش طہ سے طہ + مف طہ ہو جائے اور (فر لا)/(فر طہ) کو تپش طہ پر خطی پھیلاؤ کی قدر کہینگے۔

بالعموم ف (طہ)، ا طہ یا ا طہ + ب طہ^2 کی شکل کا ہوتا ہے جہاں ا اور ب بہت چھوٹے مستقل ہوتے ہیں اگر، لا = ۱ + ا طہ تو قدر (فر لا)/(فر طہ)، ا کے مساوی ہوگی جو طہ پر منحصر نہیں ہے، اگر ف (طہ) = ا طہ + ب طہ^2 اور لا = ۱ + ا طہ + ب طہ^2 تو قدر ا + ۲ ب طہ ہوگی جو طہ پر موقوف ہے۔

اگر کوئی مجسم سب سمتوں میں مساوی طور پر پھیلے اور صفر درجہ سنٹی گریڈ پر اس کا رقبہ اکائی ہو اور حجم بھی اکائی ہو تو تپش طہ پر رقبہ ہوگا ما = {۱ + ف (طہ)}^{2} اور حجم ی = {۱ + ف (طہ)}^{3}، نسبتوں (فر ما)/(فر طہ) اور (فر ی)/(فر طہ) کو بالترتیب تپش طہ پر سطحی اور کعبی پھیلاؤ کی قدریں کہینگے۔
اگر ف (طہ) = ا طہ، تو

ما = (۱ + ا طہ)^2، (فر ما)/(فر طہ) = ۲ ا + ۲ ا^2 طہ

$$ی = (۱ + ا ط)^۳ ، \frac{فی}{فط} = ۳ ا + ۶ ا^۲ ط + ۳ ا^۳ ط^۲$$

چونکہ ا بہت چھوٹا ہے، اس لئے ا^۲ اور ا^۳ اور بھی چھوٹے ہونگے اور قدریں تقریباً ۲ ا اور ۳ ا ہونگی۔

مشق۔ پانی کی مقدار جو ۴° سنتی گریڈ تپش پر اکائی حجم گھیرتی ہے ط° سنتی گریڈ تپش پر اس کا حجم ۱ + ا (ط - ۴)^۲ ہوتا ہے جہاں ا = ۸٫۳۸ × ۱۰^{-۶}، صفر درجہ اور ۱۰° سنتی گریڈ کی تپشوں پر مکعبی پھیلاؤ کی قدریں دریافت کرو۔

۱۷۔ **ایصال حرارت**۔ ایک تختی یا سِل کی موٹائی د ہے اور اس کے مقابل کے رُخ متوازی مستوی سطحیں ہیں، اس کے ایک رُخ کو مستقل تپش تش۱ پر اور مقابل کے رُخ کو مستقل تپش تش۲ (تش۱ > تش۲) پر قائم رکھا گیا ہے، اگر ان رخوں کے درمیان ان کے متوازی کوئی سطح مستوی لی جائے اور اس سطح کے رقبہ ا میں سے ت سکانڈوں میں حرارت کی مقدار ق نفوذ کرے تو

$$ق = ص ا (تش۱ - تش۲) ت / د$$

جہاں ص مستقل ہے اور اس کی قیمت سِل کے مسالہ پر موقوف ہے، ص کو ایصالیت کہتے ہیں۔ یہ مساوات حرارت کے قائم طور پر بہنے کے کلیہ کو تعبیر کرتی ہے اور یہ کلیہ تجربہ پر مبنی ہے۔
اگر ایک جسم کی تپش تش آنِ واحد میں جسم کے اندر نقطہ بہ نقطہ بدلے اور نیز ایک آن سے دوسری آن تک جسم کے ایک ہی نقطہ پر بھی بدلتی ہو تو تش ایک سے زیادہ متغیروں کا یعنی ت اور نیز نقطہ کے محددوں کا تفاعل ہوگا۔
جسم کے ایک دئے ہوئے نقطہ پر وقت کے لحاظ سے تپش تش کی تبدیلی کی شرح ہے

یہا $\dfrac{\text{مف ش}}{\text{مف ت}}$ = عفن ش
مف ت ←.

اس مشتق کے بنانے میں نقطہ کے محدد نہیں بدلتے، ایک دئے ہوئے نقطہ پر صرف وقت کے گذرنے کے ساتھ ش بدلتا ہے۔

بخلاف اسکے فرض کرو کہ جسم میں ایک نقطہ ن ایسا ہے جسکا فاصلہ ایک ثابت سطح مستوی سے م ن = س ہے اور م ن ممدودہ پر ایک نقطہ س ایسا ہے کہ ن س = مف س، تب ایک ہی آن میں ن پر تپش ش، س پر کی تپش سے مختلف ہوگی۔ س پر کی تپش کو ہم ش + مف ش سے تعبیر کرتے ہیں، ٹھیک وقت ت پر ن س کی سمت میں نقطہ ن پر تپش ش کی تبدیلی کی شرح ہے

یہا $\dfrac{\text{مف ش}}{\text{مف س}}$ = عفس ش
مف س ←.

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ کسی ایسی سطح مستوی کے ہر نقطہ پر جو م ن پر عمود وار ہو کسی خاص وقت ت پر تپش وہی ہوتی ہے، اگرچہ ایسی مختلف سطوح مستوی کے لئے یہ تپش مختلف ہے۔ گویا ہم یہ تسلیم کرلیتے ہیں کہ حرارت کا نفوذ ایسے خطوط مستقیم کی سمت میں ہوتا ہے جو م ن کے متوازی ہیں۔ اب فرض کرو کہ ن پر تپش ش ہے اور س پر تپش ش + مف ش ہے جہاں ن س = مف س نیز فرض کرو کہ ایک سطح مستوی جو ن س پر عمود وار ہے اور ن اور س کے درمیان واقع ہے اس کے اکائی رقبہ میں سے مف ت وقت میں حرارت کی مقدار مف ش نفوذ کرتی ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ ق کے لئے جو ضابطہ

اوپر دیا گیا ہے وہ ایصال کے قائم نہ ہونے کی صورت میں تراش کو عبور کرنے والی حرارت کی اوسط مقدار کو تعبیر کرتا ہے جہاں مف ت اور مف س چھوٹے ہیں۔ اس لئے اس ضابطہ میں ق کی بجائے مف ق، ا کی بجائے ا، ش کی بجائے ش + مف ش، ت کی بجائے مف ت اور د کی بجائے مف س رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مف ق} = \text{ص}\left\{\text{ش} - (\text{ش} + \text{مف ش})\right\}\frac{\text{مف ت}}{\text{مف س}}$$

اور

$$\frac{\text{مف ق}}{\text{مف ت}} = -\text{ص}\,\frac{\text{مف ش}}{\text{مف س}}$$

مف ت اور مف س کو مائل بہ صفر کرنے سے

$$\text{عف}_{\text{ت}}\,\text{ق} = -\text{ص}\;\text{عف}_{\text{س}}\,\text{ش}$$

جسے الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے، ن پر کے اکائی رقبہ کی تراش کو جس زمانی شرح سے حرارت عبور کرتی ہے وہ رقبۂ مذکور کی عمود وار سمت میں تپش کی کمی کی مکانی شرح کے ص گنا کے مساوی ہے۔

$\text{عف}_{\text{ت}}\,\text{ق}$ یا اس کے معادل $-\text{ص}\;\text{عف}_{\text{س}}\,\text{ش}$ کو ہم س کے بڑھنے کی سمت میں بہاؤ کہینگے۔ ظاہر ہے کہ حرارت کا بہاؤ زیادہ تپش والے مقامات سے کم تپش والے مقامات کی طرف ہوگا، یہ امر شکل $-\text{ص}\;\text{عف}_{\text{س}}\,\text{ش}$ سے ظاہر ہے کیونکہ اگر س کے بڑھنے سے ش کم ہو تو $\text{عف}_{\text{س}}\,\text{ش}$ منفی اور اسلئے $-\text{عف}_{\text{س}}\,\text{ش}$ مثبت ہوگا۔

مشق ـ $\text{ش} = \text{ش}_{1}\,\text{قو}^{\frac{\text{ص ت}}{\text{ج}}}$ جب لا جہاں ش_{1} اور ج

مستقل ہیں۔

عفِ ق = ص عفِ ش = ـ ص ش و^(ـ ص ت / ج) جم لا

جب، لا = π/۲ تو عفِ ق = ۰ خواہ ت کچھ ہی ہو یعنی اس سطح مستوی میں حرارت کا بہاؤ نہیں ہوتا، جب لا < π/۲ سے تو سیلان بائیں طرف ہوتا ہے، جب، لا > π/۲ تو سیلان دائیں طرف ہوگا جہاں لا کی مثبت سمت دائیں طرف لی گئی ہے۔ اوپر کا مسئلہ ایک سے زیادہ متغیّروں کے تفاعل کی ایک مثال ہے۔ اس قسم کے تفاعلوں پر بعد ازیں بحث کی جائے گی۔

مشق ۱۵

۱۔ ایک نقطہ ن یکساں رفتار ع سے ایک خطِ مستقیم ا ب پر حرکت کرتا ہے، و ا، ا ب پر عمود وار ہے اور ا کے مساوی ہے، و کے گرد ن کی زاویٔی رفتار معلوم کرو۔

۲۔ ایک نقطہ ن یکساں رفتار ع سے ایک خطِ مستقیم ا ب پر حرکت کرتا ہے اور ایک اور نقطہ ق یکساں رفتار و سے ایک اور متقاطع خطِ مستقیم ا ج پر حرکت کرتا ہے، بتاؤ کہ ن اور ق کا درمیانی فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

۳۔ سطح سمندر سے لا فٹ کی بلندی پر کرہ ہوائی کے دباؤ کا اشتداد د اور کثافت ک ہے۔ اس امر کو علامتوں کے ذریعہ تعبیر کرو کہ نیچے کی طرف اکائی طول میں دباؤ کے اضافہ کی شرح کثافت اور اسراع بہ جاذبۂ ارض کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ یہ تسلیم کرتے ہوئے کہ د = م ک جہاں م مستقل ہے اور سطح سمندر پر دباؤ د = دِ، ثابت کرو کہ

د = دِ و^(ـ ج لا / م) (ج اسراع بجاذبۂ ارض ہے)

۴۔ اگر ایک حلقہ یا دور میں سے گزرنے والے خطوطِ قوت کی تعداد ن ہو تو الفاظ میں اس کے معنے بیان کرو :۔ $\frac{ق ن}{ق ت}$

۵۔ اس امر کو علامتوں میں بیان کرو کہ (قوت محرکہ برق) ق دو رقوم کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے جس میں سے پہلی رقم مزاحمت ز اور برقی رو ی کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے اور دوسری رقم ذاتی امالیت ل اور ی کے اضافہ کی زمانی شرح کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔

۶۔ اس امر کو لفظوں میں بیان کرو کہ قوت لا جو محور لا کی سمت میں ایک مقناطیسی خول پر عمل کرتی ہے وہ اسی سمت میں توانائی ی کی کمی کی مکانی شرح ہے۔

۷۔ اگر دفعہ ۶۹ مشق ۴ میں سیال کے حجم ح سے پھیل کر حجم ح۱ اختیار کرنے میں کام ک کیا جائے تو ک معلوم کرو جبکہ (۱) د ح = م (مستقل) د ح جب = م (مستقل)

۸۔ ایک لمبی یکساں سلاخ کی خطی کثافت ک ہے اور اس کا قوہ نقطہ ن پر جس کا فاصلہ ن ج سلاخ مذکور سے لا کے مساوی ہے ق ہے جہاں

$$ق = ۲ س ک لوک \left(\frac{م}{لا}\right) \quad (م \text{ مستقل})$$

ثابت کرو کہ سلاخ کی کشش ن پر کے اکائی ذرہ پر ج کی طرف ہے اور $\frac{۲ س ک}{لا}$ ہے۔

۹۔ ایک پتلی مستدیر قرص کی سطحی کثافت ک ہے اس کا قوہ ایک نقطہ ن پر جو قرص کے مرکز زمیں سے

گزرنے والے عمودی خط پر واقع ہے ق ہے جہاں

$$ق = ۲ \pi س ک \left\{ \sqrt{ا^۲ + لا^۲} - لا \right\}$$

جہاں ا قرص کا نصف قطر ہے اور ز ن = لا، ثابت کرو کہ ن پر کی اکائی کمیت پر کشش $۲\pi س ک \left\{ ۱ - \frac{لا}{\sqrt{ا^۲ + لا^۲}} \right\}$ ہے

ثابت کرو کہ اگر لا بمقابلہ ا کے چھوٹا ہو تو کشش تقریباً

$۲\pi س ک$ ہو گی۔

۱۰۔ ایک نقطہ کے محدد وقت ت پر یہ ہیں

$$لا = ا جم (۲ ن ت - عہ)، ما = ب جم ن ت$$

ثابت کرو کہ نقطہ کے راستہ کی مساوات ہے

$$لا = ا \left\{ \left(\frac{۲ ما^۲}{ب^۲} - ۱ \right) جم عہ + \frac{۲ ما}{ب} \sqrt{\left(۱ - \frac{ما^۲}{ب^۲} \right)} جیب عہ \right\}$$

لا محدد حیطۂ اہتزاز ا اور دَور $\frac{\pi}{ن}$ والا سادہ موسیقی تفاعل ہے اور ما محدد حیطۂ اہتزاز ب اور دَور $\frac{۲\pi}{ن}$ والا سادہ موسیقی تفاعل ہے، دَور دوسری صورت میں دو چند ہے۔ اس لئے حرکت زیر بحث وہ سادہ موسیقی حرکتوں سے جن کی سمتیں علی القوائم ہیں اور جن کے دَور ۱ : ۲ کی نسبت میں ہیں مرکب خیال کی جا سکتی ہے۔

جب، عہ = ۰ تو طریق قطع مکافی ہے، عہ کی مختلف قیمتوں کے لئے جو منحنی حاصل ہوتے ہیں اُن کے لئے ملاحظہ ہو گرے کا رسالۂ طبیعیات جلد اول صفحہ ۷۰۔

یا اور طبیعیات کی کتابیں ۔

۱۱۔ ایک ہی خطِ مستقیم میں مساوی دوروں والی دو سادہ موسیقی حرکتیں ہیں، ثابت کرو کہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت میں ترکیب دی جا سکتی ہیں جس کا دور ان حرکتوں کے دور کے مساوی ہے اور جو اسی خطِ مستقیم میں وقوع پذیر ہوتی ہے ۔

۱۲۔ اگر سوال ماقبل کی حرکتیں علی القوائم سمتوں میں ہوں تو ثابت کرو کہ ان کو ترکیب دینے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے وہ قطع ناقص ہے ۔

(۷)

باب نہم

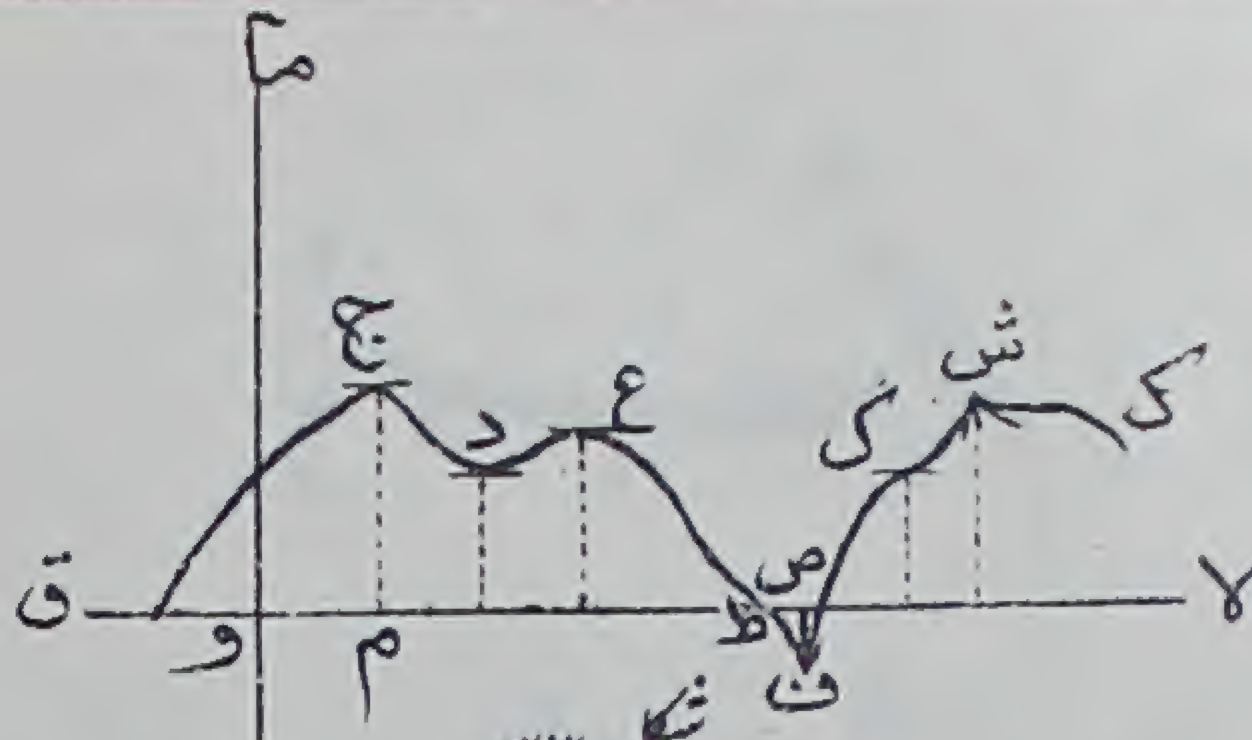
اوسط قیمت کے مسئلے۔ اعظم اور اقل قیمتیں۔ نقاطِ انعطاف

۲۷۔ رول کا مسئلہ اور اوسط قیمت کے مسئلے۔

ذیل کے مسئلے بکثرت استعمال ہوتے ہیں:-

مسئلہ ۱۔ اگر فا (لا) اور فاَ (لا) مسلسل ہوں جبکہ لا ، ا سے ب تک بدلے اور اگر فا (لا) صفر ہو جبکہ لا = ا اور لا = ب تو فاَ (لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت کے لئے ضرور صفر ہوگا۔ [رول کا مسئلہ]

علم ہندسہ کی زبان میں اس مسئلہ سے محض یہ تعبیر ہوتا ہے کہ فا (لا) کی ترسیم پر حدود مذکورہ کے اندر کم از کم ایک نقطہ ضرور ہے جس پر کا مماس محور لا کے متوازی ہے۔ ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ ایسے نقاط ہوں، اگر ایسے نقاط ایک سے زیادہ ہوں تو ان کی تعداد طاق ہوگی (ملاحظہ ہو نقاط ج، د، غ (شکل ۳۳)۔ طالب علم کو چاہئے کہ ترسیم کھینچ کر بتائے کہ اگر سعت ا سے ب تک کے اندر کسی نقطہ پر فا (لا) یا فاَ (لا) غیر مسلسل ہو جائے تو مسئلہ مذکور لازمی طور پر درست نہیں ہوتا۔



شکل ۳۳

یہ مسئلہ ویسے ہی از خود عیاں ہے کیونکہ جب 'لا' ا سے ب تک بڑھے تو یہ ممکن نہیں کہ فا(لا) ہمیشہ بڑھتا رہے یا ہمیشہ گھٹتا رہے اس لئے کہ فا(ا) = ۰ اور فا(ب) = ۰

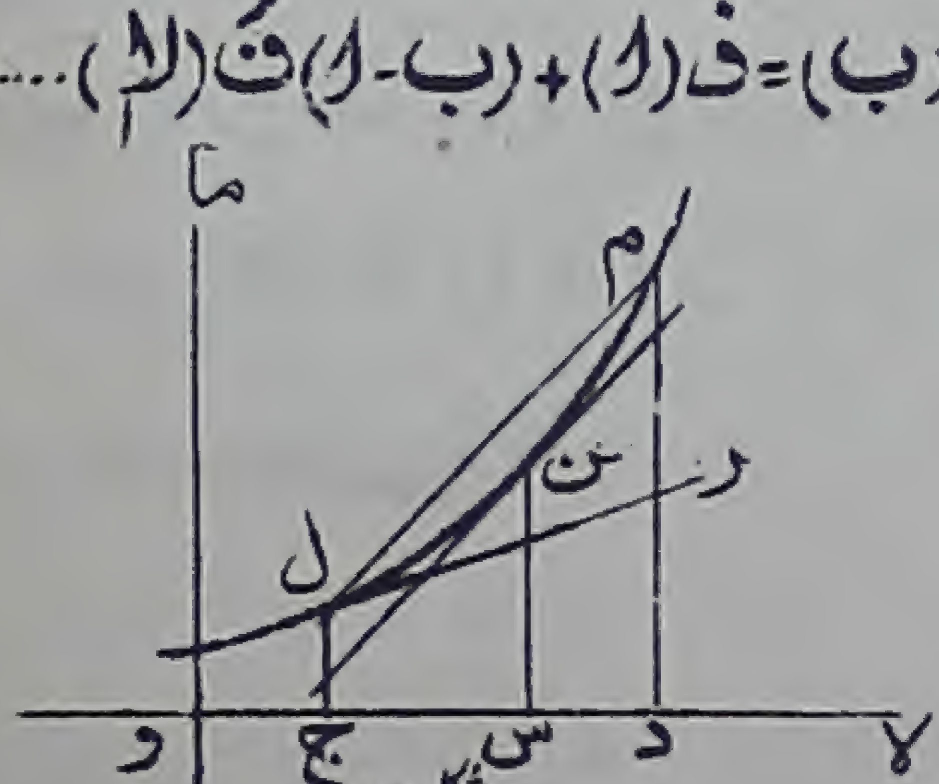
پس ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت کے لئے ضرور ہے کہ فا(لا) بڑھنا بند ہو جائے اور گھٹنا شروع ہو یا گھٹنا بند ہو جائے اور بڑھنا شروع ہو، لا کی اس قیمت کے لئے فاَ(لا) صفر ہوگا۔

ظاہر ہے کہ ا، ب سے کم یا زیادہ ہو سکتا ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر ف(لا) اور فَ(لا) مسلسل ہوں جبکہ لا، ا سے ب تک بدلے تو ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت (فرض کرو کہ لا$_1$) ضرور ایسی ہوگی کہ

$$\frac{\text{ف(ب)} - \text{ف(ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} = \text{فَ(لا}_1\text{)} \quad \text{یا} \quad \text{ف(ب)} = \text{ف(ا)} + (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(لا}_1\text{)} \quad \text{....(۱)}$$

(اوسط قیمت کا مسئلہ)



شکل ۳۴

شکل ۳۴ میں فرض کرو کہ ل نقطہ [ا، ف(ا)] ہے اور م نقطہ (ب، ف(ب)) ہے

تب وتر ل م کا ڈھال ہے

$$\frac{ف(ب) - ف(ا)}{ب - ا}$$

ہندسی زبان میں اس مسئلہ کا یہ مطلب ہے کہ ترسیم پر ل اور م کے درمیان کم از کم ایک نقطہ مثلاً ن ضرور ایسا ہوگا جس پر کا مماس وتر ل م کے متوازی ہو، اگر ن کا فصلہ لا ہو تو ن پر منحنی کا ڈھال فَ(لا) ہوگا جس سے مساوات بالا قائم ہو جاتی ہے۔ طالب علم کو چاہیے کہ ترسیمیں کھینچ کر دیکھے کہ ن کی طرح کے ایک سے زیادہ نقطے ہو سکتے ہیں اور بخلاف اس کے اگر ا اور ب کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے ف(لا) یا فَ(لا) غیر مسلسل ہو تو ضروری نہیں کہ مسئلہ مذکور درست ہو۔

مسئلہ زیر بحث مسئلہ (۱) سے بھی مستنبط ہو سکتا ہے اور استنباط کا یہ طریقہ اسلئے خاص طور پر ضروری ہے کہ اسکی توسیع سے ٹیلر کا مسئلہ حاصل ہو سکتا ہے جو علم احصا میں نہایت دور رس ہے، درحقیقت مسئلہ (۲) ٹیلر کے مسئلہ ہی کی ایک خاص صورت ہے۔

مقدار ق پر غور کرو جو ذیل کی مساوات سے متعین ہوتی ہے۔

$$\frac{ف(ب) - ف(ا)}{ب - ا} = ق \quad یا \quad ف(ب) - ف(ا) - (ب - ا) ق = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب تفاعل ف(لا) - ف(ا) - (لا - ا) ق کو جو کہ ف(ب) - ف(ا) - (ب - ا) ق میں ب کی بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے فا(لا) سے تعبیر کرو۔

تب (۲) کی رو سے فا(ب) صفر کے مساوی ہے، نیز فا(ا) صفر ہے، اس لئے مسئلہ (۱) کے شرائط فا(لا) میں پورے ہوتے ہیں کیونکہ فا(لا) اور فاَ(لا) دونوں مسلسل ہیں، اس لئے فاَ(لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت لا کے لئے صفر ہوگا، لیکن

$$فاَ(لا) = فَ(لا) - ق$$

اس لئے فاَ (لاِ) - ق = ۰ اور ق = فً (لاِ)، پس مسئلہ ثابت ہوا

مسئلہ ۳- اگر ف (لا)، فَ (لا) اور فً (لا) مسلسل ہوں جبکہ لا، ا سے ب تک بدلے، تو ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت (فرض کرو کہ لاِ) ایسی ہوگی کہ

ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (ا) + ½ (ب - ا)² فً (لاِ)

مسئلہ زیر بحث مسئلہ (۲) کی توسیع ہے، اس کو ثابت کرنے کے لئے ایک ایسی مقدار سا پر غور کرو جو مساوات ذیل سے متعین ہوتی ہے۔

ف (ب) - ف (ا) - (ب - ا) فَ (ا) - ½ (ب - ا)² سا = ۰ .... (۳)

حسب سابق تفاعل فا (لا) ایسا لو کہ

فا (لا) = ف (لا) - ف (ا) - (لا - ا) فَ (ا) - ½ (لا - ا)² سا

یہاں فا (ا) = ۰، فا (ب) = ۰ [ازروئے مساوات (۳)] اور فا (لا) مسئلہ (۱) کی شرطیں پوری کرتا ہے، اب

فاَ (لا) = فَ (لا) - فَ (ا) - (لا - ا) سا

اس لئے ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت لاِ کے لئے

فاَ (لاِ) = فَ (لاِ) - فَ (ا) - (لاِ - ا) سا = ۰

اب فاَ (لا) معدوم ہو جاتا ہے جبکہ لا = لاِ اور صریحاً یہ اس صورت میں بھی معدوم ہوتا ہے جبکہ لا = ا، اسلئے مسئلہ (۱) کی شرطیں فاَ (لا) میں بھی پوری ہوتی ہیں، اس لئے اس کا [یعنی فاَ (لا)] کا مشتق لا کی کم از کم ایک قیمت کے لئے جو ا اور لاِ کے درمیان اور اس لئے ا اور ب کے درمیان ہو صفر ہوگا، لیکن فاَ (لا) کا مشتق فاً (لا) ہے اور

فاً (لا) = فً (لا) - سا

اس لئے فاً (لاِ) = فً (لاِ) - سا = ۰ یا سا = فً (لاِ)

اور ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

ف (ب) - ف (ا) - (ب - ا) فَ (ا) - ۱/۲ (ب - ا)^۲ فً (لا۱) = ۰

جس سے مسئلہ ثابت ہوا۔

اس مسئلہ کو حسب ذیل ہندسی معنی بھی پہنائے جا سکتے ہیں۔

اگر ل پر کا مماس د م سے ر پر ملے (شکل ۳۴) تو

د ر = ف (ا) + (ب - ا) فَ (ا)، د م = ف (ب)

اس لئے بلحاظ علامت اور مقدار کے

ر م = د م - د ر = ۱/۲ (ب - ا)^۲ فً (لا۱)

اس لئے نقطہ م پر منحنی کا ہٹاؤ نقطہ ل پر کے مماس سے جبکہ اس ہٹاؤ کو م کے معیّن پر ناپا جائے ۱/۲ (ب - ا)^۲ فً (لا۱) کے مساوی ہے۔

۳۷۔ اوسط قیمت کے مسئلوں کی دیگر شکلیں۔ مسائل ۲، ۳ کو حسب ذیل شکلوں میں بھی بیان کیا جاتا ہے۔

اگر لا کوئی عدد ہو جو ا اور ب کے درمیان واقع ہے تو لا - ا اور ب - ا کی علامت ایک ہی ہوگی خواہ ا، ب سے بڑا ہو یا چھوٹا ہو، اس لئے (لا - ا)/(ب - ا) ایک مثبت کسر واجب ہوگی، فرض کرو کہ یہ ط کے مساوی ہے، اس طرح لا = ا + (ب - ا) ط، اس سے ظاہر ہے کہ ا اور ب کے درمیان کے ہر ایک عدد کو ا + (ب - ا) ط سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جہاں ط ایک مثبت کسر واجب ہے۔

اب فرض کرو کہ ب = ا + ھ تو ب - ا = ھ، لہٰذا مسئلہ (۲) ہو جاتا ہے

ف (ا + ھ) = ف (ا) + ھ فَ (ا + ط ھ) ....(۲، ا)

اور مسئلہ (۳) ہو جاتا ہے

ف (ا + ھ) = ف (ا) + ھ فَ (ا) + ۱/۲ ھ^۲ فً (ا + ط۱ ھ)
.......(۳، ا)

مسئلہ ۳ کا طہ مسئلہ ۲ کے طہ کے لازمی طور پر مساوی نہیں، اسلئے امتیاز کی غرض سے طہ استعمال کیا گیا ہے۔ طہ کے متعلق ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک مثبت کسر واجب ہے اور یہ کسر بالعموم ا اور ھ پر منحصر ہے۔ خاص خاص صورتوں میں اس کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے، مثلاً اگر ف (لا) = لا² تو

فَ (لا) = ۲ لا، فَ (ا + طہ ھ) = ۲ (ا + طہ ھ)

لیکن (ا + ھ)² = ا² + ۲ ا ھ + ھ² = ا² + ھ × ۲ (ا + ½ ھ)

اور (ا + ھ)² = ف (ا) + ھ فَ (ا + طہ ھ) = ا² + ھ × ۲ (ا + طہ ھ)

اسلئے اس صورت میں طہ = ½، یعنی شکل ۲۴ میں اگر ل ن م ایک مکافی کی قوس ہو تو س، ج د کا وسطی نقطہ ہوگا اور س ن وتر ل م کی تنصیف کریگا۔

اگر ہم ا کی بجائے لا لکھیں تو اوپر کی شکلیں ہو جاتی ہیں

ف (لا + ھ) = ف (لا) + ھ فَ (لا + طہ ھ) ..... (۲، ب)

ف (لا + ھ) = ف (لا) + ھ فَ (لا) + ½ ھ² فً (لا + طہ ھ) .... (۳، ب)

اگر ہم ا کو صفر بنا دیں اور ھ کی بجائے لا لکھیں تو

ف (لا) = ف (۰) + لا فَ (طہ لا) .... (۲، ج)

ف (لا) = ف (۰) + لا فَ (۰) + ½ لا² فً (طہ لا) .... (۳، ج)

مسئلہ ۲ سے مسئلہ ۶ دفعہ ۵۸ کا ایک اور ثبوت حاصل ہوتا ہے اگرچہ یہ ثبوت دراصل مختلف نہیں ہے۔ کیونکہ اگر فَ (لا)، لا کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہو تو فَ (لا) صفر ہوگا، پس ف (ب) = ف (ا) یعنی ف (لا) کی کوئی دو قیمتیں ف (ا)، ف (ب) مساوی ہوں گی، بالفاظ دیگر ف (لا) مستقل ہوگا، اس لئے اگر فَ۱ (لا) - فَ۲ (لا) صفر ہو تو تفاضل ف۱ (لا) - ف۲ (لا) مستقل ہوگا۔

مشق ۱۔ اگر لا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ لوک (۱ + لا) کم ہوگا لا سے اور بڑا ہوگا لا − ½ لا² سے۔

ف(لا) = لوک (۱ + لا)، فَ(لا) = ۱/(۱ + لا)، فً(لا) = − ۱/(۱ + لا)²

ف(۰) = لوک ۱ = ۰، فَ(۰) = ۱، فَ(طہ لا) = ۱/(۱ + طہ لا)

فً(طہ لا) = − ۱/(۱ + طہ لا)²

مسئلہ (۲، ج) کی رو سے لوک (۱ + لا) = ف(۰) + لا فَ(طہ لا) = لا/(۱ + طہ لا) < لا

مسئلہ (۳، ج) کی رو سے لوک (۱ + لا) = ف(۰) + لا فَ(۰) + ½ لا² فً(طہ لا)

= لا − ½ لا²/(۱ + طہ لا)² > لا − ½ لا²

مشق ۲۔ ثابت کرو کہ جم لا بڑا ہے ۱ − ½ لا² سے

ف(لا) = جم لا، فَ(لا) = − جب لا، فً(لا) = − جم لا

ف(۰) = ۱، فَ(۰) = ۰، فً(طہ لا) = − جم (طہ لا)

مسئلہ (۳، ج) کی رو سے جم لا = ۱ − ½ لا² جم (طہ لا) > ۱ − ½ لا²

چونکہ جم (طہ لا) تعداداً کم ہے ایک سے، نیز آسانی سے مستنبط ہو سکتا ہے کہ جم لا = ۱ − طہ لا² جہاں طہ کوئی مثبت کسر واجب ہے جو ½ سے کم ہے۔

مشق ۳۔ طالب علم یہ فرض کر کے کہ

ف(ب) − ف(ا) − (ب − ا) فَ(ا) − ½ (ب − ا)² فً(ا) − ⅙ (ب − ا)³ س = ۰

یہ ثابت کرنے کی کوشش کرے کہ اگر ف (لا) اور اس کے پہلے تین مشتقات

مسلسل ہوں تو بس مساوی ہوگا فً (لا) کے جہاں لا، ا اور ب
کے درمیان واقع ہے۔ اس میں ا کی بجائے صفر اور ب کی بجائے
لا رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

ف (لا) = ف (۰) + لا فَ (۰) + $\frac{1}{2}$ لا^2 فً (۰) + $\frac{1}{6}$ لا^3 فً (ط۳ لا)

جہاں ط۳ کوئی مثبت کسر واجب ہے۔

مشق ۴۔ مشق ۳ کا مسئلہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ اگر لا، صفر
اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہو تو

لا > جب لا > لا − $\frac{1}{6}$ لا^3 ، ممس لا > لا + $\frac{1}{3}$ لا^3

یہ لا تساویات کیا ہو جائینگی جبکہ لا، − $\frac{\pi}{2}$ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

مشق ۵۔ اگر ف (لا) = (لا − ۱)$^{\frac{2}{3}}$ − ۱
تو ف (لا) = ۰ جبکہ لا = ۰ اور جبکہ لا = ۲،
بتاؤ کیا فَ (لا)، ۰ اور ۲ کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے
صفر ہوتا ہے یا نہیں۔

۴۷۔ **اعظم اور اقل قیمتیں**۔ دفعات ۱۷، ۵۲ میں تفاعل کی
موڑ کی قیمتوں کی طرف توجہ دلائی گئی ہے۔ موڑ کی قیمت تفاعل کی اعظم
قیمت ہو سکتی ہے یا اقل۔ ان کی باضابطہ تعریفیں ذیل میں درج کیجاتی ہیں۔

تعریف ف (ا) کو ف (لا) کی اعظم قیمت اس وقت
کہتے ہیں جبکہ ف (ا)، جبریہ طور پر بڑا ہو ف (ا − ھ) اور
ف (ا + ھ) دونوں سے ھ کی ہر ایسی مثبت قیمت کے لئے جو
ایک چھوٹی لیکن محدود مثبت مقدار ع سے کم ہو، نیز ف (ا) کو
ف (لا) کی اقل قیمت اس وقت کہتے ہیں جبکہ ف (ا)، جبریہ طور پر

چھوٹا ہو ف (ا - ھ) اور ف (ا + ھ) دونوں سے ھ کی ہر ایسی مثبت قیمت کے لئے جو ایک چھوٹی لیکن محدود مثبت مقدار ع سے کم ہو۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اعظم قیمت سے لازمی طور پر وہ قیمت مراد نہیں ہے جو تفاعل کی سب قیمتوں سے بڑی ہو، اور نہ ہی اقل قیمت لازماً سب قیمتوں سے چھوٹی ہے بلکہ اعظم قیمت سے یہ مفہوم تعبیر ہوتا ہے کہ ف (ا)، ف (لا) کی کسی اور قیمت سے جو اس کے دونوں طرف ف (ا) کے نزدیک ہو بڑی ہے۔

اعظم اور اقل قیمتوں کے لئے شرط آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے، اگر ف (ا)، ف (لا) کی اعظم قیمت ہو تو اس کا یہ مطلب ہے کہ جب لا، ا - ھ سے ا تک بڑھتا ہے تو ف (لا) بھی بڑھتا ہے اور اسلئے ف (لا) مثبت ہے (دفعہ ۵۲) اور اس کے بعد جبکہ لا، ا سے ا + ھ تک بڑھتا ہے تو ف (لا) گھٹتا ہے یعنی ف (لا) منفی ہے اس لئے جب، لا بڑھتے بڑھتے ا میں سے گزرتا ہے تو ف (لا) مثبت سے منفی قیمت اختیار کرتا ہے۔ برعکس اس کے اگر لا بڑھتے بڑھتے ایک ایسی قیمت ا میں سے گذرے کہ ف (لا) مثبت سے منفی ہو جائے تو ف (ا)، ف (لا) کی اعظم قیمت ہوگی۔

اس لئے ف (ا)، ف (لا) کی اعظم قیمت صرف اس صورت میں ہوگی جبکہ لا کے بڑھتے بڑھتے ا میں سے گذرتے وقت ف (لا) مثبت سے منفی ہو جائے۔

اسی طرح ف (ا)، ف (لا) کی اقل قیمت صرف اس صورت میں ہوگی جبکہ لا کے بڑھتے بڑھتے ا میں سے گزرتے وقت ف (لا) منفی سے مثبت ہو جائے۔

یہ شرط اعظم اور اقل قیمتوں کے متعلق بنیادی شرط یا جانچ ہے۔
معمولی صورتوں میں اس شرط کو سادہ شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے، بالعموم ف (لا) مسلسل ہوگا اور مسلسل تفاعل کی علامت صرف

اسی وقت بدل سکتی ہے جبکہ یہ صفر میں سے گزرے، (دفعہ ۵۴، مسئلہ ۲)
لہٰذا اگر ف (ا)، ف (لا) کی موثر کی قیمت ہو تو فَ (ا) صفر ہوگا۔
نیز اگر ف (ا)، ف (لا) کی اعظم قیمت ہو تو جب 'لا'، ا میں
سے گزرتا ہے فَ (لا) مثبت سے منفی قیمت اختیار کرتا ہے، اس لئے
ا کے نزدیک فَ (لا) کم ہونے والا تفاعل ہے اور اس لئے اس کا
مشتق یعنی فً (لا)، ا کے نزدیک منفی ہوگا۔ لیکن اگر فً (ا)
صفر نہ ہو تو ا کے نزدیک فً (لا) کی علامت وہی ہوگی جو فً (ا)
کی ہے۔ لہٰذا اگر فً (ا) صفر نہ ہو تو یہ منفی ہوگا جبکہ ف (ا)، ف (لا)
کی اعظم قیمت ہو، اسی طرح سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر فً (ا) صفر
نہ ہو تو یہ مثبت ہوگا جبکہ ف (ا)، ف (لا) کی اقل قیمت ہو، برعکس
اس کے اگر فً (ا) منفی ہو تو ف (ا)، ف (لا) کی اعظم قیمت
ہوگی اور اگر فً (ا) مثبت ہو تو ف (ا)، ف (لا) کی اقل
قیمت ہوگی۔

اس لئے جب، فَ (لا) اور فً (لا) مسلسل ہوں تو ف (لا)
کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرنے کا طریقہ حسب ذیل ہے:-

مساوات فَ (لا) = ۰ کی اصلیں بالعموم لا کی وہ قیمتیں ہوتی
ہیں جن کے لئے ف (لا) کی قیمت اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ اگر فَ (لا) = ۰
کی ایک اصل ا ہو تو ف (ا)، ف (لا) کی اعظم قیمت ہوگی اگر
فً (ا) منفی ہو اور اقل قیمت ہوگی اگر فً (ا) مثبت ہو۔

جب فً (ا) صفر ہو تو یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ف (ا) موثر یہ
کی قیمت ہے یا نہیں مندرجۂ بالا طریقہ کام نہیں دیتا۔ اس
صورت میں ممکن ہے کہ فً (ا) صفر ہو مگر ف (ا) نہ اعظم ہو نہ اقل۔
جب، فَ (ا) = ۰ اور فً (ا) = ۰ تو جانچ کرنے کا بنیادی اصول
یعنی یہ کہ اعظم اور اقل قیمت کے لئے فَ (لا) کی علامت بدلتی ہے
استعمال کیا جاسکتا ہے۔ دفعہ ۸۰ میں معلوم ہوگا کہ ف (لا) کی ترسیم پر کا

وہ نقطہ جس کے لئے فَ (لا) اور فً (لا) دونوں صفر ہوں بالعموم انعطاف کا نقطہ ہوتا ہے۔

یہ ثابت کرنا طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں (متبادلاً) باری باری سے واقع ہوتی ہیں۔ مثلاً شکل ۲۲ دفعہ ۲۷ میں ج پر تفاعل فا (لا) کی اعظم قیمت ہے، پھر د پر اقل قیمت ہے، اور پھر ع پر اعظم قیمت ہے، اس ترسیم میں ف اور ش پر تفاعل مڑتا ہے اگرچہ ان نقطوں پر فَا (لا) صفر نہیں ہے، ف اور ش کی متقابل جانبوں میں فا (لا) کی علامتیں مختلف ہیں۔ نیز گ پر اگرچہ فَ (لا) صفر ہے لیکن یہاں تفاعل کا موڑ کا نقطہ نہیں ہے کیونکہ فَ (لا) کی علامت گ کی متقابل جانبوں میں وہی ہے اور گ انعطاف کا نقطہ ہے۔

جب ف (لا) اور اس کے مشتقات ا پر مسلسل ہوں تو اوپر کے نتائج اوسط قیمت کے مسئلہ سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں کیونکہ اگر ف (ا)، ف (لا) کی موڑ کی قیمت ہو تو فرقوں

د۱ = ف (ا + ھ) - ف (ا) اور د۲ = ف (ا - ھ) - ف (ا)

کی علامتیں ھ کی چھوٹی قیمتوں کے لئے وہی ہونی چاہئیں اور ف (ا) کے اعظم قیمت ہونے کی صورت میں ان فرقوں کی علامت منفی ہوگی اور اقل ہونے کی صورت میں یہ علامت مثبت ہوگی۔

اب دفعہ ۲۷، (۳، ا) کی رو سے

د۱ = ھ فَ (ا) + ½ ھ² فً (ا + طہ ھ) = ھ {فَ (ا) + ½ ھ فً (ا + طہ ھ)}

د۲ = - ھ فَ (ا) + ½ ھ² فً (ا - طہَ ھ) = ھ {- فَ (ا) + ½ ھ فً (ا - طہَ ھ)}

جب ھ کوئی بہت چھوٹا مثبت عدد ہو تو د۱ اور د۲ کی علامتیں (اگر فَ (ا) صفر نہ ہو) وہی ہونگی جو بالترتیب فَ (ا) اور - فَ (ا) کی ہیں (مقابلہ کرو دفعہ ۵۴، مسئلہ ا کے ساتھ)، اس لئے د۱ اور د۲ کی

علامت ایک ہی نہیں ہو سکتی تاوقتیکہ ف'' (ا) صفر نہ ہو۔

نیز اگر ف'' (ا) صفر نہ ہو تو ف'' (ا + طہ ھ) اور ف'' (ا ۔ طہ ھ) دونوں کی علامت وہی ہو گی جو ف'' (ا) کی ہے، اس لئے اگر ف' (ا) = ۰ تو د اور دٖ دونوں منفی ہوں گے جب ف'' (ا) منفی ہو لیکن مثبت ہوں گے اگر ف'' (ا) مثبت ہو۔ پس ہمیں اس طریقہ سے بھی وہی قاعدہ حاصل ہوتا ہے جو اوپر مذکور ہوا۔

ٹیلر کے مسئلہ (باب ہشتدہم) کی رو سے د اور دٖ کو ھ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ اسی سلک استدلال سے جو اوپر مذکور ہوا ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ اگر ف' (ا)، ف'' (ا)، .....، ف^ن-۱ (ا) سب معدوم ہو جائیں اور ف^ن (ا) معدوم نہ ہو تو ف (ا)، ف (لا) کی موڑ کی قیمت ہو گی بشرطیکہ ن (جو پہلے معدوم نہ ہونے والے مشتق کا رتبہ ہے) جفت صحیح عدد ہو اور موڑ کی قیمت نہیں ہو گی جبکہ ن طاق صحیح عدد ہو۔ اگر ف^ن (ا) منفی ہو تو موڑ پر کی قیمت اعظم ہو گی اور اگر ف^ن (ا) مثبت ہو تو موڑ پر کی قیمت اقل ہو گی۔ یہ ایک اچھی مشق ہو گی کہ ا کے نزدیک مشتقات کی علامتوں کا معائنہ کرنے سے اس نتیجہ کو حاصل کیا جائے۔ مثلاً ثابت کرو کہ اگر ف' (ا) اور ف'' (ا) صفر ہوں لیکن ف''' (ا) صفر نہ ہو تو لا کے ا میں سے بڑھنے سے ف'' (لا) علامت بدلتا ہے اور ف' (لا) علامت نہیں بدلتا، لیکن اگر ف''' (ا) صفر ہو اور ف'''' (ا) صفر نہ ہو تو لا کے بڑھتے بڑھتے ا میں سے گزرنے سے ف''' (لا) علامت بدلتا ہے، ف'' (لا) علامت نہیں بدلتا اور ف' (لا) علامت بدلتا ہے۔

۵۸۔ مثالیں

مشق ۱۔ تفاعل ۳ لا^۴ ۔ ۴ لا^۳ + ۱ کی موڑ کی قیمتیں معلوم کرو۔

تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، تب

ف' (لا) = ۱۲ لا^۳ ۔ ۱۲ لا^۲، ف'' (لا) = ۳۶ لا^۲ ۔ ۲۴ لا

اب فَ (لا) = ۱۲ لاَ (لا - ۱)، اس لئے یہ صفر ہوگا اگر لا = ۰ یا ۱

فً (۱) = ۳۶ - ۲۴ = ۱۲ (جو مثبت ہے)

چونکہ فً (۱) مثبت ہے، اسلئے ف (۱)، تفاعل ف (لا) کی اقل قیمت ہے۔

نیز فً (۰) = ۰، اس صورت میں صفر کے قریب فَ (لا) کی علامت پر غور کرو، فرض کرو کہ ھَ ایک چھوٹا مثبت عدد ہے، تب

فَ (-ھ) = ۱۲ (-ھ)^2 (-ھ-۱) = (+)(-) = -

فَ (+ھ) = ۱۲ (ھ)^2 (ھ-۱) = (+)(-) = -

یہاں ہر جزوِ ضربی کی صرف علامت لکھنا کافی ہوگا۔ اس لئے جب لا صفر سے کچھ کم یا کچھ زیادہ ہو تو فَ (لا) منفی ہوتا ہے یعنی ف (لا) گھٹتا ہے جبکہ لا، -ھ سے صفر تک بڑھتا ہے اور گھٹتا رہتا ہے جبکہ لا، صفر سے ھ تک بڑھتا ہے۔

اسلئے ف (۰)، ف (لا) کی موڑ کی قیمت نہیں ہے، ف (لا) کی ترسیم پہ لا = ۰ کے جواب میں نقطۂ انعطاف ہے۔

ہم دوسرے طریقے سے ثابت کر سکتے ہیں کہ ف (۰) موڑ کی قیمت نہیں ہے کیونکہ فً (۰) = -۲۴ یعنی پہلا مشتق جو صفر نہیں ہوتا جبکہ لا = ۰ وہ طاق رتبہ کا ہے۔

جب لا، -∞ سے ا تک بڑھتا ہے تو فَ (لا) منفی ہوتا ہے اور اس لئے ف (لا) کم ہونے والا تفاعل ہے، جب لا ایک سے +∞ تک بڑھتا ہے تو فَ (لا) مثبت ہوتا ہے اور اس لئے ف (لا) بڑھنے والا تفاعل ہے، اسلئے ف (۱)، ف (لا) کی صرف اقل قیمت ہی نہیں بلکہ لا کی کسی قیمت کے لئے ف (لا) کی قیمت اس سے کم نہیں ہو سکتی۔ ف (لا)، لا کی کسی قیمت کے لئے منفی نہیں ہے، طالب علم کو چاہیے کہ اس تفاعل کی ترسیم بنائے۔

مشق ۲ - وہ بڑے سے بڑے حجم کا قائم مستدیر اسطوانہ معلوم کرو جس کی

کل سطح 2π ا^2 ہو۔
قاعدہ کے نصف قطر کو لا سے اور ارتفاع کو ما سے تعبیر کرو، تب
حجم = π لا^2 ما اور سطح = 2π لا ما + 2π لا^2 = 2π ا^2
دوسری مساوات سے لا ما = ا^2 - لا^2، اس لئے حجم کو ف (لا) سے تعبیر کرنے سے

$$ف (لا) = \pi لا \times لا ما = \pi (ا^2 لا - لا^3)$$

اسلئے ف$'$ (لا) = π (ا^2 - ۳ لا^2)، ف$''$ (لا) = -۶ π لا کہ ف$'$ (لا) = ۰ اگر لا = $\pm \frac{ا}{\sqrt{3}}$
منفی علامت کو بے سود سمجھ کر ترک کر دیا جا سکتا ہے، اب ف$''$ ($\frac{ا}{\sqrt{3}}$) منفی ہے
اور اسلئے ف ($\frac{ا}{\sqrt{3}}$) اعظم ہے، لہذا بڑے سے بڑا حجم = $\frac{2\pi ا^3}{3\sqrt{3}}$
ارتفاع مساوات ما = $\frac{ا^2 - لا^2}{لا}$ سے حاصل ہوتا ہے، جب، لا = $\frac{ا}{\sqrt{3}}$ تو

ما = $\frac{2 ا}{\sqrt{3}}$، یعنی بڑے سے بڑے حجم والے اسطوانہ کا ارتفاع اس کے قاعدہ کے قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

طالب علم اس مثال میں بغور دیکھے کہ دی ہوئی شرط سے کس طرح π لا^2 ما کو ایک متغیر لا کے تفاعل کے طور پر بیان کر لیا گیا ہے۔

مشق ۳۔ اگر ر = ا جم^2 ط + ب جب^2 ط، تو ر کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو جہاں ا اور ب مثبت مستقل ہیں۔

اس قسم کی مثالیں مشتقوں کی مدد کے بغیر نہایت آسانی سے حل ہو سکتی ہیں

ر = $\frac{1}{2}$ ا (۱ + جم ۲ ط) + $\frac{1}{2}$ ب (۱ - جم ۲ ط) = $\frac{1}{2}$ (ا + ب) + $\frac{1}{2}$ (ا - ب) جم ۲ ط

اب صریحاً ر کی قیمت اعظم اور اقل اُسوقت ہوگی جبکہ $\frac{1}{2}$ (ا - ب) جم ۲ ط کی قیمت اعظم یا اقل ہو۔ اگر ا > ب تو $\frac{1}{2}$ (ا - ب) جم ۲ ط کی

اعظم قیمت $\frac{1}{2}$ (ا - ب) اور اقل قیمت - $\frac{1}{2}$ (ا - ب) ہوگی یعنی ر کی اعظم قیمت ا اور اقل قیمت ب ہے، اگر ا > ب تو اعظم قیمت ب اور اقل قیمت ا ہوگی کیونکہ اس صورت میں $\frac{1}{2}$ (ا - ب) جم ۲ طہ کی اعظم قیمت - $\frac{1}{2}$ (ا - ب) اور اقل قیمت $\frac{1}{2}$ (ا - ب) ہوگی۔

اسی طرح سے ہم لا² + ما² کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ لا اور ما مساوات ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱ سے مربوط ہوں۔ لا کی بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ رکھو، تب لا² + ما² ہو جاتا ہے ر²، جہاں

$$\text{ر}^2 (\text{ا جم}^2 \text{طہ} + ۲\ \text{ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{طہ}) = ۱$$

اب ر² اعظم ہوگا جبکہ $\frac{1}{\text{ر}^2}$ اقل ہو اور برعکس اس کے اور ر اور طہ کی مساوات سے ہم لکھ سکتے ہیں:-

$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \text{ا جم}^2 \text{طہ} + ۲\ \text{ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{طہ}$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب}) + \frac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})\ \text{جم}\ ۲\ \text{طہ} + \text{ھ جب}\ ۲\ \text{طہ}$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب}) + \text{س جم}\ (۲\ \text{طہ} - \text{طہَ})$$

جہاں س جم طہَ = $\frac{1}{2}$ (ا - ب) اور س جب طہَ = ھ اور $\text{س} = \pm \sqrt{\frac{(\text{ا} - \text{ب})^2}{۴} + \text{ھ}^2}$

$\frac{1}{\text{ر}^2}$ کی اعظم اور اقل قیمتیں حسب ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\text{ا} - \text{ب})^2 + ۴\ \text{ھ}^2}$$

ہندسی نقطہ نظر سے اس مثال کا مفہوم یہ ہے کہ اُس مخروطی کے نصف محور معلوم کیے جائیں جسکی مساوات ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱ ہے، طہ کی قیمتیں جس سے محور متعین ہوتے ہیں ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں

جم (۲ طہ - طہَ) = ± ۱، ۲ طہ = طہَ یا π + طہَ، طہ = $\frac{1}{2}$ طہَ یا $\frac{\pi}{2} + \frac{\text{طہَ}}{2}$

یعنی دونوں محور علی القوائم ہیں۔ طہ کی قیمتیں پورے طور پر دو مساواتوں

ر جم طہ = ½ (ا - ب) اور ر جب طہ = ھ ،

سے متعین ہو جاتی ہیں۔

اس قسم کے سوال کا مشتقوں کی مدد سے حل کرنا زیادہ دشوار اور دقت طلب ہے۔

مشق ۴۔ اگر ف (لا) = قو^(-الا) جب (ب لا + ج) جہاں ا اور ب مثبت ہیں تو ف (لا) کی موڑ کی قیمتیں معلوم کرو۔

فَ (لا) = - قو^(-الا) {ا جب (ب لا + ج) - ب جم (ب لا + ج)}

= - ر قو^(-الا) جب (ب لا + ج - طہ)

جہاں ر جم طہ = ا، ر جب طہ = ب، ر = + √(ا² + ب²)

فً (لا) = ر² قو^(-الا) جب (ب لا + ج - ۲ طہ)

چونکہ قو^(-الا)، لا کی کسی محدود قیمت کے لئے صفر نہیں ہے، اس لئے فَ (لا) = ۰ کی اصلیں جب (ب لا + ج - طہ) = ۰ کی اصلیں ہیں، اس لئے فً (لا) صفر ہوگا جبکہ

ب لا + ج - طہ = ن π (ن = ۰، ± ۱، ± ۲، ......)

ن کی کسی قیمت کے جواب میں لا کی قیمت کو لا_ن سے تعبیر کرنے سے

فً (لا_ن) = ر² قو^(-الا_ن) جب (ب لا_ن + ج - طہ - طہ)

= ر² قو^(-الا_ن) جب (ن π - طہ)

اب جب (ن π - طہ) = - جم ن π جب طہ اور جب طہ اور ر² قو^(-الا_ن) دونوں مثبت ہیں، اسلئے فً (لا_ن) کی علامت

وہی ہے جو $-$ جم ن π کی یعنی $(-1)^{ن+1}$ کی -

اس لئے ف (لا) اعظم ہوگا جبکہ ن = ۰، ۲، ۴، ......

لیکن اقل ہوگا جبکہ ن = ۱، ۳، ۵، ...... جبکہ ن کی قیمت صفر اور صرف مثبت قیمتوں کو بحث میں لیا جائے -

$$اب\ لا_ن = \frac{ن\,\pi - ج + طہ}{ب}،\quad لا_{ن+1} - لا_ن = \frac{\pi}{ب}$$

$$اور\ ف(لا_ن) = قو^{-ا\,لا_ن}\ جب(ب\,لا_ن + ج) = قو^{-ا\,لا_ن}\ جب(ن\,\pi + طہ)$$

جسکو شکل ذیل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$ف(لا_ن) = (-1)^ن\ قو^{-\frac{ا\,ن\,\pi}{ب}}\ قو^{\frac{ا\,ج - ا\,طہ}{ب}}\ جب\ طہ$$

پس لا کی وہ قیمتیں جن کے لئے ف (لا) مڑتا ہے ایک سلسلہ حسابیہ بناتی ہیں جن کا فرق مشترک $\frac{\pi}{ب}$ ہے اور لا کی وہ قیمتیں جن کے لئے ف (لا) اعظم (یا اقل) ہوتا ہے $\frac{2\pi}{ب}$ کے فرق پر واقع ہیں - اگر $قو^{-ا\,لا_ن}$ کو ف $(لا_ن)$ کا حیطۂ اہتزاز کہا جائے تو ف (لا) کی اعظم اور اقل قیمتوں کے حیطے ایک سلسلہ ہندسیہ بناتے ہیں جن کی مشترک نسبت $قو^{-\frac{2\pi\,ا}{ب}}$ ہے -

چونکہ عف $قو^{-ا\,لا} = -ا\,قو^{-ا\,لا}$ اس لئے $قو^{-ا\,لا}$ کا ڈھال ف (لا) کے ڈھال کے مساوی ہے لا کی اُن قیمتوں کے لئے جن کے لئے

$$-ا\,قو^{-ا\,لا} = -ر\,ا\,قو^{-ا\,لا}\ جب(ب\,لا + ج - طہ)$$

$$یعنی\ جن\ کے\ لئے\ جب(ب\,لا + ج - طہ) = \frac{1}{ر} = جب\left(\frac{\pi}{2} + طہ\right)$$

$$یعنی\ جنکے\ لئے\ ب\,لا + ج - طہ = 2م\,\pi + \frac{\pi}{2} + طہ\ \ یا\ \ (2م+1)\pi - \frac{\pi}{2} - طہ$$

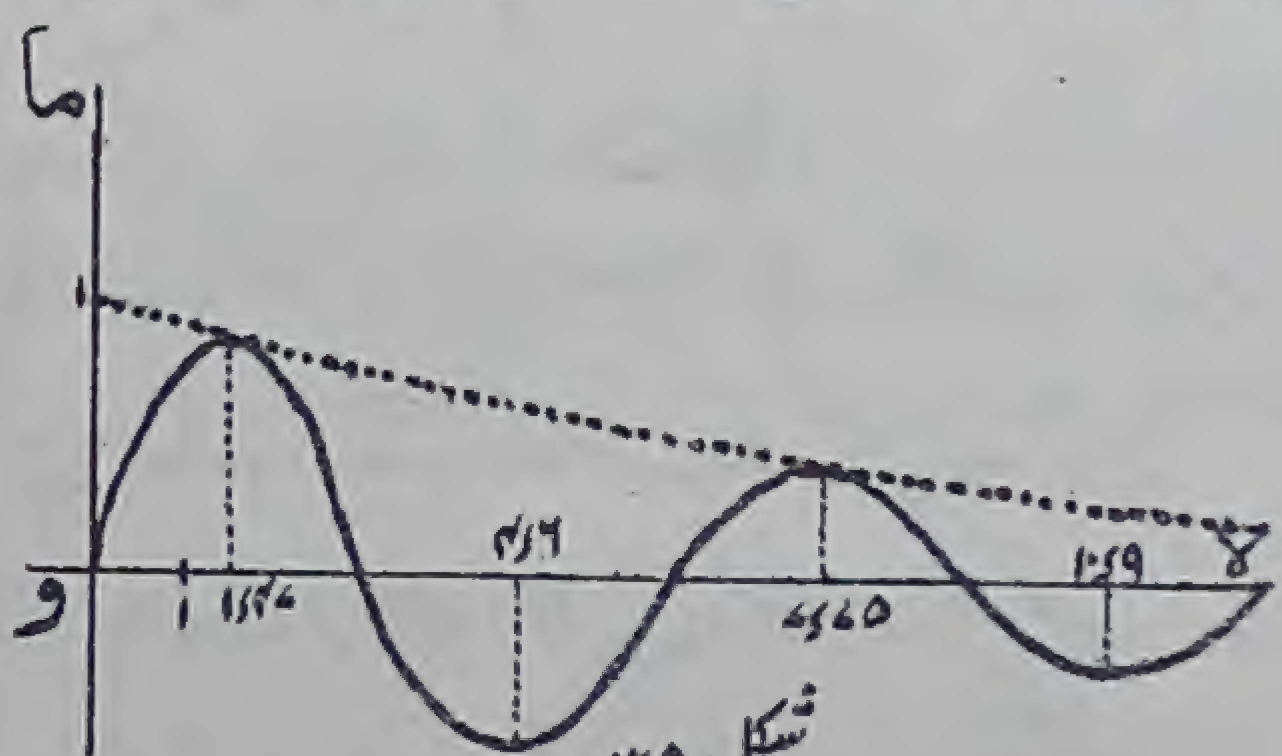
(م = ۰، ۱، ۲، ......)

اب جس وقت ب لا + ج - طہ = (۲م + ۱) π - $\frac{\pi}{۲}$ - طہ تو جب (ب لا + ج) = ۱،

اس لئے لا کی ان قیمتوں کے لئے قو$^{-الا}$ = ف (لا)

اس لئے جہاں ب لا + ج = ۲م π + $\frac{\pi}{۲}$ وہاں قو$^{-الا}$ اور ف (لا) دونوں کی وہی قیمت اور وہی ڈھال ہوتا ہے، اس لئے ان کی ترسیمیں اُن نقطوں پر جن کے فصلے لا کی اِن قیمتوں سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کو مس کرتی ہیں۔

قو$^{-الا}$ جم (ب لا + ج) کی بحث کو ج کی بجائے ج - $\frac{\pi}{۲}$ رکھنے سے قو$^{-الا}$ جب (ب لا + ج) کی بحث پر مبنی کر سکتے ہیں۔



شکل ۳۵

شکل ۳۵ میں ا = ۱، ب = ۱، ج = ۰ کے لئے ترسیم دکھائی گئی ہے نقطوں والا خط قو$^{-\frac{۱}{۱۰} لا}$ کی ترسیم ہے۔

۶۷ - **ابتدائی طریقے** - بعض قسم کے سوال ابتدائی جبر و مقابلہ اور علم مثلث کی مدد سے نہایت آسانی سے حل ہو جاتے ہیں۔

دو درجی تفاعل یا دو درجی تفاعلوں کے خارج قسمت کی بحث جبر و مقابلہ کی کسی کتاب میں مل سکتی ہے، ما کے موڑ کی قیمتیں جہاں

$$\text{ما} = \frac{\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + \text{ب}_1\,\text{لا} + \text{ج}_1}{\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ب}_2\,\text{لا} + \text{ج}_2}$$

اس مساوات کو شکل

$$(\text{ا}_2\,\text{ما} - \text{ا}_1)\,\text{لا}^2 + (\text{ب}_2\,\text{ما} - \text{ب}_1)\,\text{لا} + \text{ج}_2\,\text{ما} - \text{ج}_1 = ۰$$

میں لکھنے اور ما کی اُن قیمتوں کو معلوم کرنے سے جن کے لئے ممیز

$$(\text{ب}_2\,\text{ما} - \text{ب}_1)^2 - ۴\,(\text{ا}_2\,\text{ما} - \text{ا}_1)(\text{ج}_2\,\text{ما} - \text{ج}_1)$$

صفر ہو جاتے حاصل ہوتی ہیں۔ جب ما کی دو قیمتیں ہوں تو ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ان میں سے کونسی قیمت اعظم ہے اور کونسی اقل یا اگر ما کی ایک ہی قیمت ہو تو بھی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ قیمت اقل ہے یا اعظم۔

اب ہم زیادہ عام صورت پر غور کرتے ہیں جس میں ایک سے زیادہ متغیر شریک ہوتے ہیں جو ایک ربط کے ذریعہ مربوط ہیں اور جہاں تمام مقداریں مثبت ہیں۔ دو متغیروں کی صورت میں اقلیدس، مقالہ ۲ کا پانچواں، آٹھواں اور نواں مسئلہ ضروری ہیں، یہ مسئلے جبر و مقابلہ کی زبان میں اس طرح لکھے جا سکتے ہیں۔

$$(۱)\quad \text{لا}\,\text{ما} = \left(\frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲}\right)^2 - \left(\frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲}\right)^2$$

$$(۲)\quad (\text{لا} + \text{ما})^2 = ۴\,\text{لا}\,\text{ما} + (\text{لا} - \text{ما})^2$$

$$(۳)\quad \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \tfrac{1}{2}(\text{لا} + \text{ما})^2 + \tfrac{1}{2}(\text{لا} - \text{ما})^2$$

جب دو مقداروں کا حاصل جمع لا + ما دیا ہوا ہو تو ہم (۱) سے دیکھتے ہیں کہ ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ یہ مقادیر برابر ہوں اور (۳) سے دیکھتے ہیں کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ چھوٹے سے چھوٹا ہوتا ہے جبکہ یہ مقداریں برابر ہوں۔ جب دو مقداروں کا حاصل ضرب لا ما دیا ہوا ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ان کا مجموعہ چھوٹے سے چھوٹا ہوتا ہے جبکہ یہ مقداریں برابر ہوں۔ ان مسئلوں کو آسانی سے زیادہ وسیع بنایا جا سکتا ہے، مثلاً فرض کرو کہ لا، ما، ی، و، ..... تعداد میں ن مقادیر ہیں جن کا حاصل جمع ا دیا ہوا مستقل ہے، تب ان کا حاصل ضرب لا ما ی و ..... بڑے سے بڑا

اسوقت ہوگا جب یہ سب آپس میں مساوی ہوں۔ اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں، فرض کرو کہ ان متغیروں کی ہمزاد قیمتوں کا ایک جٹ $\text{لا}_{\text{۱}}$، $\text{ما}_{\text{۱}}$، $\text{ہی}_{\text{۱}}$، $\text{و}_{\text{۱}}$ ..... ہے۔ اب جب تک ان میں سے کوئی متغیر مثلاً $\text{لا}_{\text{۱}}$، $\text{ما}_{\text{۱}}$ غیر مساوی ہوں ہم ہمیشہ $\text{لا}_{\text{۱}}$ اور $\text{ما}_{\text{۱}}$ میں سے ہر ایک کی بجائے $\frac{\text{لا}_{\text{۱}}+\text{ما}_{\text{۱}}}{\text{۲}}$ لکھنے سے ان مقادیر کے حاصل جمع کو بدلے بغیر، حاصل ضرب $\text{لا}_{\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{۱}}\,\text{ہی}_{\text{۱}}\,\text{و}_{\text{۱}}$ ..... کی قیمت کو بڑھا سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ $\frac{\text{لا}_{\text{۱}}+\text{ما}_{\text{۱}}}{\text{۲}} \times \frac{\text{لا}_{\text{۱}}+\text{ما}_{\text{۱}}}{\text{۲}}$ یعنی $\frac{(\text{لا}_{\text{۱}}+\text{ما}_{\text{۱}})^{\text{۲}}}{\text{۴}}$ بڑا ہوتا ہے $\text{لا}_{\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{۱}}$ سے۔ پس جب تک ان ن مقادیر میں سے کوئی دو غیر مساوی مقادیر موجود ہیں اسوقت تک ان کے مجموعہ کو بدلے بغیر ان کے حاصل ضرب کو بڑھانے کا امکان موجود ہے جب بالآخر سب متغیر باہم مساوی ہو جائیں تو ہر ایک $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ کے مساوی ہوگا۔

پس $\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ہی}\,\text{و}$ ..... کم ہوتا ہے $\left(\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ سے

یعنی $\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ہی}\,\text{و}$ ..... کم ہوتا ہے $\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}+\text{ہی}+\text{و}\ldots\ldots}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ سے

تاوقتیکہ $\text{لا} = \text{ما} = \text{ہی} = \text{و} = \ldots\ldots = \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ نہ ہو

اگر ہم یہ فرض کریں کہ ان مقادیر میں سے ف مقادیر لا کے مساوی ہیں، ق مقادیر ما کے مساوی ہیں اور ر مقادیر ہی کے مساوی ہیں جہاں $\text{ف}+\text{ق}+\text{ر} = \text{ن}$ تو ہم اوپر کی لاتساوی کو اس شکل

$$\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}}\,\text{ہی}^{\text{ر}} < \left(\frac{\text{ف}\,\text{لا}+\text{ق}\,\text{ما}+\text{ر}\,\text{ہی}}{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}\right)^{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}$$

میں لکھ سکتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ $\text{لا} = \text{ما} = \text{ہی}$، موخرالذکر صورت میں لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ لاتساوی اس صورت میں بھی درست ہوگی جبکہ ف، ق، ر مثبت کسریں ہوں۔ اسی طرح سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ جب مقداروں کا حاصل جمع دیا ہوا ہو تو انکے

مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوگا جب یہ سب مقادیر باہم مساوی ہوں اور جب مقداروں کا حاصل ضرب دیا ہوا ہو تو اِن کا حاصل جمع چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جبکہ یہ مقداریں باہم مساوی ہوں۔

اِن مسئلوں کو اور بھی زیادہ وسعت دیجا سکتی ہے، مثلاً فرض کرو کہ لا، ما، ی، و، ...... خطی مساوات

ا لا + ب ما + ج ی + د و + ... = ک (ایک مستقل)

سے مربوط ہیں جہاں سب مقادیر مثبت ہیں، تب ہم حاصل ضرب لا ما ی و ... کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

لا ما ی و ...... = (ا لا)(ب ما)(ج ی)(د و)...... ÷ ا ب ج د ......

اب لا ما ی و ...... بڑے سے بڑا ہوگا جب اِس کسر کا شمار کنندہ بڑے سے بڑا ہو، لیکن اگر ہم ا لا کی بجائے لاَ، ب ما کی بجائے ماَ...... وغیرہ رکھیں تو گویا مسئلہ اِس شکل میں تحویل ہو جاتا ہے کہ حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہو جبکہ حاصل جمع لاَ + ماَ + یَ + وَ + ... مستقل رہے اِس لئے حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ لاَ، ماَ، یَ، وَ ...... سب مساوی ہوں یعنی جب

ا لا = ب ما = ... = ک ÷ ن

اِن مسئلوں کی مدد سے ایک سے زیادہ متغیروں والے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتوں کے متعلق بہت سے آسان آسان مسئلے فوراً حل ہو جاتے ہیں (اِس کی جبریہ بحث کے متعلق پوری پوری تفصیل کے لئے ملاحظہ ہو کرسٹل کا جبر و مقابلہ حصہ دوم، باب بست و چہارم)

مشق ۱۔ بڑے سے بڑے رقبہ کا مثلث جس کا محیط دیا ہوا ہو مساوی الاضلاع مثلث ہوتا ہے ہم جانتے ہیں کہ رقبہ مثلثوں کی ترقیم کے موافق

= √س (س - اَ)(س - بَ)(س - جَ) = √س لا ما ی

جہاں لا = س - اَ، ما = س - بَ، ی = س - جَ، ۲س مستقل ہے۔
اب لا + ما + ی = ۳س - (اَ + بَ + جَ) = س
اس لئے لا ما ی اور اس لئے س لا ما ی اور اسلئے رقبہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ لا = ما = ی یعنی جبکہ اَ = بَ = جَ

مشق ۲- مماثلہ $(\text{ا}^{2}\text{لا}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ما}^{2} + \text{ج}^{2}\text{ی}^{2})\left(\frac{\text{ل}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{م}^{2}}{\text{ب}^{2}} + \frac{\text{ن}^{2}}{\text{ج}^{2}}\right)$

$$= (\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی})^{2} + \left(\frac{\text{م ج ی}}{\text{ب}} - \frac{\text{ن ب ما}}{\text{ج}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ن ا لا}}{\text{ج}} - \frac{\text{ل ج ی}}{\text{ا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ل ب ما}}{\text{ا}} - \frac{\text{م ا لا}}{\text{ب}}\right)^{2}$$

سے حاصل کرو کہ

(۱) $\text{ا}^{2}\text{لا}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ما}^{2} + \text{ج}^{2}\text{ی}^{2}$ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر ل لا + م ما + ن ی = مستقل

(۲) ل لا + م ما + ن ی بڑے سے بڑا ہوگا اگر $\text{ا}^{2}\text{لا}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ما}^{2} + \text{ج}^{2}\text{ی}^{2}$ = مستقل

$$\text{جبکہ}\quad \frac{\text{ا}^{2}\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب}^{2}\text{ما}}{\text{م}} = \frac{\text{ج}^{2}\text{ی}}{\text{ن}}$$

یہ نتائج بالکل واضح ہیں، ا^{2}، ب^{2}، ج^{2} کی بجائے ہم بڑے حروف ا، ب، ج لکھ سکتے ہیں لیکن موخر الذکر لازمی طور پر مثبت ہوں گے۔ طالب علم اسی قسم کا مسئلہ

$$(\text{ا}^{2}\text{لا}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ما}^{2} + \text{ج}^{2}\text{ی}^{2} + \text{د}^{2}\text{و}^{2})\left(\frac{\text{ل}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{م}^{2}}{\text{ب}^{2}} + \frac{\text{ن}^{2}}{\text{ج}^{2}} + \frac{\text{ف}^{2}}{\text{د}^{2}}\right)$$

کے لئے ثابت کرے اور اس کو متغیروں کی کسی تعداد تک وسعت دے۔

۷۷- موثر کی قیمت کے قریب تفاعل کا تغیر

جب کوئی تفاعل ف(لا) اور اس کے پہلے دو مشتقات ا کے نزدیک مسلسل ہوں تو

$$\text{ف}(\text{ا} + \text{ھ}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{ھ}\,\text{فَ}(\text{ا}) + \tfrac{1}{2}\text{ھ}^{2}\,\text{فً}(\text{ا} + \text{ط ھ})$$

فً(ا + ط ھ) تقریباً فً(ا) کے مساوی ہوگا جبکہ ھ چھوٹا ہو، اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں کہ تقریبی طور پر

$$\text{ف}(\text{ا} + \text{ھ}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{ھ}\,\text{فَ}(\text{ا}) + \tfrac{1}{2}\text{ھ}^{2}\,\text{فً}(\text{ا})$$

لیکن جب، ف (ا) موڑ کی قیمت ہو تو فَ (ا) = ۰، لہٰذا

$$\text{ف (ا + ھ)} = \text{ف (ا)} + \frac{1}{2}\,\text{ھ}^2\,\text{فً (ا)}$$

پس جب ف (ا) موڑ کی قیمت ہو تو لا کے ا سے ا + ھ تک بدلنے سے تفاعل میں جو تبدیلی ف (ا + ھ) - ف (ا) ہوتی ہے وہ تقریباً ھ² کے متناسب ہے، اگر ف (ا) موڑ کی قیمت نہ ہو تو تبدیلی تقریباً ھ کے متناسب ہوتی ہے، لہٰذا موڑ کی قیمت کے نزدیک تفاعل زیادہ آہستہ بدلتا ہے بہ نسبت کسی اور قیمت کے نزدیک کیونکہ جب، ھ چھوٹا ہو تو ھ² بمقابلہ ھ کے بہت چھوٹا ہوتا ہے۔

پس اعظم اور اقل قیمتوں کے نظریہ کو طبیعی سوالات میں استعمال کرتے وقت اگر اس قسم کا انتظام یا ترتیب پیدا کرنا ممکن نہ ہو جو ٹھیک حل کے مطابق ہو تو اس نظری طور پر بہترین ترتیب سے اگر خفیف سا اختلاف کر لیا جائے تو اکثر اوقات چنداں ہرج واقع نہیں ہوگا مثلاً جب، م ن خانوں کی ایک بیٹری (مورچہ) ایسی ہو جس میں ن، ن خانوں کی م قطاریں ہوں اور خانوں کو سلسلہ وار ملا کر قطاروں کو متوازی طور پر ملحق کیا جائے تو برقی رو جہا ہوگی

$$\text{جہا} = \frac{\text{م ن ج}}{\text{م زا + ن ز}}$$

جہاں ج ہر ایک خانہ کی قوت محرکہ برق ہے، ز ہر ایک خانہ کی اندرونی مزاحمت ہے اور زا بیرونی مزاحمت ہے۔ چونکہ م ن مستقل ہے برقی رو جہا بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ جملہ م زا + ن ز چھوٹے سے چھوٹا ہو یعنی جبکہ م زا = ن ز یعنی جبکہ $\text{زا} = \frac{\text{ن ز}}{\text{م}}$ یعنی جبکہ کل بیرونی مزاحمت باٹری کی اندرونی مزاحمت کے مساوی ہو۔ ممکن ہے کہ باٹری کو اس طرح ترتیب نہ دیا جا سکے کہ یہ شرط ٹھیک ٹھیک پوری ہو لیکن اگر یہ شرط تقریباً پوری ہو تو رو اپنی اعظم قیمت سے بہت زیادہ کم نہ ہوگی، بہرحال ترتیب کو اس شرط کے پورا ہونے کے جسقدر قریب لایا جائیگا رو اتنی ہی زیادہ مقدار میں ہوگی۔

نیز جب اعظم اور اقل قیمتوں کے نظریہ کو طبیعیات میں استعمال کیا جائے تو نتائج

کے استنباط میں بہت احتیاط سے کام لینا چاہیئے۔ اگر ایک ترتیب، شرائط کے ایک جبٹ کو بہترین طریق پر پورا کرے، تو ممکن ہے کہ یہی ترتیب شرائط کے ایک اور جبٹ کو جو ویسا ہی ضروری ہو پورا کرنے کے منافی ہو۔ مثلاً خانوں کی تذکرہ بالا ترتیب سے حلقہ کے بیرونی حصہ میں مفید کام ہونے کی بہترین شرح حاصل کی جا سکتی ہے، لیکن یہ ترتیب اقتصادی نقطہ نظر سے بہترین نہیں، طالب علم کو چاہیئے کہ اس کے متعلق گرے کی کتاب "علم برق اور مقناطیس میں مطلق پیمائشیں" (مکملن، لنڈن) کے صفحات ۸۵ و ۸۶ اور باب نہم کا مطالعہ کرے۔ اعظم اور اقل قیمتوں کا نظریہ اس قسم کی جملہ تحقیقات میں نہایت کارآمد ہوتا ہے مگر اس کو استعمال کرنے میں احتیاط سے کام لینے کی ضرورت ہے۔

مشق ۱۶ (ا)

اِن مثالوں میں جن مخروطوں اور اسطوانوں کا ذکر کیا گیا ہے اُن سے مراد قائم مستدیر مخروط اور اسطوانے ہیں۔ مختلف قسم کے مجسمات کی ساخت کے لئے دیکھو باب چہارم۔

امثلہ ۱ تا ۱۲ میں تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتوں کی تحقیق کرو۔

۱- $۲\text{لا}^۳ - ۳\text{لا}^۲ - ۱۲\text{لا} + ۲$

۲- $\text{لا}^۵ - ۵\text{لا}^۴ + ۵\text{لا}^۳ - ۱$

۳- $\text{لا}^۴ (\text{لا} + ۱)^۳$

۴- $\text{لا} (\text{ا} + \text{لا})^۲ (\text{ا} - \text{لا})^۳$

۵- $\frac{\text{لا}}{۱ + \text{لا}^۲}$

۶- $\frac{(\text{ا} + \text{لا})^۲}{(\text{ا} - \text{لا})^۲}$

۷- $\frac{\text{لا}}{(\text{ا}\text{لا}^۲ + ۲\text{ب}\text{لا} + \text{ا})}$

۸- $\frac{\text{لا} (\text{لا}^۲ + ۱)}{\text{لا}^۴ - \text{لا}^۲ + ۱}$

۹- $(\text{ا} + \text{لا}) \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}$

۱۰- $\frac{\text{لا}}{(۱ + \text{لا}^۲)^{\frac{۵}{۲}}}$

۱۱- $\text{ا} + \text{ب} (\text{لا} - \text{ج})^{\frac{۲}{۳}}$

۱۲- $\text{ا} + \text{ب} (\text{لا} + \text{ج})^{\frac{۵}{۳}}$

۱۳- اگر لا + ما = ک (مستقل)، تو $\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}}$ کی اعظم قیمت معلوم کرو جہاں سب مقادیر مثبت ہیں، اس لئے ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{\text{م}}\,\text{ب}^{\text{ن}} < \left(\frac{\text{م ا} + \text{ن ب}}{\text{م} + \text{ن}}\right)^{\text{م}+\text{ن}}$$ سوائے اس صورت کے جبکہ ا = ب

۱۴- مشق بالا کی لاتساوی سے ثابت کرو کہ $\left(1+\frac{1}{\text{ی}}\right)^{\text{ی}}$ مسلسل بڑھتا ہے جبکہ ی مثبت ہوتا ہے اور مسلسل بڑھتا ہے، لیکن گھٹتا ہے جبکہ ی منفی ہوتا ہے اور تعداداً بڑھتا ہے۔

اس سے ثابت کرو کہ $\left(1+\frac{1}{\text{ی}}\right)^{\text{ی}}$ کی انتہا جبکہ ی $\to \pm\infty$ ایک محدود عدد ہے جو ۲٫۵ سے بڑا ہے اور ۳ سے کم ہے۔

[اشارہ۔ رکھو ا = $1+\frac{1}{\text{م}}$، ب = ۱، پھر ا = ۱، ب = $1-\frac{1}{\text{ن}}$]

۱۵- اگر $\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ما}} = \text{ج}$ تو ا لا + ب ما کی کم سے کم قیمت جو ہو سکتی ہے اسے معلوم کرو جہاں سب مقداریں مثبت ہیں۔ نیز لا ما کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو۔

۱۶- لا کی کس قیمت کے لئے

$$\text{م}_1(\text{لا}-\text{لا}_1)^2 + \text{م}_2(\text{لا}-\text{لا}_2)^2 + \cdots\cdots + \text{م}_{\text{ن}}(\text{لا}-\text{لا}_{\text{ن}})^2$$

کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی، م_1، م_2، ......$\text{م}_{\text{ن}}$ سب مثبت ہیں۔

ذیل کی مثالوں میں دفعہ ۶، ۷ کے طریقے استعمال ہو سکتے ہیں، سب مقداریں مثبت تصور کی جائیں۔

۱۷- دئے ہوئے رقبہ والے مثلثوں میں سے سب سے کم محیط والا مثلث متساوی الاضلاع ہوتا ہے۔

۱۸۔ دی ہوئی سطح کے لئے بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح مکعب ہے نیز دئے ہوئے حجم کے لئے کم سے کم سطح والا متوازی السطوح مکعب ہے۔

۱۹۔ ب ج لا + ج ا ما + ا ب ہی کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو اگر لا ما ہی = ا ب ج

۲۰۔ لا ما ہی کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جبکہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ہی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$$

اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ہی}^2}{\text{ج}^2}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو جبکہ

$$\text{لا ما ہی} = \text{د}^3$$

۲۱۔ اگر لا ما ہی = ا^2 (لا + ما + ہی) تو ما ہی + ہی لا + لا ما کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی جبکہ لا = ما = ہی = ا $\sqrt{۳}$

۲۲۔ تار کے ایک اسطوانی چکر یا لچھے کا برقی زمانی مستقل تقریباً

$$\text{ع} = \frac{\text{م لا ما ہی}}{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ہی}}$$

ہے جہاں لا اوسط نصف قطر ہے، ما اندرونی اور بیرونی نصف قطروں کا فرق ہے اور ہی محوری طول ہے اور م، ا، ب، ج معلومہ مستقل ہیں اور ن لا ما ہی لچھے کا حجم ہے۔

ثابت کرو کہ جب حجم ح دیا ہوا ہو تو ع کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ

$$\text{ا لا} = \text{ب ما} = \text{ج ہی} = \sqrt[3]{\text{ا ب ج}\,\frac{\text{ح}}{\text{ن}}}$$

۲۳۔ اگر $\text{ع} = \frac{\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2}{\sqrt{\text{ا}^2\text{لا}^2 + \text{ب}^2\text{ما}^2}}$ جہاں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۱$ تو ثابت کرو کہ

ع کی کم سے کم قیمت $۲\,\frac{\sqrt{\text{ا ب}}}{\text{ا} + \text{ب}}$ ہے۔

۲۴- اگر مثلث ا ب ج کے اندر ایک نقطہ ن ایسا ہو کہ ان² + ب ن² + ج ن² کی قیمت کم سے کم ہو تو ثابت کرو کہ نقطہ ن مرکز ہندسی ہے۔

۲۵- کسی مثلث میں جم ا جم ب جم ج کی بڑی سے بڑی قیمت ⅛ ہوتی ہے۔

۲۶- وہ بڑے سے بڑا مستطیل معلوم کرو جو ایک ناقص کے اندر بن سکتا ہے جس کے محور ا اور ب ہیں۔

مشق ۱۶ (ب)

۱- ا ب ج د ایک مستطیل ہے اور خط ا ن ق ضلع ب ج سے ن پر اور د ج ممدودہ سے ق پر ملتا ہے، ا ن ق کا محل معلوم کرو جبکہ رقبوں ا ب ن اور ن ج ق کا مجموعہ اقل ہو۔

۲- ایک متساوی الاضلاع منحرف کے متوازی اضلاع میں سے ایک ضلع (ا) اور دو غیر متوازی اضلاع میں سے ہر ایک (ب) دئے ہوئے ہیں۔ چوتھے ضلع کا طول معلوم کرو جبکہ منحرف کا رقبہ بڑے سے بڑا ہو۔

۳- ٹین کی ایک مستطیل چادر کے اضلاع ا اور ب ہیں، اس کے کونوں سے مساوی مربعے کاٹ دئے گئے ہیں اور اسکے اضلاع کو اوپر کی طرف موڑ کر ایک کھلے منہ والا صندوق بنایا گیا ہے۔ بتاؤ کہ مربع کا ضلع کیا ہو کہ صندوق کی گنجائش بڑی سے بڑی ہو۔

۴- ایک کھلا حوض بنانا مقصود ہے جس کا قاعدہ مربع ہو، پہلو عمودی ہوں اور اُس کے اندر پانی کی ایک خاص مقدار آسکے، ثابت کرو کہ تالاب کے اندر سیسہ منڈھوانے کی لاگت کم سے کم ہوگی جب کہ تالاب کی گہرائی اسکی چوڑائی کا نصف ہو۔

اگر حوض اسطوانہ کی شکل کا ہو تو ثابت کرو کہ گہرائی اسطوانہ کے نصف قطر کے مساوی ہوگی، اگر اسطوانہ کی تراش مستدیر نہ ہو لیکن اس کی شکل دی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ منحنی سطح قاعدہ سے دوچند ہوگی۔

۵۔ ایک کرہ کا نصف قطر س ہے، ثابت کرو کہ اِس کے اندر بڑے سے بڑے حجم کا جو مخروط بن سکتا ہے اُس کا ارتفاع $\frac{4}{3}$ س ہے۔
ثابت کرو کہ س کی اسی قیمت کے لئے مخروط کی منحنی سطح بڑی سے بڑی ہے۔
۶۔ س نصف قطر والے کرہ کے گرد ایک مخروط بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب مخروط کا حجم کم سے کم ہو تو اِس کا ارتفاع ۴ س اور اِس کا نصف راسی زاویہ $\text{جب}^{-1}\frac{1}{3}$ ہے۔
۷۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے حجم والے اسطوانہ کا ارتفاع جو س نصف قطر والے کرہ کے اندر بنایا جا سکے $\frac{2}{\sqrt{3}}$ س ہے۔
ثابت کرو کہ جب منحنی سطح بڑی سے بڑی ہو تو ارتفاع س $\sqrt{2}$ ہو گا۔ ثابت کرو کہ جب کل سطح بڑی سے بڑی ہو تو اِس سطح کو کرہ کی سطح کے ساتھ نسبت $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ہوگی۔
۸۔ ایک اسطوانہ ایک مخروط کے اندر بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اِس کا حجم بڑے سے بڑا ہو گا جبکہ اِس کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا ایک تہائی ہو۔
ثابت کرو کہ منحنی سطح بڑی سے بڑی ہو گی جب کہ ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا نصف ہو، نیز ثابت کرو کہ مجموعی سطح بڑی سے بڑی نہیں ہو سکتی تاوقتیکہ مخروط کا نصف راسی زاویہ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ سے کم نہ ہو۔
۹۔ ایک مخروط کی کل سطح دی ہوئی ہے، ثابت کرو کہ جب مخروط کا حجم بڑے سے بڑا ہو تو اِس کا نصف راسی زاویہ $\text{جب}^{-1}\frac{1}{3}$ ہو گا۔
اور اگر مخروط کا حجم معلوم ہو تو ثابت کرو کہ اسی نصف راسی زاویہ کے لئے کل سطح کم سے کم ہو گی۔

۱۰۔ ن نَ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{صا^2}{ب^2}=1$ کا دوہرا معین ہے اور ع اسکے محور اعظم کا ایک سرا ہے۔ بتاؤ کہ مثلث ع ن نَ کا رقبہ کب بڑے سے بڑا ہو گا۔
نیز یہ بھی معلوم کرو کہ اِس مثلث کو محور اعظم کے گرد گھمانے سے جو مخروط حاصل ہوتا ہے اُس کا حجم بڑے سے بڑا کب ہو گا۔

۱۱۔ ایک مستطیلی شہتیر کی مضبوطی ایسے بدلتی ہے جیسے اس کی گہرائی کے مربعے اور چوڑائی کا حاصل ضرب، اس مضبوط سے مضبوط مستطیلی شہتیر کی چوڑائی اور گہرائی معلوم کرو جو ایک اسطوانی کندہ میں سے کاٹ کر نکالا جا سکتا ہے جس کی جلیبی تراش کا قطر د انچ ہو۔

۱۲۔ ایک مستطیلی شہتیر کی سختگی ایسے بدلتی ہے جیسے اس کی گہرائی کے مکعب اور چوڑائی کا حاصل ضرب، اس سخت سے سخت مستطیلی شہتیر کی چوڑائی اور گہرائی معلوم کرو جو ایک اسطوانی لٹھ میں سے کاٹا جا سکتا ہے جس کی جلیبی تراش کا قطر د انچ ہے۔

۱۳۔ ایک شخص ایک کشتی میں سوار ہے جو ساحل کے قریب ترین نقطہ ق سے ا میل کے فاصلہ پر ہے، وہ شخص ساحل کے ایک نقطہ پر جو ق سے ب میل کے فاصلہ پر ہے تھوڑے سے تھوڑے وقت میں پہنچنا چاہتا ہے، اگر وہ ع میل فی گھنٹہ کی رفتار سے کشتی چلا سکے اور و میل فی گھنٹہ کی رفتار سے پیدل چل سکے (ع < و) تو بتاؤ کہ اُسے ق سے کتنے فاصلہ پر کشتی سے اترنا چاہیے، اُن صورتوں پر بحث کرو جن میں نسبت ع : و برابر ہو یا بڑی ہو نسبت ب : $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ سے۔

۱۴۔ یہ تسلیم کر کے کہ ایک چھوٹی سطح ا پر کی چمک بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے ماخذ نور سے فاصلہ ر کا مربع اور بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے ر اور سطح ا پر کے عماد کے درمیانی زاویہ کا جیب التمام، بتاؤ کہ ا نصف قطر والے دائرہ کے مرکز کے اوپر کس بلندی پر ایک برقی روشنی لگائی جائے کہ اس کے محیط پر روشنی یا چمک زیادہ سے زیادہ ہو۔

۱۵۔ اگر روشنی کے دو ماخذوں ش اور ن کے اشتداد بالترتیب $ا^3$ اور $ب^3$ ہوں تو خط ش ن پر کا وہ نقطہ معلوم کرو جس پر روشنی کم سے کم ہو۔

۱۶۔ ایک سطح مستوی س کی مقابل جانبوں میں دو نقطے ا اور ب ہیں اور سطح مستوی پر ایک نقطہ ن ہے، ایک ذرہ ا سے ب کی طرف براستہ ا ن، ن ب روانہ ہوتا ہے، اس کی رفتار ا ن پر ایک مستقل ع کے اور ن ب پر ایک مستقل و کے مساوی ہے جہاں ع اور و مختلف ہیں

ثابت کرو کہ جب ا سے ب تک پہنچنے کا وقت کم سے کم ہو تو مستوی ا ن ب سطح مستوی س پر عماد ہوگا اور ا ن اور ن ب سطح مستوی کے نقطہ ن پر عماد کے ساتھ جو زاوئے بنائینگے ان کی جیبوں کی نسبت ع : ی ہوگی۔

امثلہ ۱۶ (ج)

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{لا}{۱ + لا مس لا}$ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ لا = جم لا

اس کی تصدیق کرو کہ لا تقریباً ۹ ۳ ۷، کے مساوی ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ جب لا جب ۲ لا بڑے سے بڑا ہوگا اگر جب لا = $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ جبکہ لا پہلے ربع میں واقع ہو اور چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر لا ربع دوم میں واقع ہو۔

۳۔ ثابت کرو کہ جب لا (۱ + جم لا) بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ لا = $\frac{π}{۳}$

۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{ا^۲}{جب^۲ لا} + \frac{ب^۲}{جم^۲ لا}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت $(ا + ب)^۲$ ہے۔

۵۔ اگر ا قط طہ + ب قط فہ = ج تو ثابت کرو کہ ا جم طہ + ب جم فہ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جبکہ طہ = فہ جہاں ا، ب، ج مثبت مقداریں ہیں اور طہ اور فہ حادے ہیں۔

۶۔ دائرہ کی ایک قوس کا طول ا ہے، ثابت کرو کہ وہ قطعہ جس کی قوس ا ہو بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ا دائرہ کا قطر ہو۔

۷۔ ایک مستدیر قطاع کا محیط دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ جب رقبہ بڑے سے بڑا ہو تو قوس نصف قطر کا دو چند ہوتی ہے اور بڑے سے بڑا رقبہ نصف قطر کے مربع کے مساوی ہے۔

۸۔ دھات کی ایک دی ہوئی مستدیر چادر سے ایک ایسا قطاع دائرہ کاٹنا مقصود ہے

باقی حصہ سے بڑی سے بڑی گنجائش کا ایک مخروطی ظرف بن سکے۔ ثابت کرو کہ جو زاویہ نکالا جائیگا وہ ۲ (۱ − ⅓ √۶) π نیم قطریوں کے مساوی ہوگا یعنی ۶۶° ۴' کے۔

۹۔ ایک دئے ہوئے مثلث کے راس میں سے ایک ایسا خط کھینچو کہ راس میں سے گزرنے والے اضلاع کے جو ظل خط مذکور پر ہیں اُن کا مجموعہ بڑے سے بڑا ہو۔

۱۰۔ ایک کتاب کے ورق کی چوڑائی ا ہے، اس کے ایک نچلے کونہ کو اس طرح تہ کیا گیا ہے کہ کونہ صفحہ کے اندرونی کنارہ تک پہنچتا ہے۔ اگر شکن کا طول کم سے کم ہو تو جس حصہ کو تہ کیا گیا ہے اُس کا عرض معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک جہاز ایک دئے ہوئے مقام ا سے ایک دی ہوئی سمت اب میں عین اُس وقت روانہ ہوتا ہے جب کہ ایک کشتی ایک دئے ہوئے مقام ج سے روانہ ہوتی ہے۔ یہ فرض کرو کہ جہاز کی رفتار ع ہے اور کشتی کی رفتار و ہے (ع، و مستقل ہیں) بتاؤ کہ کشتی کو کس سمت میں روانہ ہونا چاہئے تاکہ یہ جہاز سے جا ملے، اس شرط پر بحث کرو کہ جہاز سے ملنا ممکن ہو، کشتی کا راستہ خط مستقیم ہے۔

۱۲۔ دو کروں کے نصف قطر ا اور ب ہیں اور اِن کے مرکزوں کا فاصلہ ج ہے بتاؤ کہ مرکزوں کے خط پر کے کس نقطہ ن پر بڑی سے بڑی کروی سطح دکھائی دیگی۔ (نوٹ۔ جب قطعہ کا ارتفاع ف ہو تو اس کا سطحی رقبہ ۲ π ا ف ہوتا ہے جہاں ا کرہ کا نصف قطر ہے) (ملاحظہ ہو دفعہ ۸۵ مثال ۲)۔

۱۳۔ ایک ثابت نقطہ (ا، ب) میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو محور و لا سے ن پر اور محور و ما سے ق پر ملتا ہے، محور قائم ہیں اور ا، ب مثبت ہیں اگر زاویہ و ن ق، ط کے مساوی ہو تو ط معلوم کرو۔

(۱) جبکہ ن ق (۲) جبکہ و ن + و ق (۳) جبکہ و ن × و ق کم سے کم ہو۔

۱۴۔ ایک ناقص ہے جسکے محور ۲ ا اور ۲ ب ہیں، اس کا ایک مماس کھینچا گیا ہے جس کا وہ حصہ جو محوروں کے درمیان منقطع ہوتا ہے کم سے کم ہے،

ثابت کرو کہ مماس کا طول ا + ب ہے۔

۱۵۔ اگر د = فہ - فہَ اور جب فہ = مہ جب فہَ جہاں مہ ایک سے بڑا ہے اور فہ اور فہَ $\frac{\pi}{2}$ سے بڑے نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ د بڑھتا ہے جیسے فہ بڑھتا ہے، نیز ثابت کرو کہ فہ کے لحاظ سے د کے دوسرے اور تیسرے مشتقات مثبت ہیں۔

۱۶۔ نور کی ایک شعاع کا راستہ بالتمام ایسی سطح مستوی میں واقع ہے جو ایک منشور کے ایک کنارہ پر عمودوار ہے منشور کے اس کنارہ پر دو سطحی زاویہ ز بنتا ہے، اگر زاویہ وقوع ق اور زاویہ خروج خ ہو تو ثابت کرو کہ انحراف ق + خ - ز کم سے کم ہوگا جبکہ ق = خ

۱۷۔ لا قو^-لا کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو اور تفاعل کی ترسیم بناؤ۔

۱۸۔ لا لوک لا کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو اور تفاعل کی ترسیم بناؤ۔

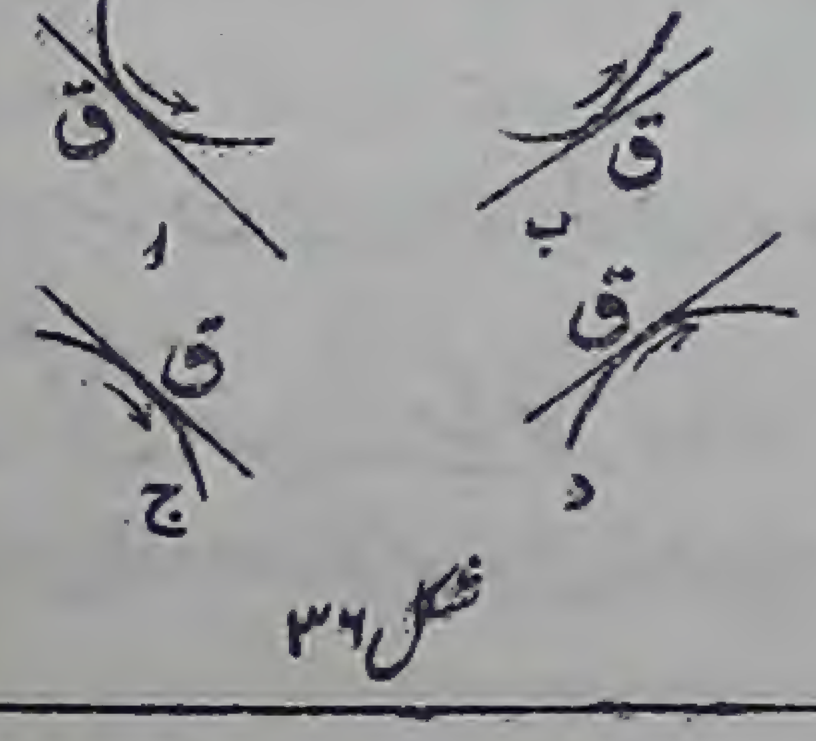
۱۹۔ لا کی کس قیمت کے لئے لوک لا کی نسبت لا کے ساتھ بڑی سے بڑی ہوگی۔

۲۰۔ لا^۲ لوک $\frac{1}{لا}$ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۲۱۔ اگر ا اور ب دونوں مثبت ہوں اور ا < ب تو قو^-الا - قو^-بلا کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۸۷۔ **تقعر و تحدب۔ نقاطِ انعطاف۔** کسی منحنی کو نقطہ ق پر یا اس کے نزدیک اوپر کی طرف مقعر اس وقت کہتے ہیں جبکہ ق کے نزدیک کے سب نقطوں کے لئے منحنی ق پر کے مماس کے اوپر واقع ہو (شکل ۳۶ ا، ب)

کسی منحنی کو نقطہ ق پر یا اس نزدیک اوپر کی طرف محدب اس وقت کہتے ہیں جبکہ ق کے نزدیک کے سب نقطوں کے لئے منحنی ق پر کے مماس سے نیچے واقع ہو (دیکھو شکل ۳۶، ج، د)



شکل ۳۶

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات ص = ف (لا) ہے، نیز فرض کرو ھ
ایک چھوٹا مثبت عدد ہے اور ق کا فصلہ ا ہے، اب جب لا ، ا - ھ
سے ا + ھ تک بڑھتا ہے تو پہلی دو صورتوں میں ڈھال مسلسل بڑھتا ہے یعنی
جب منحنی کا مماسی نقطہ دائیں طرف کو حرکت کرتا ہے (جو تیروں کی سمت سے تعبیر ہوتی
ہے) تو مماس نقطۂ تماس کے گرد سمت ساعت کے خلاف حرکت کرتا ہے اور اس لئے وہ
زاویہ جو مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے بتدریج بڑھتا ہے۔ لیکن اگر فَ (لا) کوئی
بڑھنے والا انفاعل ہو تو اس کا مشتق فً (لا) ہمیشہ مثبت ہوگا، اگر فً (ا)
صفر نہ ہو تو ق کے نزدیک فً (لا) کی علامت وہی ہوگی جو فً (ا)
کی ہے، اس لئے منحنی ق کے نزدیک اوپر کی طرف مقعر اس وقت ہوتا ہے
جبکہ فً (ا) مثبت ہو (صفر نہ ہو)

اسی طرح سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی ق کے نزدیک محدب اس وقت
ہوگا جبکہ فً (ا) منفی ہو (صفر نہ ہو)

نیز اگر ق نقطۂ انعطاف (دفعہ ۲۳) ہو تو یا یہ ہوتا ہے کہ ڈھال بڑھتا ہے جبکہ
لا ، ا - ھ سے ا تک بڑھتا ہے اور پھر گھٹتا ہے جبکہ لا ، ا سے ا + ھ
تک بڑھتا ہے (دیکھو شکل ۳۷، ا) یا یہ ہوتا ہے کہ ڈھال گھٹتا ہے جبکہ لا ، ا - ھ
سے ا تک بڑھتا ہے اور پھر بڑھتا ہے جبکہ لا ، ا سے ا + ھ تک بڑھتا ہے
(دیکھو شکل ۳۷، ب)



شکل ۳۷

اس لئے دونوں صورتوں میں لا کی قیمت ا کے لئے فَ (لا) مڑتا ہے۔ اس لئے ق انعطاف کا نقطہ صرف
اس صورت میں ہوگا جبکہ فَ (ا)، فَ (لا) کی موڑ کی قیمت ہو، لہذا
اگر فَ (لا) اور فً (لا) مسلسل ہوں تو ق کے نقطۂ انعطاف
ہونیکے لئے ضرور ہے کہ فً (ا) لازماً صفر ہو۔

برعکس اس کے اگر فً (ا) صفر ہو تو ق بالعموم نقطۂ انعطاف ہوگا،

لیکن مزید اطمینان کے لئے یہ تصدیق کر لینا چاہئے کہ ف (ا)، ف″ (لا) کے موڑ کی قیمت ہے

مشق ۱- ف (لا) = ۳ لا^۴ - ۴ لا^۳ + ۱

ف′ (لا) = ۱۲ (لا^۳ - لا^۲)، ف″ (لا) = ۱۲ (۳ لا^۲ - ۲ لا)

ف‴ (لا) = ۲۴ (۳ لا - ۱)

ف″ (لا) = ۰ اگر لا = ۰ یا ۲/۳، ف‴ (۰) = -۲۴، ف‴ (۲/۳) = ۲۴

اس لئے ف′ (۰)، ف′ (۲/۳) اعظم اور اقل قیمتیں ہیں ف′ (لا) کی،

اس لئے نقاط (۰، ۱) اور (۲/۳، ۱۱/۲۷) نقاطِ انعطاف ہیں اور ان نقطوں پر ڈھال بالترتیب صفر اور -۱۶/۹ ہیں۔

چونکہ ف″ (لا) = ۳۶ لا (لا - ۲/۳) اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = -∞ سے لا = ۰ تک ف″ (لا) مثبت ہے، اس لئے لا کی اس سمت کے لئے منحنی اوپر کی طرف مقعر ہے، لا = ۰ سے لا = ۲/۳ تک ف″ (لا) منفی ہے اور ترسیم اوپر کی طرف محدب ہے، لا = ۲/۳ سے لا = + ∞ تک ف″ (لا) مثبت ہے اور ترسیم پھر اوپر کی طرف مقعر ہے۔

مشق ۲- ف (لا) = ۳ لا^۴ - ۸ لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱

ف″ (لا) = ۱۲ (۳ لا^۲ - ۴ لا - ۱)

= ۳۶ (لا - (۲ - √۷)/۳) (لا - (۲ + √۷)/۳)

ف‴ (لا) = ۲۴ (۳ لا - ۲)

انعطاف کے نقطے وہ ہیں جن کے لئے لا = ۱/۳ (۲ ± √۷)

لا = - ∞ سے لا = ۱/۳ (۲ - √۷) تک اور پھر لا = ۱/۳ (۲ + √۷) سے لا = + ∞ تک منحنی اوپر کی طرف مقعر ہے، لا = ۱/۳ (۲ - √۷) سے لا = ۱/۳ (۲ + √۷) تک منحنی اوپر کی طرف محدب ہے۔

مشق ۳- (ما - ۲)^۳ = (لا - ۴)

ما = ۲ + (لا - ۴)^(۱/۳)، ما′ = ۱/۳ (لا - ۴)^(-۲/۳)

$$\text{ما}'' = -\frac{۲}{۹}\left(\text{لا} - ۴\right)^{-\frac{۵}{۳}}$$

جب، لا = ۴، ما = ۲ لیکن ماَ اور ماً دونوں لامتناہی ہیں، جب، ہے لا = ۴ - ھ تو ماً مثبت ہوتا ہے لیکن جب، لا = ۴ + ھ تو ماً منفی ہوتا اِس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ نقطہ (۴، ۲) پر کا مماس محور لا پر عمود وار ہے، نیز نقطہ (۴، ۲) کے بائیں طرف منحنی اوپر کی طرف مقعر ہے اور نقطہ (۴، ۲) کے دائیں طرف منحنی اوپر کی طرف محدب ہے، اِس لئے نقطہ (۴، ۲) کو انعطاف کا نقطہ تصور کرنا چاہئیے۔

امثلہ ۱۷

۱۔ ذیل کی ترسیموں کے نقاطِ انعطاف معلوم کرو۔ نیز بتاؤ کہ لا کی کن قیمتوں کے درمیان ترسیمیں اوپر کی طرف مقعر اور محدب ہیں۔

(۱) $\text{لا}^{۳}$ (۲) $\text{لا}^{۴}$ (۳) $\text{لا}^{۵}$ (۴) $\text{لا}^{۲\text{ن}+۱}$ (۵) $\text{لا}^{۲\text{ن}}$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ جس منحنی کی مساوات $\text{ما} = (\text{لا}^{۲} - ۱)^{۲}$ ہے اُس کے انعطاف کے نقطے معلوم کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

۳۔ ذیل کے تفاعلوں کے نقاطِ انعطاف معلوم کرو اور اِن کو مرتسم کرو۔

(۱) $\frac{۱}{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$ (۲) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$ (۳) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$ (۴) $\frac{\text{لا}^{۳}}{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$

۴۔ ثابت کرو کہ جس منحنی کی مساوات $\text{ما}(\text{لا}^{۲} + \text{ا}^{۲}) = \text{ا}^{۲}(\text{ا} - \text{لا})$ ہے اِس پر تین نقاط انعطاف ہیں جو ایک خط مستقیم میں واقع ہیں۔

۵۔ جس منحنی کی مساوات $\text{ا}^{۲}\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۲}(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})$ ہے اُس پر کے انعطاف کے نقطے معلوم کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ جس منحنی کی مساوات $(\text{ا} - \text{لا})\,\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$ ہے اُس پر کوئی نقطۂ انعطاف نہیں ہے، منحنی کو مرتسم کرو۔

۷۔ لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو ۰ اور ۲π کے درمیان واقع ہیں جہاں

صفر شامل ہے اور ۲ π شامل نہیں ہے ذیل کی ترسیموں پر کے نقاطِ انعطاف معلوم کرو

(۱) جب لا (۲) جم لا (۳) سس لا

۸۔ ثابت کرو کہ قو$^{\text{لا}}$ اور لوک لا کی ترسیموں پر کوئی انعطاف کا نقطہ نہیں ہے

۹۔ اِن تفاعلوں (۱) لا قو$^{-\text{لا}}$ (۲) قو$^{-\text{لا}^2}$ کی ترسیموں پر انعطاف کے نقطے معلوم کرو اور قو$^{-\text{لا}^2}$ کی ترسیم بناؤ۔

۱۰۔ قو$^{-\text{ا لا}}$ − قو$^{-\text{ب لا}}$ کی ترسیم پر انعطاف کا نقطہ معلوم کرو جہاں ا اور ب دونوں مثبت ہیں اور ا کم ہے ب سے۔

۱۱۔ قو$^{-\text{ا لا}}$ جب (ب لا + ج) کی ترسیم پر انعطاف کے نقطے معلوم کرو۔

۱۲۔ جب منحنی کی مساوات اس شکل

لا = ف (ت)، ما = فہ (ت)

کی شکل میں دی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ انعطاف کے نقطے مساوات

لاَ ماً − ماَ لاً = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

ثابت کرو کہ وہ منحنی جس کی مساواتیں

لا = ا (ت − جب ت)، ما = ا (۱ − جم ت)

ہیں ہمیشہ اوپر کی طرف محدب ہوتا ہے۔ (دیکھو دفعہ ۶۸ تشق ۲)

۱۳۔ ثابت کرو کہ کسی مخروطی تراش پر کوئی انعطاف کا نقطہ نہیں ہو سکتا۔

باب دہم

مشتق اور تکملی منحنیات

تکملی تفاعل

رقبہ کا اور گردشی سطح کے حجم کا مشتق

قطبی ضابطے صغارٹے

۷۹- مشتق منحنی - تفاعل ف (لا) کی تبدیلی کو مرتسم کرنے کے لئے یہ فائدہ سے خالی نہیں ہوتا کہ اِس کے مشتق تفاعل ف (لا) کی ترسیم بنائی جائے۔ ف (لا) کی ترسیم کو ہم ف (لا) کا مشتق منحنی یا مشتق ترسیم کہینگے، نیز ف (لا) کی ترسیم کے لحاظ سے ہم ف (لا) کی ترسیم کو ابتدائی منحنی کہینگے یا دفعہ ۸۳ کے دلائل کی بنا پر ہم ف (لا) کی ترسیم کو تکملی منحنی کہینگے۔

بالعموم اِس میں سہولت ہوتی ہے کہ دونوں منحنیوں کے لئے معینوں کا محور وہی لیا جائے لیکن مشتق منحنی کے لئے فصلوں کے محور کو ابتدائی منحنی کے فصلوں کے محور سے کافی فاصلہ پر نیچے لیا جائے، فصلوں کے لئے دونوں منحنیوں میں طول کی اکائی ایک ہی لیتے ہیں لیکن معینوں کے لئے دونوں منحنیوں میں طول کی اکائی حسب ضرورت و سہولت ایک ہی یا مختلف لے سکتے ہیں۔ اس طرح ہم دونوں منحنیوں پر کے ان نقطوں کو جن کے فصلے مساوی ہوں "متناظر نقطے" اور اِن نقطوں کے معینوں کو "متناظر معین" کہینگے۔ دونوں منحنیوں کے متناظر نقطوں کو

ہم خالی اور زبروں والے حروف سے تعبیر کرینگے۔

طالب علم آسانی سے ثابت کرسکتا ہے کہ ذیل کے مسئلے درست ہیں:۔

(۱) ابتدائی منحنی کے موڑ کے نقطوں (م) کے جواب میں مشتق منحنی پر نقطے مَ ایسے ہوتے ہیں جہاں مشتق منحنی نہ صرف فصلوں کے محور سے ملتا ہے بلکہ اس کو عبور کرتا ہے اور برعکس اس کے۔

(۲) ابتدائی منحنی پر کے انعطاف کے نقطوں ط کے جواب میں مشتق منحنی پر موڑ کے نقطے طَ ہوتے ہیں اور برعکس اس کے۔

جب تفاعل ف (لا)، فَ (لا) تحلیلی طور پر بیان نہ کئے گئے ہوں تو اس صورت میں مشتق منحنی کو مرتسم کرنے کے لئے حسب ذیل ہندسی عمل کار آمد ہو سکتا ہے۔

مشتق منحنی کے محور و لا پر وَ کے بائیں جانب ایک نقطہ ک لو (شکل ۳۹) اور ن پر کے مماس ن ت کے متوازی ک نَ کھینچو جو معینوں کے مشترک محور سے نَ پر ملے، ن ر اور ر ت بالترتیب محور و لا کے متوازی اور علی القوائم کھینچو، تب مثلث ن ر ت اور ک وَ نَ متشابہ ہوں گے اسلئے

$$\frac{\text{وَنَ}}{\text{کو}} = \frac{\text{رت}}{\text{نر}} = \text{فَ (لا)}$$

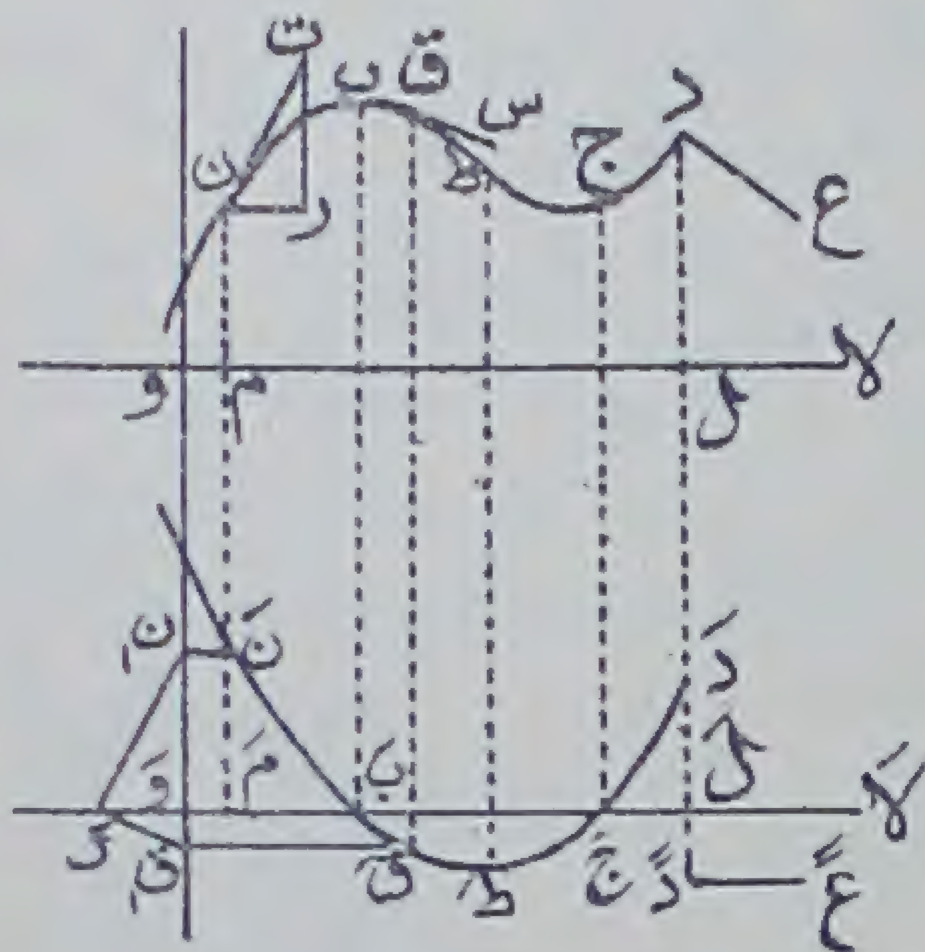
جہاں و م = وَ مَ = لا، م ن = ف (لا)، اس لئے

$$\text{وَنَ} = \text{فَ (لا)} \times \text{ک وَ}$$

ن نَ کو ک وَ لا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مَ نَ سے نَ پر ملتا ہے، تب

$$\text{مَ نَ} = \text{وَ نَ} = \text{فَ (لا)} \times \text{ک وَ}$$

اب اگر ہم مشتق منحنی کے معینوں کے اکائی طول کو ک وَ کے مساوی فرض کریں تو



شکل ۳۸

مَ نَ = فَ (لا)
پس نَ، ن کا متناظر نقطہ ہے۔
کوئی اور نقطہ ق لو، ک قَ کو مماس ق س کے متوازی کھینچو اور ق قَ کو وَ لا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ق میں سے گزرنے والے معیّن سے قَ پر ملتا ہے، تب قَ، ق کا جواب ہوگا۔

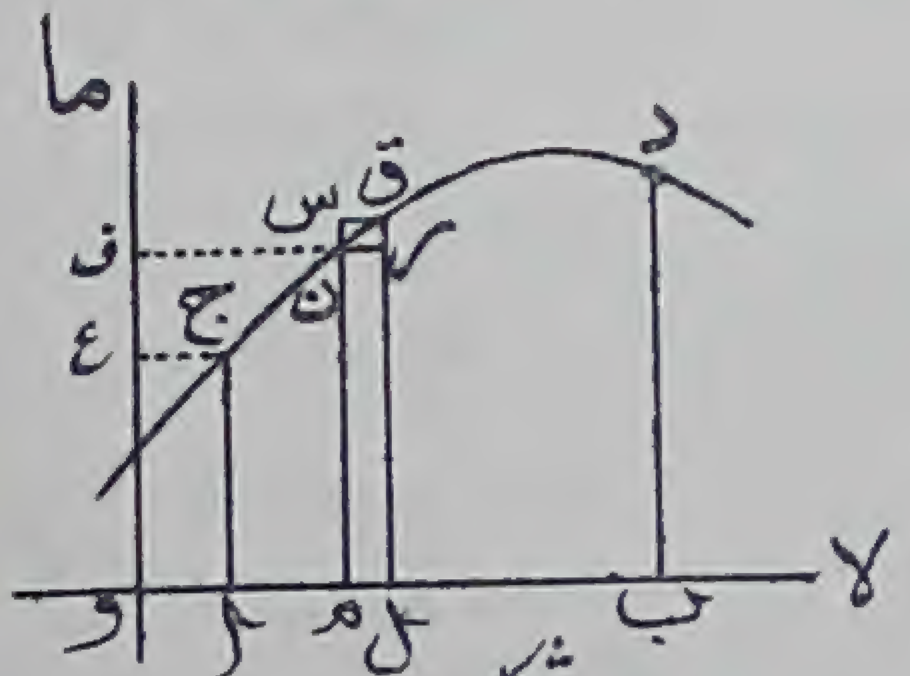
اسی طرح سے اور بہت سے نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔
اگر معینوں کے لئے اکائی طول ک وَ کے مساوی نہ لیا جائے تو بھی معیّن فَ (لا) کے متناسب ہونگے۔
موڑ کے نقطوں ب، ج کے جواب میں نقطے بَ، جَ ہیں، نقطۂ انعطاف ط کے جواب میں نقطہ طَ ہے جو مشتق منحنی کا موڑ کا نقطہ ہے۔
د پر مشتق تفاعل فَ (لا) غیر مسلسل ہے، جب ابتدائی منحنی پر کا نقطہ ج سے د تک حرکت کرتا ہے تو مشتق منحنی پر متناظر نقطہ جَ سے دَ تک حرکت کرتا ہے، جب اول الذکر نقطہ ج د سے د ع پر جاتا ہے تو متناظر نقطہ یک لخت دَ سے دً پر چلا جاتا ہے، جب، لا اپنی قیمت و ل یا وَ لَ سے آگے بڑھتا ہے تو فَ (لا) فوراً لَ دَ سے بدل کر لَ دً ہو جاتا ہے ل د، ف (لا) کی اعظم قیمت ہے لیکن فَ (لا) کے عدم تسلسل کی وجہ سے مشتق منحنی محور لا سے متناظر نقطہ پر نہیں ملتا جیسا کہ بَ اور جَ پر ملتا ہے۔
اسی طرح سے فَ (لا) کا مشتق منحنی یعنی فً (لا) کا دوسرا مشتق

منحنی بنایا جا سکتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

۸۰ - رقبہ کا مشتق - فرض کرو کہ ج ن د (شکل ۳۹) لا کے ایک مسلسل تفاعل فا (لا) کی ترسیم ہے۔

و ا = ۱، ا ج = فا (۱) و م = لا، م ن = فا (لا)

(۱) فرض کرو کہ معین مثبت ہیں اور ا ج، م ن کے بائیں جانب واقع ہے۔ فرض کرو ا ج ثابت ہے م ن متغیر ہے اور ی رقبہ ا م ن ج کا ناپ ہے، رقبہ کے متعلق ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ یہ ایک متغیر معین سے پیدا ہوتا ہے جو ا ج سے روانہ ہو کر دائیں طرف کو حرکت کرتا ہے، تب ی، لا کا ایک تفاعل ہے جو صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۱، فرض کرو کہ ہم لا کے لحاظ سے ی کا مشتق یعنی لا کے لحاظ سے رقبہ کی تبدیلی کی شرح معلوم کرتے ہیں۔



شکل ۳۹

فرض کرو کہ لا کی قیمت میں اضافہ مف لا یا م ل واقع ہوتا ہے، تب ی میں رقبہ مف ی یعنی م ل ق ن کا اضافہ ہوتا ہے۔

مستطیلوں م ل ر ن اور م ل ق س کی تکمیل کرو، تب رقبہ م ل ق ن رقبہ م ل ر ن سے بڑا ہوگا لیکن م ل ق س سے کم ہوگا، اس لئے

م ن × مف لا > مف ی > ل ق × مف لا، م ن > $\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}}$ > ل ق

شکل میں م ن کم ہے ل ق سے، اگر م ن بڑا ہو ل ق سے تو لا تساوی کی علامت کو الٹنا پڑے گا، جب، مف لا مائل بہ صفر ہو تو م ن ثابت

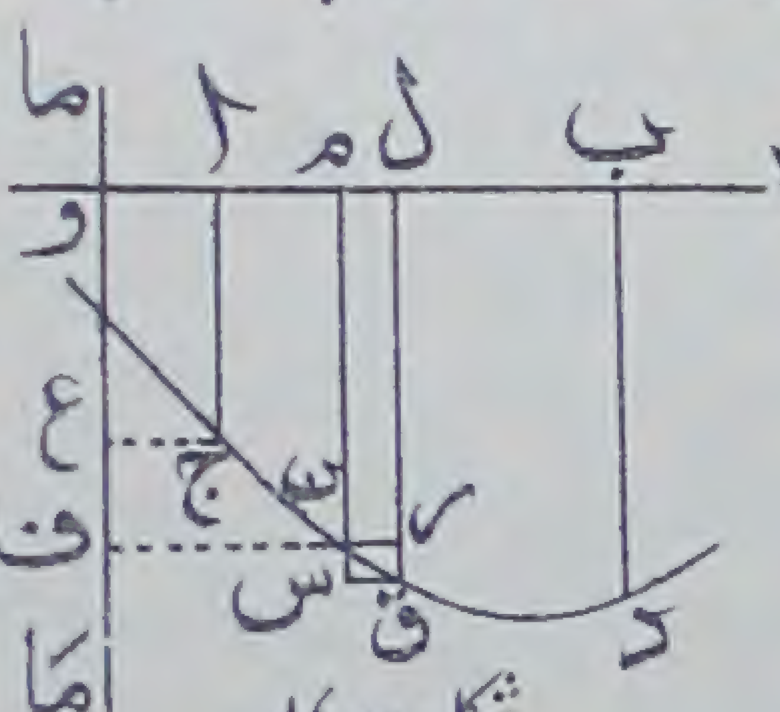
رہتا ہے اور ل ق مائل بہ م ن ہوتا ہے، اس لئے

عف ی = م ن = فا (لا) = م پر کا معیّن یا تفرقات
لا

کی ترقیم کے مطابق

فر ی = م ن × فر لا = فا (لا) فر لا

(۲) فرض کرو کہ معیّن منفی ہیں (دیکھو شکل ۳۹، ا) اور ی رقبہ کی عددی قیمت ہے اس صورت میں مستطیل م ل ر ن مساوی ہے ۔ م ن × مف لا کے کیونکہ م ن منفی ہے، حسب سابق دلائل سے



شکل ۳۹، ا

عف ی = ۔ م ن = ۔ فا (لا)
لا

اگر ہم رقبہ کو ایک ایسی مقدار تصور کریں جو خط مستقیم کے حصوں کی طرح مثبت اور منفی دونوں ہو سکے تو اس سے ہمارے ضابطوں میں زیادہ لچک پیدا ہو جاتی ہے ۔ اس لئے اگر رقبہ کے ناپ کو منفی تسلیم کیا جائے جبکہ ثابت معیّن متغیر معیّن کے بائیں جانب ہو اور سب معیّن منفی ہوں تو ہم ی کو ۔ ی کے مساوی لکھ سکتے ہیں جہاں ی سے اس صورت میں منفی مقدار تعبیر ہوتی ہے ۔ اسلئے

عف ی = فا (لا) جیسے کہ صورت اول میں ۔
لا

(۳) آخر میں فرض کرو کہ ثابت معیّن، م ن کے دائیں طرف مثلاً ب ک پر واقع ہے اب رقبہ ب م ن ک کو یوں تصور کیا جا سکتا ہے کہ یہ ایک متغیر معیّن سے پیدا ہوتا ہے جو ب ک سے روانہ ہو کر بائیں طرف کو حرکت کرتا ہے ۔

فرض کرو کہ ی، رقبہ ب م ن ک کی عددی قیمت ہے، تب ی، لا کا ایک گھٹنے والا تفاعل ہے، حسب سابق استدلال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ عف ی کی عددی قیمت شکل ۳۹ کے لئے فا (لا) ہے اور شکل
لا

(۳۹، ا) کے لئے۔ فا(لا)، چونکہ ی گھٹنے والا انفاعل ہے اس لئے عف لا ی جبریہ طور پر منفی ہے۔ اس لئے بلحاظ علامت اور مقدار کے

عف لا ی = ۔ فا(لا) (شکل ۳۹)

عف لا^ا ی = فا(لا) (شکل ۳۹، ا)

اگر ہم رقبہ ب م ن د کے ناپ ی کو شکل ۳۹ کے لئے منفی اور شکل (۳۹، ا) کے لئے مثبت تصور کریں تو دونوں صورتوں میں عف لا ی = فا(لا) اس لئے تینوں صورتوں (۱)، (۲)، (۳) کے لئے ایک ہی ضابطہ قائم رہتا ہے۔ مختلف شکلوں کا معائنہ کرنے سے رقبہ کی علامت معلوم کرنے کے لئے ذیل کے کلیہ کی تصدیق ہوگی۔

فرض کرو کہ رقبہ کے احاطہ کو اس ترتیب سے لیا گیا ہے، محور لا، متغیر معین منحنی، ثابت معین، تب رقبہ کی علامت مثبت ہوگی اگر رقبہ مذکور احاطہ کی ترسیم کے وقت بائیں طرف رہے اور منفی ہوگی اگر رقبہ مذکور دائیں طرف رہے

مشق ۱۔ اگر محددوں کے محور ایک دوسرے سے زاویہ سہ بنائیں تو ثابت کرو کہ عف لا ی = فا(لا) جب سہ

مشق ۲۔ اگر ج ع، ن ف (شکل ۳۹، ۳۹، ا) و ما پر عمود ہوں اور اگر رقبہ ع ف ن ج کا ناپ ص ہو تو ثابت کرو کہ

عف ما ص = ۔ ف ن = ۔ و م، فر ص = ۔ لا فر ما

جہاں ص کی علامت مثبت ہوگی اگر رقبہ کی حدود کو ع ف ن ج ع کی ترتیب میں لینے سے رقبہ بائیں طرف رہے اور منفی ہوگی اگر رقبہ دائیں طرف رہے۔

ان صورتوں پر غور کرو جن میں فصلہ منفی ہے اور نیز ان صورتوں پر غور کرو جن میں ثابت فصلہ ہر شکل میں ف ن کی مقابل جانب میں واقع ہے۔

۸۱۔ **رقبہ کی تعبیر۔** عدد ی، کی تعبیر جبکہ اسے رقبہ کا ناپ تصور کیا جائے طول کی ان اکائیوں پر موقوف ہوگی جن کو فصلوں اور معینوں کے لئے منتخب کیا جائے۔ اگر لا کی قیمت ۱، مثلاً ۶ انچ کو تعبیر کرے اور ما کی

قیمت ا، ۱۰ انچ کو تعبیر کرے تو یحا کی قیمت ا، ۶۰ مربع انچ کو تعبیر کرے گی۔
اگر ترسیم میں لا کی قیمت ا نصف انچ اور حا کی قیمت ا ایک چوتھائی انچ کے مساوی لی جائے اور یہ قیمتیں بالترتیب ۶ انچ اور ۱۰ انچ کو تعبیر کریں تو ترسیم میں ⅛ مربع انچ کا رقبہ ۶۰ مربع انچوں کو تعبیر کریگا۔
رقبہ کی طبیعی تعبیر اُن مقادیر کی نوعیت پر مبنی ہوگی جو فصلہ اور معیّن سے بالترتیب تعبیر ہوں۔
فرض کرو کہ معیّنوں سے ایک متحرک نقطہ کی رفتار تعبیر ہوتی ہے اور ان کے جوابی فصلے ہیں وہ ان اوقات کو تعبیر کرتے ہیں جن پر نقطہ مذکور یہ رفتار رکھتا ہے۔ ایسی ترسیم حرکت کا "رفتار منحنی" ہے۔ رفتار بلحاظ وقت کے فاصلہ کی تبدیلی کی شرح ہے اور معیّن (جو رفتار کو تعبیر کرتا ہے) بلحاظ فصلہ کے (جو وقت کو تعبیر کرتا ہے) رقبہ کی تبدیلی کی شرح ہے۔ اس لئے رقبہ ا م ن ج سے وہ فاصلہ تعبیر ہوتا ہے جو نقطہ مذکور نے ا م سے تعبیر ہونے والے وقت میں طے کیا۔ اگر لا کی قیمت ا، دو سکنڈوں کو تعبیر کرے اور حا کی قیمت ا، ۱۶ فٹ فی سکنڈ کی رفتار کو تعبیر کرے تو یحا کی قیمت ا، ۳۲ فٹ کے فاصلہ کو تعبیر کریگی۔
اگر معیّن ایک قوت کو تعبیر کرے جو ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہو اور اگر فصلہ اُس فاصلہ کو تعبیر کرے جس میں سے قوت نے حرکت کی ہو تو رقبہ ا م ن ج سے وہ کام تعبیر ہوگا جو کہ قوت فاصلہ ا م میں سے حرکت کرنے سے سرانجام دیتی ہے۔ اگر قوت سمت میں مستقل نہ ہو تو بھی نتیجہ قائم رہتا ہے بشرطیکہ معیّن، قوت کے اُس جزو ترکیبی کو تعبیر کرے جو قوت کے نقطہ عمل کے طریق کے مماس کی سمت میں ہو۔
مشق ۱۔ اگر معیّن اسراع کو تعبیر کرے اور فصلہ وقت کو تو بتاؤ کہ رقبہ سے کیا چیز تعبیر ہوتی ہے۔
مشق ۲۔ اگر معیّن سے کسی گیس کے دباؤ کا اشتداد اور فصلہ سے اُس کا حجم تعبیر ہو تو بتاؤ کہ رقبہ سے کیا چیز تعبیر ہوتی ہے۔

۸۲۔ تکملی تفاعل۔ دفعہ ۸۰ میں یحا، لا کا ایک ایسا تفاعل ہے کہ

فا (لا) جو منحنی ج ن د کا معیّن ہے اس کا مشتق ہے، اس سے ہمارے سامنے فوراً یہ مسئلہ پیش ہو جاتا ہے کہ وہ تفاعل کس طرح معلوم کیا جائے جس کا مشتق ایک دیا ہؤا مسلسل تفاعل ہو۔

اگر فا (لا) مشتق ہو ف (لا) کا تو ف (لا) + ج کا مشتق بھی فا (لا) ہوگا جہاں ج کوئی مستقل ہے، مزید براں (دفعہ ۵۸ مسئلہ ۶) ہر ایک تفاعل جس کا مشتق فا (لا) ہو ف (لا) + ج کی شکل کا ہوگا۔

اس لئے مسئلہ زیر بحث جس شکل میں اوپر بیان ہؤا غیر معیّن ہے کیونکہ اس کے حل میں ایک مستقل ج شامل ہے جس کی قیمت کچھ ہی ہو سکتی ہے۔ مگر یہ ایک معیّن شکل اختیار کر لیتا ہے جب اسے اس طرح بیان کیا جائے:۔

لا کا ایک ایسا تفاعل معلوم کرو جس کا مشتق ایک دیا ہؤا مسلسل تفاعل فا (لا) ہو اور جس کی قیمت لا کی ایک دی ہوئی قیمت ا کے جواب میں ا ہو۔

اس کا حل حسب ذیل ہے:۔ فرض کرو کہ ج ن د (دفعہ ۸۰) فا (لا) کی ترسیم ہے اور رقبہ ا م ن ج کا ناپ ہی ہے جہاں و ا = ا، پس ہی صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ا اور ہی کا مشتق فا (لا) ہے، مطلوبہ حل ہی + ا ہے، اگر ہم چاہیں تو مستقل ا کو رقبہ کا ناپ تصور کر سکتے ہیں۔

اس سے یہ نہیں سمجھنا چاہئے کہ ہم ہمیشہ ہی کے لئے معلومہ تفاعلوں کی رقوم میں ایک تحلیلی جملہ معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر فا (لا) = $\sqrt{(ا + لا^{۳})}$ تو ہم معمولی جبریہ یا ماورائی تفاعلوں کی رقوم میں کوئی ایسا تفاعل نہیں معلوم کر سکتے جس کا مشتق فا (لا) ہو، مگر ہندسی نقطۂ نظر سے دیکھنے سے ظاہر ہے کہ جس حد تک ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل ترسیموں سے مناسب طور پر تعبیر ہوتے ہیں وہاں تک ایک ایسا تفاعل بھی ضرور معلوم کر سکتے ہیں جس کا مشتق فا (لا) ہو اور تقربات کے طریقوں کی مدد سے تحلیلی جملہ معلوم کر لینا بھی ممکن ہے جو کہ سلسلہ کی شکل میں ہو سکتا ہے اور جسے ہم حل تصور کر سکتے ہیں۔ باحیلی طریقوں سے رقبہ ا م ن ج کی تقریبی قیمت معلوم کر لینا بھی ممکن ہے۔

کسی تفاعل ف (لا) کو جس کا مشتق فا (لا) ہو ہم فا (لا) کا تکملی تفاعل یا محض تکملہ یا تکملی کہینگے۔ اگر ایک ایسا تفاعل ف (لا) ہو تو ف (لا) + ج عام تکملی کہلائے گا اور ج کو ہم تکمل کا مستقل کہینگے۔

جب فا (لا) دیا ہوا ہو تو ف (لا) معلوم کرنے کے لئے ہم تفرق کے معلومہ نتائج سے کام لیتے ہیں۔ احصائے تکملات میں تکملی تفاعیل کی باضابطہ طور سے تلاش کی جاتی ہے لیکن زیر بحث مسئلہ کی ماہیت سے ظاہر ہے کہ طریقہ زیادہ حد تک آزمائشی اور امتحانی ہے۔ اس امر کی بنیادی جانچ کہ ف (لا) فا (لا) کا تکملی ہے یا نہیں یہ دیکھنے سے ہو سکتی ہے کہ عف$_{لا}$ ف (لا) فا (لا) کے مساوی ہے یا نہیں۔

جس طرح جب$^{-1}$ لا سے وہ تفاعل مراد ہوتا ہے جس کی جیب، لا ہو اسی طرح ہم یہ اختیار کرتے ہیں کہ رموز عف$^{-1}_{لا}$ فا (لا) یا عف$^{-1}$ فا (لا) سے وہ تفاعل مراد ہے جس کا مشتق فا (لا) ہو، بالفاظ دیگر

عف$^{-1}_{لا}$ فا (لا) تکملی ہے فا (لا) کا، ہم یہ مان لینگے کہ عف$^{-1}$ فا (لا) میں تکمل کا مستقل شامل نہیں ہے اور عام تکملی عف$^{-1}$ فا (لا) + ج ہے۔

اب ہم رقبہ ا م ت ج کو نئی ترقیم کے موافق بیان کر سکتے ہیں۔ چونکہ عف$^{-1}$ فا (لا) تکملی ہے فا (لا) کا، اس لئے رقبہ ی یعنی ا م ن ج ذیل کی شکل کا لا کا ایک تفاعل ہے

ی = عف$^{-1}$ فا (لا) + ج

جب، لا = ا تو ی = ۰۔ جب، لا = ا تو تکملی کی قیمت کو [عف$^{-1}$ فا (لا)]$_{ا}$ سے تعبیر کرو، اس لئے

۰ = [عف$^{-1}$ فا (لا)]$_{ا}$ + ج

ج = −[عف$^{-1}$ فا (لا)]$_{ا}$

اور ی = [عف$^{-۱}$ فا(لا)] - [عف$^{-۱}$ فا(لا)]$_{د}$

رقبہ ا ب ج د، ی کی اُس قیمت کے مساوی ہے جبکہ لا = ب

اسلئے رقبہ ا ب ج د = [عف$^{-۱}$ فا(لا)]$_{ب}$ - [عف$^{-۱}$ فا(لا)]$_{د}$

اس کو بغرض اختصار ذیل کی شکل میں لکھا جاتا ہے

[عف$^{-۱}$ فا(لا)]$^{ب}_{د}$

جس سے یہ مراد ہے کہ "عف$^{-۱}$ فا(لا) میں لا کی بجائے پہلے ب لکھو اور پھر ا لکھو اور موخر الذکر کو اول الذکر میں سے تفریق کرو"۔

اسی طرح اگر ایک تفاعل کا مشتق فا(لا) ہو اور جب لا = ا تو تفاعل ا کے مساوی ہو تو تفاعل کو اس طرح تعبیر کر سکتے ہیں

عف$^{-۱}$ فا(لا) - [عف$^{-۱}$ فا(لا)]$_{ا}$ + ا

مشق ۱۔ وہ رقبہ معلوم کرو جو لا^{۲} - ۳ لا + ۲، محور لا اور معیّنوں لا = $\frac{۱}{۲}$، لا = ۱ کے درمیان گھرا ہوا۔

فا(لا) = لا^{۲} - ۳ لا + ۲، تب عف$^{-۱}$ فا(لا) = $\frac{۱}{۳}$ لا^{۳} - $\frac{۳}{۲}$ لا^{۲} + ۲ لا

جسکی تصدیق تفرق کرنے سے ہو سکتی ہے۔

پس مطلوبہ رقبہ ہے

[$\frac{۱}{۳}$ لا^{۳} - $\frac{۳}{۲}$ لا^{۲} + ۲ لا]$^{۱}_{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۵}{۶}$ - $\frac{۲}{۳}$ = $\frac{۱}{۶}$

فرض کرو کہ معیّن وہ ہیں جن کے لئے لا = $\frac{۱}{۲}$، لا = ۲

تب رقبہ = [$\frac{۱}{۳}$ لا^{۳} - $\frac{۳}{۲}$ لا^{۲} + ۲ لا]$^{۲}_{\frac{۱}{۲}}$

= ۲/۳ − ۲/۳ = ۰

بادی النظر میں یہ نتیجہ بالکل عجیب معلوم ہوتا ہے، لیکن اس کی وجہ یہ ہے کہ لا = ۱/۲ سے لا = ۱ تک معین سب مثبت ہیں اور لا = ۱ سے لا = ۲ تک معین منفی ہیں، اس لئے لا = ۱ سے لا = ۲ تک رقبہ منفی ہے اور مقدار آ اس رقبہ کے مساوی ہے جن کے لئے معیّن مثبت ہیں۔

مشق ۲۔ وہ رقبہ معلوم کرو جو جب لا کی ترسیم، محور لا اور نقاط لا = ۰، لا = π کے درمیان بنتا ہے۔

[عف^π_۰ جب لا] = [− جم لا]^π_۰ = − جم π − (− جم ۰) = + ۱ + ۱ = ۲

مشق ۳۔ ایک نقطہ ایک خطِ مستقیم پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی رفتار وقت ت پر و جم ن ت فٹ فی سکنڈ ہے، ثابت کرو کہ وقت ت = ۰ سے لیکر محل سکون میں آنے تک جو فاصلہ طے ہوتا ہے وہ و/ن فٹ ہے۔

فرض کرو کہ ت سکنڈ میں لا فٹ فاصلہ طے ہوتا ہے، تب

عف لا = و جم ن ت، لا = و/ن جب ن ت + ج

جب، ت = ۰، تو لا = ۰ اور اس لئے ج = ۰، نقطہ پہلے پہل ساکن ہوتا ہے جبکہ ت صفر سے π/۲ن ہو جائے کیونکہ جم ن ت پہلے پہل صفر اُس وقت ہوتا ہے جبکہ ن ت = π/۲، اس لئے مطلوبہ فاصلہ ہے

و/ن جب π/۲ = و/ن

۸۳ - **تکملی منحنی**۔ تکملی تفاعل کی ترسیم کو تکملی منحنی کہتے ہیں، چونکہ فا(لا) کے تکملی تفاعل ایک دوسرے سے صرف بلحاظ رقم مطلق ج کے مختلف ہوتے ہیں، اس لئے تکملی تفاعل ف (لا) + ج کی ترسیم ف (لا) کی ترسیم سے موخر الذکر کو محور ما کے متوازی فاصلہ ج میں سے ہٹانے سے حاصل ہو سکتی ہے

تکملی منحنی کو مرتسم کرنیکا ہندسی عمل حسب ذیل ہے، یہ عمل مشتق منحنی مرتسم کرنیکے عمل پر مبنی ہے (دیکھو دفعہ ۷۹)

و لا (شکل ۴۰) کو چھوٹے، مساوی ٹکڑوں میں ۱، ۲، ۳، ...... پر تقسیم کرو اور ان نقطوں میں سے معیّن کھینچو، فرض کرو کہ ۲، ۴، ...... میں سے معیّن فا(لا) کی ترسیم سے نقاط ۲َ، ۴َ ...... پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ۲ً، ۴ً، ...... ان نقطوں کے ظل ہیں وما پر جہاں اً وہ نقطہ ہے جہاں ترسیم و ما کو قطع کرتی ہے۔

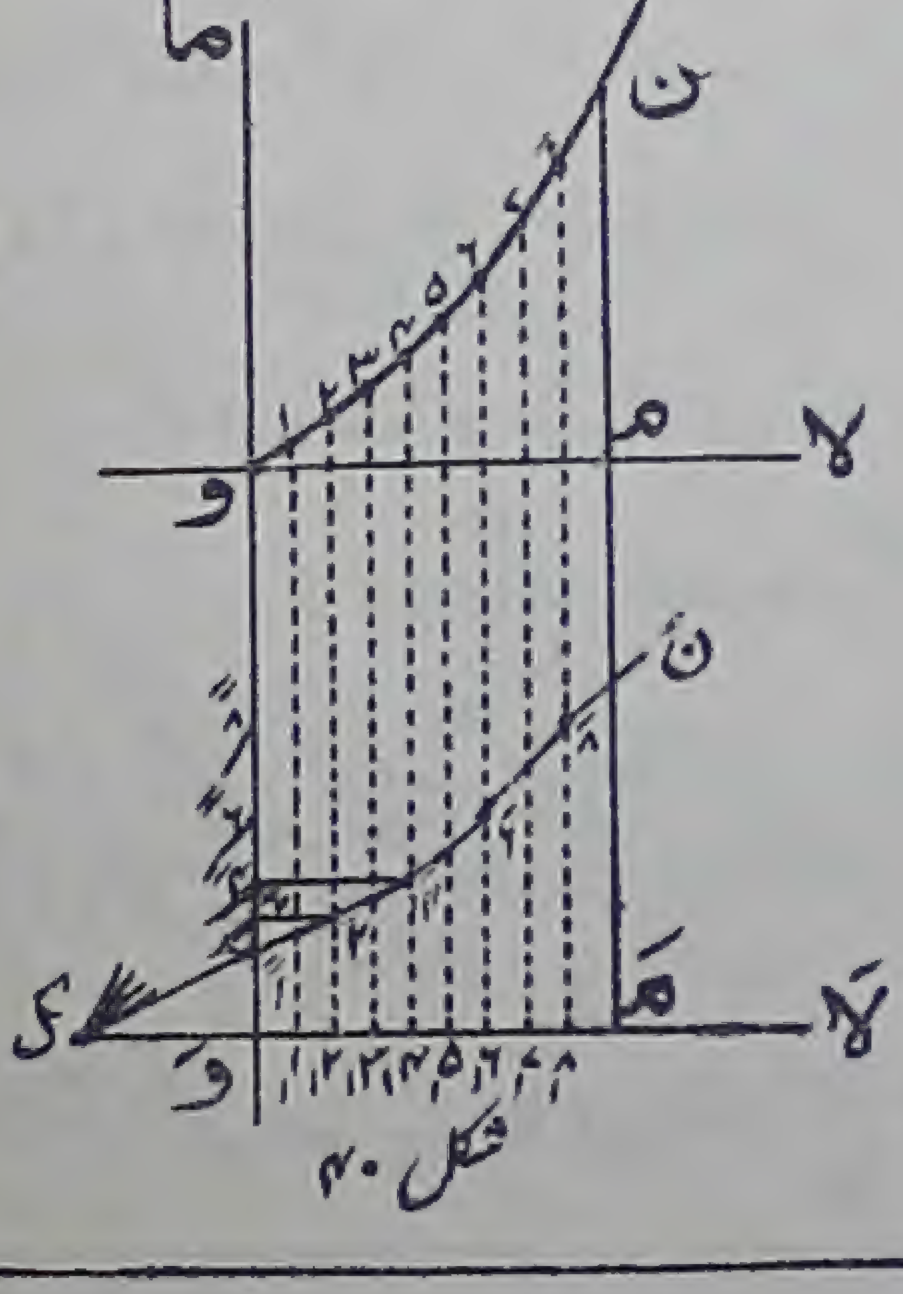
اب ہم اُس تکملی منحنی کو لیتے ہیں جو و میں سے گزرتا ہے، تب و پر کا مماس ک اً کے متوازی ہے، یہ مماس کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ۱ میں سے گزرنے والے معیّن سے ۱ پر ملتا ہے۔

تکملی منحنی پر ۲ کے متناظر جو نقطہ ہے اُس پر کا مماس متوازی ہے ک ۲ً کے، ۳۱ کو متوازی کھینچو ک ۲ً کے اور فرض کرو کہ یہ ۲، ۲َ سے ۲ پر اور ۳، سے جو معیّن کھینچا گیا ہے اُس سے ۳ پر ملتا ہے، نقطہ ۲ وہ نقطہ ہے جو نقطہ ۲َ کے متناظر ہے۔

اسی طرح ۵۳ متوازی کھینچو ک ۴ً کے جو معیّن ۴، ۴َ سے ۴ پر ملے، نقطہ ۴، ۴َ کے متناظر ہے۔

یہی عمل متعدد بار کرنے سے ہمیں خطوں کا ایک سلسلہ و۱، ۳۱، ۵۳، ...... ملتا ہے جن کو تقریباً تکملی منحنی کے نقاط و، ۲، ۴، ...... پر کے مماس تصور کیا جا سکتا ہے۔

اب یہ منحنی نقطوں ۰، ۲، ۴، ...... میں آزادانہ طور پر کھینچا جا سکتا ہے، نقطہ سے و جس سے تکمل شروع ہوتا ہے جہاں چاہیں



شکل ۴۰

لیا جاسکتا ہے، لیکن جب اسے ثابت کرلیا جائے تو تکملی منحنی متعیّن ہو جاتا ہے، باقی نقطوں ۳، ۴، ..... کا مقام تقریبی ہے۔ تقرب کی ماہیت اور عمل کی صحت کی تصدیق یوں ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا) تکملی تفاعل ہے۔ ف (لا) کی ترسیم کے اُن نقاط پر جنکے لئے لا بالترتیب ا اور ب کے مساوی ہے جو مماس کھینچ سکتے ہیں اُن کی مساواتیں ہیں

ما = (لا - ا) فَ (ا) + ف (ا)

ما = (لا - ب) فَ (ب) + ف (ب)

اِن مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا فصلہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

{فَ (ب) - فَ (ا)} لا = ب فَ (ب) - ا فَ (ا) - ف (ب) + ف (ا)

اب اوسط قیمت کے مسئلہ سے اگر ب = ا + ھ تو

ف (ب) = ف (ا + ھ) = ف (ا) + ھ فَ (ا) + ۱/۲ ھ۲ فً (لا۱)،

فَ (ب) = فَ (ا + ھ) = فَ (ا) + ھ فً (لا۲)

جہاں لا۱ اور لا۲ میں سے ہر ایک ا سے بڑا ہے لیکن ا + ھ سے چھوٹا ہے، اِن قیمتوں کو لا کی مساوات میں درج کرنے اور تحویل کرنے سے

لا = ا + ھ - ۱/۲ ھ (فً (لا۱) / فً (لا۲))

اگر مشتق مسلسل ہوں اور ھ چھوٹا ہو تو فً (لا۱) اور فً (لا۲) ایک دوسرے سے اور نیز فً (ا) سے بہت کم متفاوت ہوں گے۔ اِس لئے تقریباً لا = ا + ۱/۲ ھ یعنی مماسوں کے نقطہ تقاطع کا فصلہ ا اور ب کے درمیانی نقطہ کے فصلہ کے تقریباً مساوی ہوگا۔

اس لئے شکل میں نقطہ ۲ کے جواب میں تکملی منحنی پر جو نقطہ ہے اُس پر کا مماس امیں سے گزرتا ہے۔ اس لئے نقطہ ۲ جو معیّن ۲، ۲ پر واقع ہے امیں سے ک ۲ کے متوازی خط کھینچکر تقاطع لینے سے حاصل ہوتا ہے، اسی طرح سے دوسرے نقطے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر فا (لا) درجۂ اول اور اسلئے ف (لا) درجۂ دوم کا جملہ ہو تو عمل عین ٹھیک ہوتا ہے کیونکہ فَ (لا) مستقل ہے۔

۸۴۔ ترسیمی تکمل۔ شکل ۴۰ میں وَ لا، وَ ما، فا (لا) کی ترسیم اور مَ نَ معیّن کے درمیان جو رقبہ ہے وہ ف (لا) کے مساوی ہے جہاں ف (لا)، فا (لا) کا وہ تکملہ ہے جو صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰۔ لیکن تکملی منحنی کا معیّن مَ نَ، ف (لا) ہے، اس لئے رقبہ وَ مَ نَ اَ تکملی منحنی پر کے اُس نقطہ کے معیّن کے مساوی ہے جو مَ نَ کے جواب میں ہے۔ اور اس سے ہمیں ایک رقبہ کے ناپ معلوم کرنے اور نیز تکملی تفاعل بنانے کا ایک ترسیمی طریقہ حاصل ہوتا ہے خواہ تفاعل فا (لا) کی تحلیلی شکل نہ بھی دی گئی ہو۔

تکملی منحنی، مشتق منحنی کی نسبت بہت زیادہ صحت کے ساتھ کھینچا جا سکتا ہے، ایک دئے ہوئے منحنی کا تکملی منحنی بنانے کے لئے ایک آلہ بھی ہے جسے ہم تکملی مرسام کہینگے، تکملی مرسام کی مبسوط تشریح کے لئے طالب علم فرانسیسی و جرمن کتب دیکھیے (M. Abdank-Abakanowicz) کی تصنیف ذیل کا مطالعہ سود مند ہوگا

Les Integraphes; La Courbe integrale et ses applications

(Paris: Gauthier-Villars)

بٹڑے نے اس کتاب کا جرمن زبان میں بھی ترجمہ کیا ہے

Die Integraphen (Leipzig. Teubner)

اوپر کی بناوٹیں اس تصنیف سے اخذ کی گئی ہیں بٹڑے نے اس ترجمہ میں تکملی منحنی کے خواص کی تحقیقات پر کئی مفید نوٹ درج کئے ہیں، نیز اس میں مشہور محققین کے طبع زاد مضامین کے کئی حوالے ہیں۔

نیز (Sibley Journal of Engineering) میں پروفیسر ڈبلیو ایف، ڈورینڈ کا مضمون اس موضوع سے متعلق مفید مطلب ہوگا۔

۸۵۔ گردشی سطحیں۔ فرض کرو کہ ایک قوس ج ن محور وَ لا کے گرد گھومنے سے ایک مجسم بناتی ہے، فرض کرو کہ اس مجسم کا حجم ح ہے

(شکل ۱۴۱)، نیز و مہ = لا، مہ ن = فا (لا) = ما
عف لا ح کی قیمت معلوم کرنا مقصود ہے۔
جب، لا میں مہ ل یا مف لا کا اضافہ ہو تو حجم میں بمقدار
مہ ل ق ن یعنی مف ح کا اضافہ ہوتا ہے، ظاہر ہے کہ مف ح
زیادہ ہوگا اُس اسطوانہ کے حجم سے جس کا ارتفاع مہ ل ہے اور قاعدہ مہ ن
نصف قطر والے دائرہ کا رقبہ ہے، لیکن کم ہوگا اُس اسطوانہ کے حجم سے جسکا
ارتفاع مہ ل ہے اور قاعدہ ل ق نصف قطر والے دائرہ کا رقبہ ہے۔
اس لئے

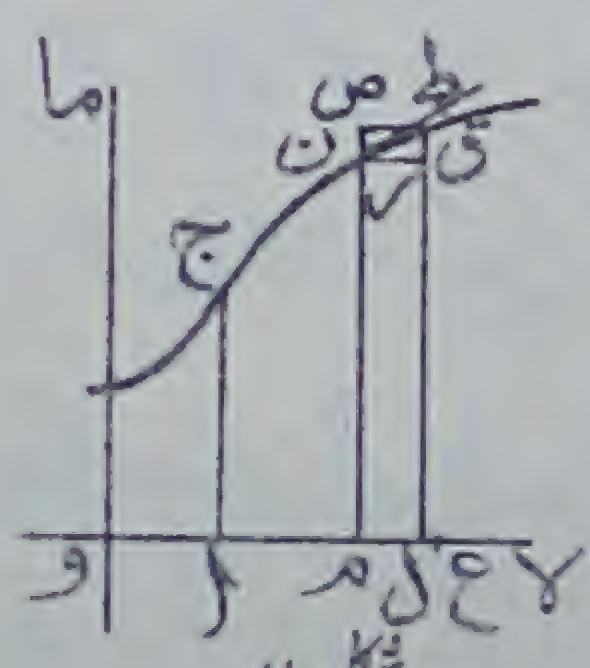
$$\pi \text{ مہ ن}^2 \times \text{مہ ل} < \text{مف ح} < \pi \text{ ل ق}^2 \times \text{مہ ل}$$

$$\pi \text{ مہ ن}^2 < \frac{\text{مف ح}}{\text{مف لا}} < \pi \text{ ل ق}^2$$

اس لئے مف لا کی انتہا صفر لینے سے

$$\text{عف}_{\text{لا}} \text{ح} = \pi \times \text{مہ ن}^2 = \pi \text{ ما}^2 \text{، ف ح} = \pi \text{ ما}^2 \text{ فرلا}$$

فرض کرو کہ ج ن اپنی گردش سے جو سطح مرتسم کرتا ہے اُس کا رقبہ س ہے
نیز فرض کرو کہ قوس ج ن کا طول س ہے۔ ہم عف لا س معلوم
کرنا چاہتے ہیں۔



شکل ۱۴۱

ن پر کے مماس پر ایک طول
ن ط قوس ن ق کے
مساوی لو اور فرض کرو کہ ط پر
کے معین کا پایہ ع ہے، جب
لا میں بقدر مہ ل یا
مف لا کا اضافہ ہو تو ج ن
میں قوس ن ق یا مف س
کا اضافہ ہوتا ہے، ہم یہ تسلیم کر سکتے ہیں کہ قوس ن ق سے جو رقبہ مرتسم ہوتا
ہے وہ مف لا کے چھوٹے ہونے کی صورت میں بڑا ہے اُس رقبہ سے جو وتر

ن ق کی گردش سے پیدا ہوتا ہے لیکن چھوٹا ہے اُس رقبہ سے جو مماس ن ط سے مرتسم ہوتا ہے، اگر قوس ن ق وتر ن ق سے نیچے ہو تو یہ لامساویات الٹ جائینگی۔

اب اُس مخروط ناقص کی منحنی سطح جس کے مستدیر سروں کے نصف قطر بالترتیب م ن اور ل ق ہیں اور منحنی سطح کا مائل وتر ن ق ہے
π (م ن + ل ق) ن ق ہے، ن ط سے جو سطح مرتسم ہوتی ہے اُس کا رقبہ حسبہٗ π (م ن + ع ط) ن ط ہے، اس لئے

π (م ن + ل ق) (ن ق / مف لا) < (مف اس / مف لا) < π (م ن + ع ط) (ن ط / مف لا)

جب، مف لا ← ۰ تو (ن ق / مف لا) اور (ن ط / مف لا) دونوں کی انتہا عفلا س ہے (دیکھو دفعہ ۶۲) اور م ن + ل ق اور م ن + ع ط کی انتہا ۲ م ن ہے

اس لئے عف لا س = ۲ π م ن عف لا س

= ۲ π ما عف لا س

یا ف س = ۲ π ما (ف س / ف لا) × ف لا = ۲ π ما ف س

حجم ح، π ما² کا وہ تکملی ہے جو صفر ہو جبکہ لا = و ا

اور سطح س، ۲ π ما (ف س / ف لا) کا وہ تکملی ہے جو صفر ہو جبکہ لا = و ا

دفعہ ۶۲ کی رو سے (ف س / ف لا) = √{۱ + (ف ما / ف لا)²}

مشق ۱- اگر منحنی و ما کے گرد گردش کرے تو ثابت کرو کہ

ف ح = π لا² ف ما، ف س = ۲ π لا (ف س / ف ما) × ف ما = ۲ π لا ف س

مشق ۲- ایک کروی ٹوپی کا ارتفاع ع ہے ثابت کرو کہ اس کا حجم

$\pi\,\text{ع}^2(\text{ر} - \frac{1}{3}\text{ع})$ ہے اور ٹوپی کی سطح کا رقبہ $2\pi\,\text{ر}\,\text{ع}$ ہے جہاں ر کرہ کا نصف قطر ہے۔

ج ن ق کی مساوات $\text{فا} = \sqrt{(\text{ر}^2 - \text{لا}^2)}$ ہے، اس لئے

$$\text{عف}\,\text{ح} = \pi(\text{ر}^2 - \text{لا}^2)\text{، اس لئے } \text{ح} = \pi(\text{لا}\,\text{ر}^2 - \frac{1}{3}\text{لا}^3) + \text{م (مستقل)}$$

$$\text{ح} = 0 \text{ جبکہ } \text{لا} = \text{و ا} = \text{ر} - \text{ع} \text{ اور اس لئے}$$

$$\text{م} = -\pi(\frac{2}{3}\text{ر}^3 - \text{ر}\,\text{ع}^2 + \frac{1}{3}\text{ع}^3)$$

$$\therefore \text{ح} = \pi(\text{لا}\,\text{ر}^2 - \frac{1}{3}\text{لا}^3) - \pi(\frac{2}{3}\text{ر}^3 - \text{ر}\,\text{ع}^2 + \frac{1}{3}\text{ع}^3)$$

مطلوبہ حجم، ح کی وہ قیمت ہے جس کے لئے لا = ر

$$\text{یعنی } \text{ح} = \pi\,\text{ع}^2(\text{ر} - \frac{1}{3}\text{ع})$$

$$\text{نیز } \frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر فا}}{\text{فر لا}}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2 - \text{لا}^2}\right)}$$

$$= \frac{\text{ر}}{\sqrt{\text{ر}^2 - \text{لا}^2}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}} = 2\pi\sqrt{\text{ر}^2 - \text{لا}^2} \times \frac{\text{ر}}{\sqrt{(\text{ر}^2 - \text{لا}^2)}} = 2\pi\,\text{ر}$$

$$\text{س} = 2\pi\,\text{ر}\,\text{لا} + \text{م (مستقل)؛ } 0 = 2\pi\,\text{ر}(\text{ر} - \text{ع}) + \text{م}$$

$$\text{اس لئے } \text{س} = 2\pi\,\text{ر}\{\text{لا} + \text{ع} - \text{ر}\}$$

$$\text{اور جب، } \text{لا} = \text{ر} \text{ تو } \text{س} = 2\pi\,\text{ر}\,\text{ع}$$

مشق ۳۔ و لا پر عموداً ایک سطح مستوی کھینچی گئی ہے جو ایک منحنی سطح کو قطع کرتی ہے، تراش کی سطح مستوی کا رقبہ لا کا ایک معلومہ تفاعل فا(لا) ہے اگر و لا پر عمود دار ایک ثابت سطح مستوی کھینچی جائے تو اس سطح مستوی اور اس سطح مستوی کے درمیان جس کی تراش سے رقبہ فا(لا) حاصل ہوتا ہے حجم ح حاصل ہو تو ثابت کرو کہ

عف لا ح = فا (لا)

۸۶۔ **صغارئے**۔ طالب علم نے دیکھ لیا ہوگا کہ اگر ابتدا میں ہی ایک جملہ کے ان حصوں کو ترک کر سکنا ممکن ہوتا جن کی انتہائیں صفر ہیں تو عمل میں بہت اختصار ہو سکتا تھا۔ مثلاً دفعہ ۸۰ میں مف ی مشتمل ہے مستطیل م ا ر ن ا اور منحنی الاضلاع مثلث ن ر ق پر جو کم ہے مستطیل ن ر ق س سے۔ اس لئے مف ی / مف لا ، م ن اور ایک اور خط کے جو ر ق سے کم ہے مجموعہ کے مساوی ہے چونکہ ر ق ، مف لا کے صفر ہو جانے سے صفر ہو جاتا ہے اس لئے جہاں تک انتہا کا تعلق ہے ہم ر ق کو ابتدا ہی میں ترک کر سکتے ہیں۔

جس سے ہمیں مف ی / مف لا کی انتہا م ن حاصل ہوتی ہے۔

اب جبکہ طالب علم کو بالعموم مشتق اور انتہائیں معلوم کرنے میں اس قدر مشق ہو گئی ہے وہ اس طریقہ کے استدراک کے بخوبی قابل ہوگا جس میں کسی ایسی مقدار کو جو انتہا میں صفر ہو جاتی ہے عمل کے دوران میں کسی منزل پر نظر انداز کر دیا جا سکتا ہے، اس طریقہ کو ہم صغاریوں کا طریقہ کہینگے۔

تعریف۔ ایک متغیر مقدار کو جس کی انتہا صفر ہو صغاریہ کہتے ہیں۔

صغاریہ اس تعریف کی رو سے کوئی مستقل خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو صغاریہ نہیں ہو سکتا کیونکہ صغاریہ کے لئے متغیر ہونا ضروری ہے۔

فرض کرو کہ ع۱، ب۱، ج۱ ..... صغارئے ہیں اور ب۱، ج۱ ..... ایسے ہیں کہ جب ع۱ مائل بہ صفر ہو تو ب۱، ج۱ ..... مائل بہ صفر ہوتے ہیں، اس صورت میں ب۱، ج۱ ..... وغیرہ ع۱ پر منحصر ہیں اور ہم ان کا ع۱ سے اور ایک دوسرے سے مقابلہ کر سکتے ہیں۔

جب ع۱ کو مقابلہ کا معیار مانا جائے تو ع۱ کو ہم صدری یا اصلی صغاریہ کہینگے۔

بہا کو اسی رتبہ کا صغاریہ جس رتبہ کا عہا ہے اُس وقت کہتے ہیں جبکہ

$$\text{نہا}_{\text{عہ}\to\cdot}\ \frac{\text{بہا}}{\text{عہا}} = \text{ک}$$

جہاں ک کوئی محدود عدد ہے اور صفر نہیں ہے۔ جب ک صفر ہو تو بہا کو عہا سے اعلیٰ رتبہ کا صغاریہ کہتے ہیں، جب ک لامتناہی ہو تو بہا، عہا سے نیچے کے رتبہ کا صغاریہ ہوتا ہے۔

جب، $\frac{\text{بہا}}{\text{عہا}}$ کی انتہا لامتناہی ہو تو بہا کو بعض اوقات عہا کے لحاظ سے لامتناہی کہتے ہیں۔

عملی طور پر ایک صغاریہ کو اصلی صغاریہ کے طور پر منتخب کر لیتے ہیں اور اس کے لحاظ سے باقی صغاریوں کو پہلے، دوسرے، تیسرے، .... رتبہ کے صغارئے کہتے ہیں جہاں اصلی صغاریہ یا بالتصریح نامزد کر دیا جاتا ہے یا مضمون عبارت سے یہ خود بخود کافی طور پر واضح ہوتا ہے۔

بہا کو عہا کے لحاظ سے ن ویں رتبہ کا صغاریہ اُس وقت کہتے ہیں (جہاں ن مثبت ہے اور لازمی طور پر صحیح عدد نہیں) جبکہ

$$\text{نہا}_{\text{عہ}\to\cdot}\ \frac{\text{بہا}}{\text{عہا}^{\text{ن}}} = \text{ک}$$

جہاں ک کوئی محدود عدد ہے اور صفر نہیں ہے۔

انتہا کی تعریف کی رُو سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{بہا}}{\text{عہا}^{\text{ن}}} = \text{ک} + \text{سہ} \quad \text{یا} \quad \text{بہا} = \text{ک}\ \text{عہا}^{\text{ن}} + \text{سہ}\ \text{عہا}^{\text{ن}}$$

جہاں سہ متغیر ہے جو عہا کے صفر ہونے سے صفر ہوتا ہے یعنی سہ صغاریہ ہے۔

فرق بہا - ک $\text{عہا}^{\text{ن}}$، $\text{عہا}^{\text{ن}}$ سے اوپر کے رتبہ کا صغاریہ ہے کیونکہ $\frac{\text{سہ}\ \text{عہا}^{\text{ن}}}{\text{عہا}^{\text{ن}}}$ یعنی سہ کی انتہا صفر ہے۔

ک عہ^ن کو بہ کا اصلی یا صدری حصہ کہتے ہیں، صریحاً صغاریہ کو اس کے اصلی حصہ کے ساتھ جو نسبت ہو اس کی انتہا ایک ہوتی ہے۔

اگر $$نہا_{عہ \to .} \; بہ \div عہ^{ن} = ک$$

جہاں ک محدود ہے (صفر نہیں ہے) تو بہ کو عہ کے لحاظ سے بعض اوقات ن ویں رتبہ کا لامتناہی کہتے ہیں جہاں ن مثبت ہے۔

اگر بہ اور جہ بالترتیب م ویں اور ن ویں رتبہ کے صغارے ہوں تو حاصل ضرب بہ جہ، (م + ن) ویں رتبہ کا صغاریہ ہوتا ہے اور خارج قسمت

$\frac{بہ}{جہ}$، (م - ن) ویں رتبہ کا صغاریہ ہوتا ہے اگر م > ن، لیکن (ن - م) ویں رتبہ کا لامتناہی ہوتا ہے اگر م < ن کیونکہ

$$بہ = (ک + سہ)\, عہ^{م}،\; جہ = (کَ + سَہ)\, عہ^{ن}$$

$$نہا_{عہ \to .} \left(\frac{بہ\, جہ}{عہ^{م+ن}} \right) = نہا_{عہ \to .} (ک + سہ)(کَ + سَہ) = ک\, کَ$$

اور اسی طرح سے خارج قسمت کا مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مشق ۱۔ جب عہ، ۱ - جم عہ، جب عہ (۱ - جم عہ) بالترتیب عہ کے لحاظ سے پہلے، دوسرے، تیسرے رتبہ کے صغارے ہیں، کیونکہ

$$نہا_{عہ \to .} \frac{جب\, عہ}{عہ} = ۱،\quad نہا_{عہ \to .} \frac{۱ - جم\, عہ}{عہ^{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

$$نہا_{عہ \to .} \frac{جب\, عہ\,(۱ - جم\, عہ)}{عہ^{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

اور ان کے اصلی حصے بالترتیب عہ، $\frac{۱}{۲}$ عہ^۲، $\frac{۱}{۲}$ عہ^۳ ہیں۔

مشق ۲۔ اگر $بہ = \sqrt{۹\, عہ - ۲\, عہ^{۲} + ۳\, عہ^{۳}}$ تو بہ کا رتبہ $\frac{۱}{۲}$ ہے

اوراس کا اصلی حصہ ۳ $\sqrt{\text{عا}}$ ہے، کیونکہ

$$\underset{\text{عا}\to 0}{\text{نہا}}\ \frac{\text{با}}{\text{عا}^{\frac{1}{2}}} = \underset{\text{عا}\to 0}{\text{نہا}}\ \sqrt{(9 - 2\,\text{عا} + 3\,\text{عا}^{2})} = 3$$

مشق ۳۔ مس عا ۔ جب عا تیسرے رتبہ کا صغاریہ ہے اور اس کا اصلی حصہ $\frac{1}{2}$ عا^{3} ہے، یہ فوراً مشق ا سے مستنبط ہو سکتا ہے۔

۸۷۔ اساسی مسئلے ۔ صغاریوں پر صراحت کے ساتھ بحث کرنے کی قدر وقیمت اس اصول پر مبنی ہے کہ جہاں تک جملہ کی انتہا کا تعلق ہے، صرف جملہ کے اصلی یا صدری حصہ کو ملحوظ رکھنا کافی ہے اور باقی رقمیں، چونکہ اصلی حصہ سے اونچے رتبہ کے صغارئے ہیں، اس لئے اِن رقموں کی اصلی حصہ کے ساتھ جو نسبت ہوگی اُس کی انتہا صفر ہوگی، اس لئے ان کو ابتدا ہی سے ترک کیا جا سکتا ہے۔

اگر ایک جملہ میں ایک محدود مستقل رقم ا شامل ہو اور اس کے ساتھ صغارئے عا، با، جا، ...... بھی شامل ہوں تو جہاں تک انتہا کا تعلق ہے ہم جملہ مذکور ا + عا + با + جا + ... کی بجائے صرف ا لکھ سکتے ہیں۔ ضروری بات یہ ہے کہ جملہ کا رتبہ معلوم کیا جائے، ایسا کرنے میں صغاریوں کے مقابلہ میں صرف اصلی حصہ کو قائم رکھنا کافی ہے اور محدود مقداروں کے مقابلہ میں کسی صغاریہ کو قائم رکھنے کی ضرورت نہیں، اگر ہمیں صغارئے با + جا + ... کا رتبہ معلوم کرنا ہو تو اس کا رتبہ وہی ہے جو اس کے اصلی حصہ کا ہے۔

تاہم اس اصول کے استعمال کرنے میں احتیاط سے کام لینا چاہئے، مثلاً ا ۔ جم عا + جب عا میں مستقل رقم ا شامل ہے۔ لیکن ا ۔ جم عا دوسرے رتبہ کا ہے اور جب عا پہلے رتبہ کا، اس لئے مکمل جملہ پہلے درجہ کا صغاریہ ہے، اور اس کا اصلی حصہ عا ہے۔

ذیل میں دو اساسی مسئلے درج کئے جاتے ہیں:۔

مسئلہ ا ۔ دو صغاریوں کے خارج قسمت کی انتہا نہیں بدلتی اگر ہر ایک صغاریہ کو ایک اور ایسے صغاریہ سے بدل دیا جائے جس کا اصلی حصہ وہی ہو جو دئے ہوئے

صغاریہ کا ہے۔

فرض کرو کہ ب۱ اور ج۱ دو صغارئے ہیں۔ اگر ان کے خارج قسمت کی انتہا محدود ہو (صفر نہ ہو) تو ہر ایک کا رتبہ لازمی طور پر وہی ہوگا، اس لئے اگر رتبہ ن ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں :-

ب۱ = ک ع۱ن + س۱ ع۱ن ، ج۱ = ک′ ع۱ن + س′۱ ع۱ن

فرض کرو کہ ب′۱ ، ج′۱ دو اور صغارئے ہیں جن کے اصلی حصے بالترتیب ب۱ اور ج۱ کے اصلی حصوں کے مساوی ہیں، تب

ب′۱ = ک ع۱ن + س۲ ع۱ن ، ج′۱ = ک′ ع۱ن + س′۲ ع۱ن

جہاں س۲ اور س′۲ ایسے صغارئے ہیں جو س۱ اور س′۱ سے مختلف ہیں۔

اب نہا (ع۱ → ۰) ب′۱ / ج′۱ = نہا (ع۱ → ۰) (ک + س۲) / (ک′ + س′۲) = ک / ک′ = نہا (ع۱ → ۰) ب۱ / ج۱

یہ استدلال صریحاً اُس صورت پر بھی صادق آئیگا اگر ب۱ ، ج۱ سے اونچے درجہ کا صغاریہ ہو کیونکہ ب۱ / ج۱ اور ب′۱ / ج′۱ دونوں کی انتہا صفر ہوگی۔ اگر ب۱ ، ج۱ سے چھوٹے رتبہ کا ہو تو بھی مسئلہ مذکور اس معنی کے لحاظ سے قائم رہیگا کہ ب۱ / ج۱ اور ب′۱ / ج′۱ دونوں کی انتہا لامتناہی ہوگی۔

مشق۔ نہا (لا → ۰) جب ا لا / مس ب لا = نہا (لا → ۰) ا لا / ب لا = ا / ب

تفرقی احصا میں کثرت سے استعمال ہونے کی وجہ سے اس مسئلہ کو احصائے تفرقات کا اساسی مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۲۔ ن صغاریوں کے حاصل جمع کی انتہا جبکہ ن لامتناہی ہو، نہیں بدلتی جبکہ ہر صغاریہ کو ایک ایسے صغاریہ سے بدل دیا جائے جس کا اصلی

حصہ وہی ہو، بشرطیکہ سب صغاریوں کی علامت ایک ہی ہو۔

یہ مسئلہ اُس صورت میں لازمی طور پر درست نہیں ہوتا اگر سب صغاریوں کی علامت ایک ہی نہ ہو۔

فرض کرو کہ $ع_ن = ب_1 + ب_2 + \ldots + ب_ن$ ، $و_ن = ج_1 + ج_2 + \ldots + ج_ن$

جہاں $ب_1$ کا اصلی حصہ وہی ہے جو $ج_1$ کا ہے اور $ب_2$ کا اصلی حصہ وہی ہے جو $ج_2$ کا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

اصلی صغاریہ جس کو قبل ازیں عہا سے تعبیر کیا گیا ہے یہاں $\frac{1}{ن}$ ہے، اس لئے ان خارج قسمتوں $\frac{ب_1}{ج_1}$ ، $\frac{ب_2}{ج_2}$ ، ...... میں سے ہر ایک کی انتہا عہا ← ۰ یا ن ← ∞ کے لئے ۱ ہوگی۔

اس میں $ب_1$ ، $ب_2$ ، $ب_3$ ، ...... کے اصلی حصے لازمی طور پر ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہیں۔

الجبرا کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ اگر $ب_1$ ، $ج_1$ ، ...... ، $ب_1$ ، $ج_1$ ، ...... سب کی علامت وہی ہو تو کسر $\frac{ع_ن}{و_ن}$ کی قیمت ان کسروں $\frac{ب_1}{ج_1}$ ، $\frac{ب_2}{ج_2}$ ، ...... میں سے بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی کسر کے درمیان واقع ہوتی ہے، اس لئے ن کی ہر ایک قیمت کے لئے کسر $\frac{ع_ن}{و_ن}$ دو ایسی کسروں کے درمیان واقع ہے جن میں سے ہر ایک کسر کی انتہا ۱ ہے، اس لئے

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \frac{ع_ن}{و_ن} = 1$$

لہٰذا اگر $و_ن$ کسی انتہا کی طرف مائل ہو تو $ع_ن$ بھی اُسی انتہا کی طرف مائل ہوگا۔

یعنی $\text{نہا}_{ن \to \infty} ع_ن = \text{نہا}_{ن \to \infty} و_ن$

مشق۔ فرض کرو کہ $ب_{ن ع} = \frac{ن}{(ن+ع)^۲}$ ، $ج_{ن ع} = \frac{ن}{(ن+ع)(ن+ع+۱)}$ ، تب $\frac{ب_{ن ع}}{ج_{ن ع}}$ کی انتہا ن ← ∞ کے لئے، ع کی سب صحیح عددی قیمتوں کے لئے ۱ ہوگی، لیکن

$$ج_{ن ع} = \frac{ن}{ن+ع} - \frac{ن}{ن+ع+۱}$$

$$\therefore و_ن = \left(\frac{ن}{ن+۱} - \frac{ن}{ن+۲}\right) + \left(\frac{ن}{ن+۲} - \frac{ن}{ن+۳}\right) + \dots + \left(\frac{ن}{ن+ن} - \frac{ن}{ن+ن+۱}\right)$$

$$= \frac{ن}{ن+۱} - \frac{ن}{۲ن+۱}$$

$$\therefore نہا ع_ن = نہا \left\{\frac{ن}{(ن+۱)^۲} + \frac{ن}{(ن+۲)^۲} + \dots + \frac{ن}{(ن+ن)^۲}\right\}$$

$$= نہا و_ن = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

یہ مسئلہ تکملی احصا میں کثرت سے استعمال ہوتا ہے، اس کو بعض اوقات احصائے تکملات کا اساسی مسئلہ کہتے ہیں۔

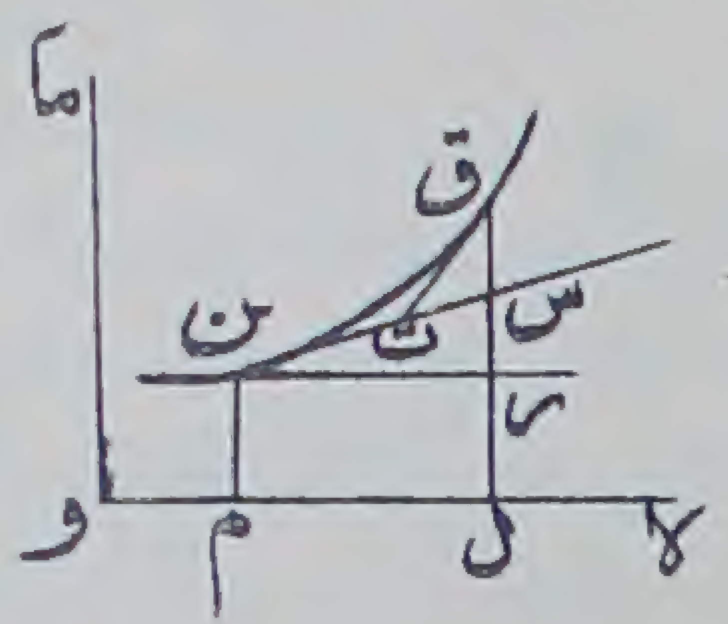
مشق ۱۔ جب فرلا اصلی یا صدری صغاریہ ہو تو (دفعہ ۶۰) مف ف (لا) کا اصلی حصہ فر ف (لا) = ف̄ (لا) فرلا ہے اور مف ف̄ (لا) کا اصلی حصہ فر ف̄ (لا) = ف̄̄ (لا) فرلا ہے، اگر ف̄ (لا) ≠ مس فد تو مف مس فد کا اصلی حصہ فر مس فد = ف̄̄ (لا) فرلا ہے۔

مشق ۲۔ فرض کرو ن ق ترسیم ہے ف (لا) کی اور ن ت اور ق ت بالترتیب ن اور ق پر کے مماس ہیں، اور و م = د

م ل = ن ر = ھ، د ر ن س = فد

د س ت ق = مف فد، د ث ن ق = عد، د ت ق ن = بد

فرض کرو کہ ھ یا ن ر اصلی یا صدری صغاریہ ہے، ر س، ن س، ن ق رتبہ اول کے صغارئے ہیں۔
فرض کرو کہ فً (لا)، لا = ا، لا = ا + ھ تک محدود ہے (اور صفر نہیں)، تب دفعہ ۲، مسئلہ ۳ کی رو سے



شکل ۴۲

س ق = ½ ھ² فً (لا₁)، نہا ھ←. (س ق / ھ²) = ½ فً (ا)

اس لئے س ق رتبہ دوم کا صغاریہ ہے۔

مف فا درجہ اول کا صغاریہ ہے اور اس کا اصلی حصہ ھ جم² فا فً (ا) ہے، کیونکہ ف س فا مساوی ہے قط² فا ف فا کے اور نیز (اشتق اکی رو سے) مساوی ہے ھ فً (ا) کے، اسلئے ف فا = ھ جم² فا فً (ا)۔

نیز عا اور با رتبہ اول کے صغارئے ہیں، کیونکہ جب ن س ر = جم فا اور

جب عا / ھ = (جب عا / جب ن س ر) × (جب ن س ر / ھ) = (س ق / ن ق) × (جم فا / ھ)

نہا (جب عا / ھ) = ½ . جم² فا فً (ا)

اس لئے جب عا اور بنابریں عا رتبہ اول کے صغارئے ہیں، عا کا اصلی حصہ ½ ھ جم² فا فً (ا) ہے یعنی مف فا کے اصلی حصہ کے نصف کے مساوی ہے، اب چونکہ با = مف فا − عا، اس لئے اس کا اصلی حصہ عا کے اصلی حصہ کے مساوی ہے یعنی مف فا کے اصلی حصہ کا نصف ہے۔

نیز نہا (ن ت / ن ق) = نہا (جب با / جب مف فا) = ½ = نہا (ت ق / ن ق)، پس نہا (ن ت / ت ق) = ۱

یعنی ن ت، ت ق رتبہ اول کے صغارے ہیں، نیز
ن ت + ت ق - ن ق = ن ت (۱ - جم عہ) + ت ق (۱ - جم بہ)
اس لئے ن ت + ت ق اور ن ق کا فرق رتبہ سوم کا ہے کیونکہ ن ت اور ت ق رتبہ اول اور (۱ - جم عہ) اور (۱ - جم بہ) رتبہ دوم کے ہیں۔
اس لئے ن ت + ت ق اور قوس ن ق کا فرق کم از کم تیسرے رتبہ کا ہے کیونکہ قوس ن ق بڑی ہے وتر ن ق سے۔

اس امر کو کہ $\frac{\text{ن ت}}{\text{ن ق}}$ کی انتہا $\frac{1}{2}$ ہے بعض اوقات الفاظ میں یوں بھی بیان کیا جاتا ہے کہ "ن ت بالآخر $\frac{1}{2}$ ن ق کے مساوی ہے" یا "ن ت انتہائی صورت میں $\frac{1}{2}$ ن ق کے مساوی ہے"۔ اسی طرح سے کہا جاتا ہے کہ مثلث ن ت ق بالآخر مساوی الساقین ہے، اس طرح کے بیان اگرچہ سہولت بخش ہوتے ہیں مگر ان سے مبتدی کو غلطی میں پڑنے کا اندیشہ ہے۔

اگر فً (ا) = ۰ تو س ق دوسرے سے اونچے رتبہ کا ہے، نیز مف فہ، عہ، بہ پہلے سے زیادہ رتبے کے ہیں اور ن ت + ت ق - ن ق تیسرے رتبہ سے زیادہ رتبہ کا ہے۔

مشق ۳ - شکل ۴۲ دفعہ ۲۹ میں اگر ل ا اصلی صغاریہ ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) ا م، قوس ا ن پہلے رتبہ کے ہیں۔

(۲) ل ن، ن م، ل م رتبہ دوم کے ہیں۔

ل سے ا م پر عمود ل ج کھینچو اور ثابت کرو کہ

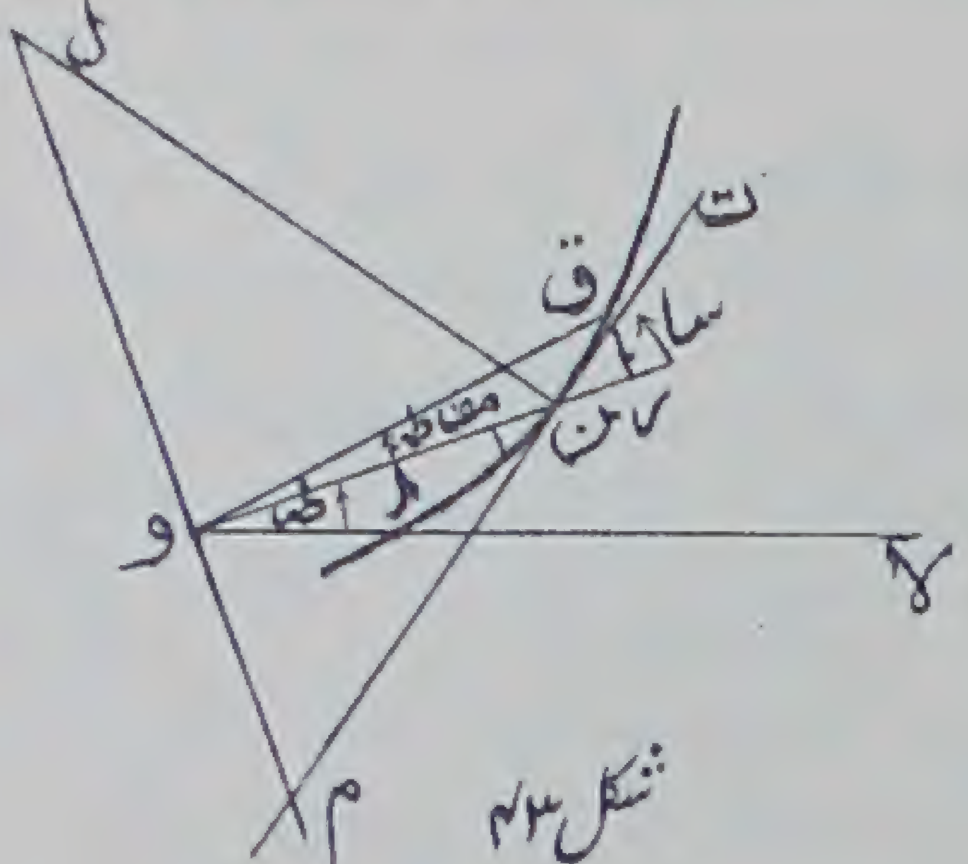
(۳) ل ج رتبہ دوم کا ہے۔

(۴) ج م رتبہ سوم کا ہے۔

مشق چہارم - ثابت کرو کہ (شکل ۴۲) اگر قوس ن ق = مف س تو

$$\frac{\text{ف فہ}}{\text{ف س}} = \text{نہا}_{\text{مف فہ}\to 0} \frac{\text{مف فہ}}{\text{مف س}} = \text{جم}^2\,\text{فہ} \times \text{فً}(\text{ا}) = \frac{\text{فً}(\text{ا})}{\{1+(\text{ف}(\text{ا}))^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

۸۹۔ قطبی ضابطے



شکل ۴۳

فرض کرو کہ (شکل ۴۳) ا ن ق ایک منحنی ہے جس کی قطبی مساوات ر = ف (طہ) ہے، نیز زاویہ لا و ن = طہ، ن و ق = مف طہ، و ن = ر اور و ق = ر + مف ر۔ و ن پر عمود ق ر کھینچو۔ قوس ن ق کو مثبت اُس صورت میں تصور کرتے ہیں جبکہ زاویہ ن و ق سمتی نیم قطر و ن کے مثبت سمت میں گھومنے سے بنتا ہے، مماس ن ت کو ن ق کی مثبت سمت میں کھینچنا چاہئے۔ مماس ن ت اور نصف قطر و ن کے درمیان کے زاویہ کو ہم سا سے تعبیر کرینگے، اِس سے وہ زاویہ ر ن ت مراد ہوگا جو نصف قطر و ن ممدودہ اور مماس ن ت کے درمیان بنتا ہے۔

(۱) مس سا کا معلوم کرنا۔

مس ر ن ق = (ر ق) / (ن ر) = ((ر + مف ر) جب مف طہ) / ((ر + مف ر) جم مف طہ - ر)

= (ر جب مف طہ + مف ر جب مف طہ) / (مف ر جم مف طہ - ر (۱ - جم مف طہ))

اگر مف طہ اصلی صغاریہ ہو تو مف ر رتبہ اول کا ہے کیونکہ (مف ر) / (مف طہ) بالعموم محدود ہوتا ہے۔ اِس لئے مف ر جب مف طہ اور (۱ - جم مف طہ) دوسرے رتبہ کے ہیں، اِس لئے ہم دوسرے رتبہ کی مقداروں کو نظر انداز کر کے جب مف طہ کی بجائے مف طہ اور جم مف طہ کی بجائے ۱ لکھ سکتے ہیں۔ لہذا

مس سا = نہا مس ر ن ق = نہا ر (مف طہ) / (مف ر) = ر (فر طہ) / (فر ر)

(۲) قوس کے مشتق کا معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ان = س، قوس ن ف = مف س، تب اگر صرف چھوٹے سے چھوٹے رتبہ کے صغاریوں کو قائم رکھا جائے اور یہ ملحوظ رکھا جائے کہ ن ق اور قوس ن ق ایک ہی رتبہ کے ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(\frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}}\right)^2 = \text{نہا}\ \frac{(\text{مف ر})^2 + (\text{ر مف طہ})^2}{(\text{مف طہ})^2} = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^2$$

$$\text{یا فر س} = \sqrt{(\text{فر ر})^2 + \text{ر}^2 (\text{فر طہ})^2}$$

$$\text{اور جیب سا} = \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر س}}\ ،\ \text{جم سا} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$$

(۳) رقبہ کا مشتق معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ قطاع ا و ن = ی، قطاع ن و ق = مف ی
تب مف ی اُن دو مستدیر قطاعوں کے رقبوں کے درمیان ہوگا جن میں سے ہر ایک کا زاویہ مف طہ ہے اور جن کے نصف قطر بالترتیب و ن اور و ق ہیں، اس لئے $\frac{\text{مف ی}}{\text{مف طہ}}$ کی قیمت $\frac{1}{2}\text{ر}^2$ اور $\frac{1}{2}(\text{ر} + \text{مف ر})^2$ کے درمیان ہے اور اس لئے

$$\frac{\text{فر ی}}{\text{فر طہ}} = \frac{1}{2}\text{ر}^2\ ،\ \text{فر ی} = \frac{1}{2}\text{ر}^2\,\text{فر طہ}$$

(۴) قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد۔

اگر ن م اور ن ل بالترتیب ن پر کے مماس اور عماد ہوں اور و میں سے ایک خط م و ل، و ن پر عمود کھینچا جائے جو ن م سے م پر اور ن ل سے ل پر ملے تو و م کو قطبی زیر مماس اور و ل کو قطبی زیر عماد کہتے ہیں۔ ن م اور ن ل کو بعض اوقات قطبی مماس اور قطبی عماد بھی کہتے ہیں۔

اِن خطوں کے طول حسب ضرورت ر اور سا کی رقوم میں آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

مشق ۱۸

۱۔ مساوات ر = ا طہ جس منحنی کی مساوات ہے وہ "ارشمیدس کا لولبی" ہے۔ ثابت کرو کہ مس سا = طہ، نیز اس کا زیر عماد مستقل ہے۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۲۔ مساوات ر = $\frac{\text{ا}}{\text{طہ}}$ سے "منکافی لولبی" تعبیر ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا زیر مماس مستقل ہے۔

ثابت کرو کہ نقطہ (ر، طہ) سے ابتدائی خط و لا پر جو عمود کھینچ سکتا ہے وہ $\frac{\text{ا جب طہ}}{\text{طہ}}$ کے مساوی ہے اور اس سے ثابت کرو کہ و لا کے متوازی و لا سے ا فاصلہ پر منحنی کا ایک متقارب ہے۔

۳۔ عصا (لتوعس) کی مساوات ر^{2} طہ = ا^{2} ہے، مشق ۲ کی طرح ثابت کرو کہ و لا اس کا ایک متقارب ہے، منحنی کو مرتسم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات ر = ا و$^{\text{طہ مم عا}}$ سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے اس میں سا مستقل ہے، اس خاصیت کی بنا پر منحنی کو "مساوی الزاویہ لولبی" کہتے ہیں۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۵۔ جو منحنی مساوات ر = ا (۱ - جم طہ) سے تعبیر ہوتا ہے اس کو ہم "خط صنوبری" یا قلب نما کہینگے۔ ثابت کرو کہ اس میں سا = $\frac{\text{طہ}}{2}$، منحنی کو مرتسم کرو۔

۶۔ اگر ر = $\frac{\text{۲ا}}{\text{۱ - جم طہ}}$ تو ثابت کرو کہ سا = π - $\frac{\text{طہ}}{2}$، منحنی کیا ہے؟

۷۔ اگر ر = ا طہ، تو $\frac{\text{فرس}}{\text{فرر}}$ = $\frac{\sqrt{\text{ر}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}}$

$$\text{اگر } ر = \frac{ا}{طہ} \text{ تو } \frac{فس}{فر} = \frac{\sqrt{ر^{2} + ا^{2}}}{ر}$$

$$\text{اگر } ر = ا \text{ قو طہ مم عہا تو } \frac{فس}{فطہ} = ر \text{ قم عہ}$$

$$\text{اگر } ر^{2} = ا^{2} \text{ جم ۲ طہ تو } \frac{فس}{فطہ} = \frac{ا^{2}}{ر}$$

۸۔ اگر دفعہ ۸۸ کی شکل میں ن ج عمود کھینچا جائے و ن پر اور ق ج عمود کھینچا جائے و ق پر تو ثابت کرو کہ جب مف طہ استدقاق کرے صفر کی طرف تو ن ج کی انتہا $\frac{فر}{فطہ}$ ہے۔

اگر مف ی رقبہ ہو قطاع ج ن ق کا تو ثابت کرو کہ $\frac{فی}{فطہ}$ مساوی ہے $\frac{1}{2}\left(\frac{فر}{فطہ}\right)^{2}$ کے۔

۹۔ اشلہ ا تا ۵ کے منحنیوں کی صورت میں وہ رقبے معلوم کرو جو منحنیوں اور ان سمتی نیم قطروں سے گھرے ہوئے ہوں جن کے سمتی زاوئے $طہ_{1}$ اور $طہ_{2}$ ہوں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات $ر^{2} = ا^{2}$ جم ۲ طہ سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے وہ دو حلقوں پر مشتمل ہے، ہر ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۱۔ ا ن ق (شکل ۴۳) ایک متحرک نقطہ ن کا طریق ہے، اگر سمتی نیم قطر کی سمت میں اور اس پر عمود دار، نقطۂ مذکور کی رفتار کے اجزائے ترکیبی بالترتیب عہ اور و ہوں اور نیز انہی سمتوں میں اسراع کے اجزائے ترکیبی عہا اور بہا ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ع = \dot{ر}\text{، } و = ر\,\dot{طہ}$$

$$عہا = \ddot{ر} - ر\,\dot{طہ}^{2}\text{، } بہا = ر\,\ddot{طہ} + ۲\,\dot{ر}\,\dot{طہ} = \frac{1}{ر}\,\frac{ف}{فت}\left(ر^{2}\,\dot{طہ}\right)$$

اِن کو ثابت کرنے کے لئے یہ یاد رکھا جائے کہ

ع = نہا (۱ + مف ا) جم مف اطہ - ا / مف ا ت ، و = نہا (۱ + مف ا) جب مف اطہ / مف ا ت

اور اگر ع اور و کی قیمتیں ق پر بالترتیب عہ اور وہ ہوں تو

عہ = نہا (عہ جم مف طہ - و جب مف طہ - ع) / مف ت

بہ = (ع جب مف طہ + و جم مف طہ - و) / مف ت

۱۲- اگر مثال ۱۱ میں اسراع ہمیشہ ب ا د کی طرف ہو تو ثابت کرو کہ نیم قطر مساوی وقفوں میں ہمیشہ مساوی رقبے عبور کرتا ہے۔

کیونکہ بہ = . اور اِس لئے ر² طہَ = ۲ ہَ (دفعہ ۸۸) = مستقل

۱۳- اگر شکل ۲۴ میں ن پر کا مماس مماسوں ا م اور ب م سے بالترتیب ف اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ مثلثات ف ق م اور ا ب م میں سے ہر ایک تیسرے رتبہ کا مثلث ہے جبکہ ل ا رتبہ اول کا ہو اور اِن کی نسبت کی انتہا ¼ ہے۔

۱۴- اگر شکل ۴۲ میں ت کا معین ت د ہو تو ثابت کرو کہ م د / م ل کی انتہا ½ ہے، نیز ثابت کرو کہ مثلث ن ت ق کا اصلی حصہ ½ ھ ف (ا)۔

۱۵- ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ن ت سے ن پر مس کرتا ہے اور ق میں سے گزرتا ہے (شکل ۴۲)، اگر نصف قطر کی انتہا جبکہ ق استدقاق کرے ن کی طرف س ہو تو ثابت کرو کہ

س = ½ نہا (ن ق / جب عہ) = فرس / و فہ = {۱ + (ف َ (ا))²}^{3/2} / فً (ا)

اگر س ق ممدودہ دائرہ سے قَ پر ملے تو ثابت کرو کہ س قَ کی انتہا ۲ فط² فہ / فً (ا) ہے۔

۱۶۔ مثلث ن ت ف (شکل ۴۲) کے گرد ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، اگر دائرہ کے نصف قطر کی انتہا جبکہ ق استدقاق کرے ن کی طرف سا ہو تو ثابت کرو کہ سا = $\frac{1}{2}$ سا (مشق ۱۵)

۱۷۔ (شکل ۴۲) قوس ن ق پر ک کوئی نقطہ ہے اور مثلث ن ک ق کے گرد ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ جب، ک اور ق استدقاق کریں ن کی طرف تو دائرہ کا نصف قطر استدقاق کرتا ہے س (مشق ۱۵) کی طرف۔ ثابت کرو کہ یہ جواب اُس صورت میں بھی درست رہتا ہے جبکہ ک اور ق، ن کی مقابل جانبوں میں واقع ہوں اور ک اور ق دونوں ن کی طرف استدقاق کریں۔

باب یازدہم

جزوی تفرق

۸۹ - **جزوی تفرق** - باب ہذا میں ہم دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعلوں پر مختصر بحث کرینگے۔ ایسے تفاعلوں کی مبسوط تشریح قدرے مشکل ہے، اس لئے ہم اس بحث کو مسلسل تفاعلوں کے مقابلۃً آسان اور سادہ خواص تک محدود رکھینگے۔

تعریف - دو غیر تابع یا متبوع متغیروں لا، ما کے ایک تفاعل ف (لا، ما) کو لا اور ما کی بالترتیب قیمتوں ا اور ب کے لئے مسلسل اُس صورت میں کہتے ہیں جبکہ ھ ← ۰ اور ک ← ۰ کے لئے

ف (ا + ھ، ب + ک) - ف (ا، ب)

کی انتہا صفر ہو خواہ ھ اور ک کسی طرح مائل بہ صفر ہوں۔

دو سے زیادہ متغیروں کے لئے بھی اسی قسم کی تعریف صادق آتی ہے۔

فرض کرو کہ لا اور ما کا ایک تفاعل ع = ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ ہے، چونکہ لا اور ما ایک دوسرے کے تابع نہیں، اس لئے ممکن ہے کہ لا بدلے اور ما مستقل رہے، جب لا بدلے اور ما نہ بدلے تو بلحاظ لا کے ع کے مشتق کو ع کا جزوی لا، مشتق یا ع کا جزوی تفرقی سر بلحاظ لا کے کہتے ہیں اسی طرح ع کا جزوی ما، مشتق، بلحاظ ما کے ع کا وہ مشتق ہے جو لا کو غیر متبدل فرض کر کے محسوب کیا جائے۔

جب ع صرف لا کا تفاعل ہو تو اس کے لا، مشتق کو ع ف لا ع یا ف ع / ف لا سے تعبیر کرتے ہیں، ع کے جزوی لا، مشتق کے لئے بھی بعض اوقات یہی ترقیم استعمال کی جاتی ہے

کی جاتی ہے اور ایسی صورت میں طالب علم کو چاہئے کہ نفس مضمون سے معلوم کرے کہ مشتق جزوی ہے یا نہیں۔ جزوی مشتقوں کو ہم ذیل کی ترقیم سے تعبیر کرینگے۔

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} ، \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$$

فَ (لا) اور فَ (لا) کے مشابہ ترقیمیں بھی استعمال ہو سکتی ہیں، مثلاً

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا، ما})، \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا، ما})، \text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا، ما})، \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا، ما})، \text{ع}_{\text{لا}}، \text{ع}_{\text{ما}}$$

مگر درحقیقت کوئی ترقیم ایسی نہیں ہے جو اشتباہ کے شائبہ سے بالکل پاک ہو، طالب علم کو بالعموم نفس مضمون سے ہی یہ نتیجہ نکالنا پڑیگا کہ مشتق جزوی ہے یا نہیں۔

پس $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} ، \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کی باضابطہ تعریف جہاں $\text{ع} = \text{ف(لا، ما)}$ حسب ذیل ہے۔

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{ف(لا + مف لا، ما)} - \text{ف(لا، ما)}}{\text{مف لا}}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{نہا}_{\text{مف ما}\to 0} \frac{\text{ف(لا، ما + مف ما)} - \text{ف(لا، ما)}}{\text{مف ما}}$$

مشق ۱۔ اگر $\text{ع} = \text{ا لا}^{2} + \text{۲ ب لا ما} + \text{ج ما}^{2}$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{۲ ا لا + ۲ ب ما}، \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{۲ ب لا + ۲ ج ما}$$

مشق ۲۔ اگر $\text{ع} = \text{جب (ا لا + ب ما + ج)}$

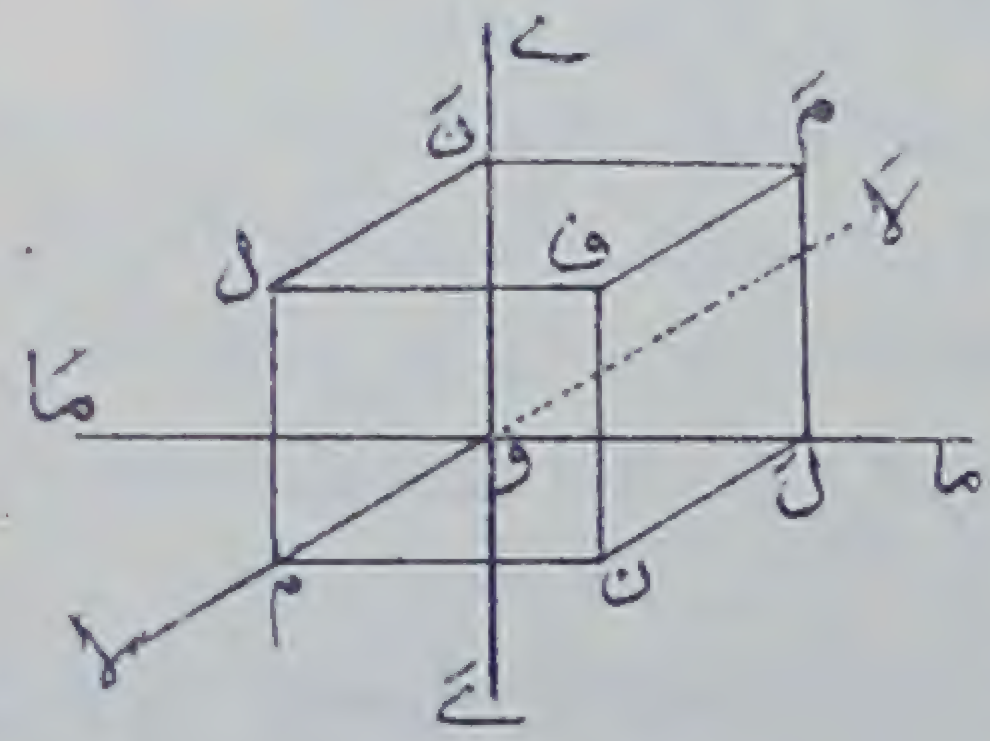
$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{ا جم (ا لا + ب ما + ج)}، \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ب جم (ا لا + ب ما + ج)}$$

۱۸۹۔ **تین ابعاد کا ہندسۂ تحلیلی**۔ اگر طالب علم تین ابعاد کے ہندسۂ تحلیلی سے واقف ہو تو اسے اس سے جزوی مشتقات کا صاف تخیل۔

حاصل کرنے میں بہت مدد ملیگی۔ اس لئے ہم اس دفعہ میں نقطوں، خطوں اور سطحوں کو تین محددوں کے ذریعہ تعبیر کرنے کے متعلق چند اساسی مسئلے درج کرینگے۔ بہت سی صورتوں میں دو ابعاد سے تین ابعاد تک وسعت دینا نہایت آسان ہوتا ہے۔

(۱) محددوں کے سطوح مستوی اور محور۔ نقطہ کے محدد

فرض کرو کہ نقطہ و میں سے تین سطوح مستوی ماوےَ، ےولاَ، لاومَا ایسی کھینچی گئی ہیں جن میں ہر دو کے درمیان زاویہ قائمہ بنتا ہے اور ان کو لاانتہا تک خارج کیا گیا ہے۔ ان کے تقاطع سے خطوط لاَولا، مَاوما، ےَوے بنتے ہیں جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ ہم فرض کر لیتے ہیں کہ مَاوما اور ےَوے کاغذ کی سطح مستوی میں واقع ہیں اور ولا مشاہد کی طرف کاغذ کی سطح پر عمود وار کھینچا گیا ہے۔ (شکل ۴۴)



شکل ۴۴

کسی نقطہ ف سے سطح مستوی لاوما پر عمود ف ن کھینچو اور خط لاَولا پر عمود ن م نکالو، متوازی السطوح کی تکمیل کرو، ف کا مقام حصوں وم یا مَ ف سے اور ول یا لَ ف اور ونَ یا ن ف سے متعین ہوگا۔

تین سطوح مستوی ماوے، ےولا، لاوما کو محددوں کی سطوح مستوی کہتے ہیں، تین خطوطِ مستقیم لاَولا، مَاوما، ےَوے کو محددوں کے محور کہتے ہیں اور تین حصوں وم، ولَ، ونَ کو نقطہ ف کے محدد کہتے ہیں، و محددوں کا مبدا ہے۔

محوروں کی اور بناءً علیہ حصوں یا محدودوں کی مثبت سمتیں بالترتیب و سے لا کی طرف، و سے ما کی طرف اور و سے ے کی طرف لیجاتی ہیں۔

پس نقطہ ف کو (لا، ما، ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں

لا = و م = ل َن = م َف

ما = و لَ = م ن = ل ف

ی = و نَ = لَ مَ = ن ف

محدودوں کی سطوح مستوی فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتی ہیں اور جن ثمنوں میں نقطہ واقع ہو سکتا ہے ان کے جواب میں علامات + اور - کی آٹھ ترتیبیں ہیں مثلاً اگر علامتیں +، +، + ہوں تو نقطہ فضا کے اس ثمن میں واقع ہوتا ہے جو ما و ے، ے و لا، لا و ما سے گھرا ہوا ہو، جب علامتیں (-، -، +) ہوں تو نقطہ فضا کے اس ثمن میں واقع ہوگا جو مَا و ے، ے و لَا، لَا و مَا سے گھرا ہوا ہو اور علیٰ ہٰذا القیاس۔

(۲) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ۔ شکل ۴۴ کے ہندسہ سے ظاہر ہے کہ

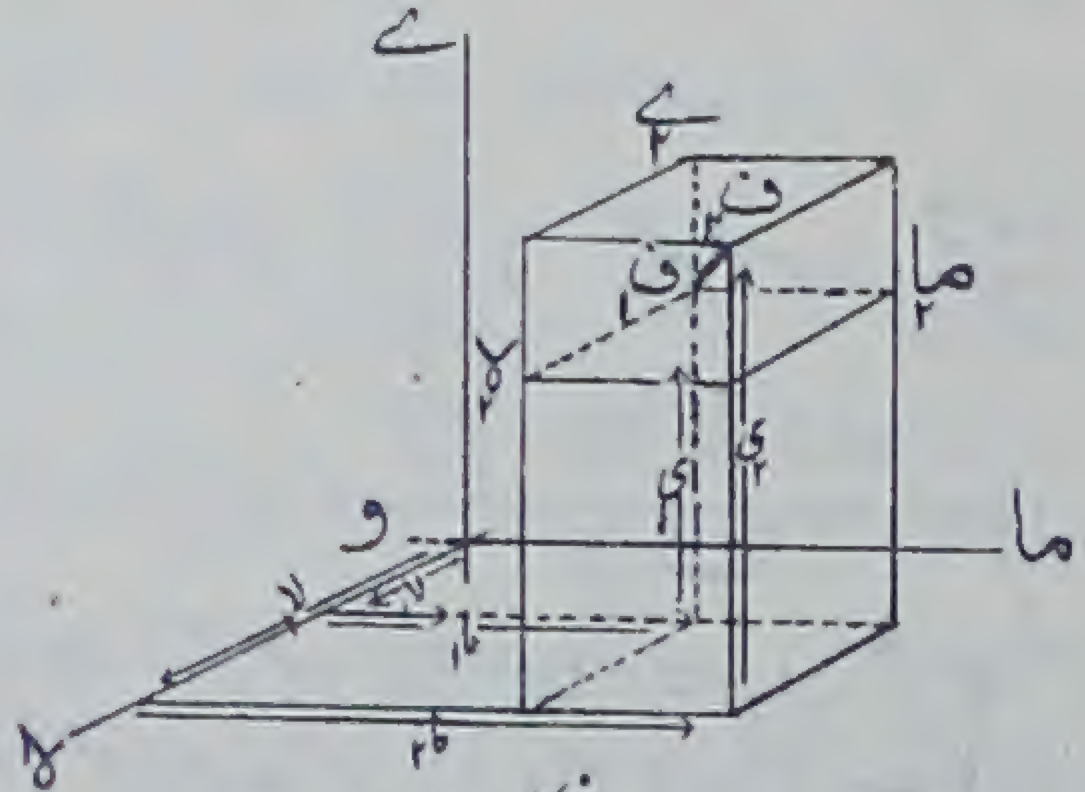
وف^2 = وم^2 + م ن^2 + ن ف^2، وف = √(لا^2 + ما^2 + ی^2) ..... (۱)

اگر ف نقطہ (لا، ما، ی) ہو اور ف$_2$ نقطہ (لا$_2$، ما$_2$، ی$_2$) ہو تو ف$_1$، ف$_2$ میں سے محدودوں کی سطوح مستوی کے متوازی سطوح مستوی کھینچو (شکل ۴۵) جن سے متوازی السطوح ف$_1$ لا$_2$ ما$_2$ ے$_2$ ف$_2$ بنے تب

ف$_1$ لا$_2$ = لا$_2$ - لا$_1$، ف$_1$ ما$_2$ = ما$_2$ - ما$_1$، ف$_1$ ے$_2$ = ی$_2$ - ی$_1$

ف$_1$ ف$_2$ = + √((لا$_2$ - لا$_1$)^2 + (ما$_2$ - ما$_1$)^2 + (ی$_2$ - ی$_1$)^2) ..... (۱َ)

اگر ہم فرض کریں کہ شکل ۴۴ کا نقطہ ف حرکت کرتا ہے لیکن مبدأ و سے ہمیشہ ایک ہی فاصلہ (فرض کرو ا) پر رہتا ہے تو یہ نقطہ ہمیشہ ایک کرہ پر واقع ہوگا اور نقطہ ف کے محدود (۱) کی رو سے ہمیشہ مساوات



شکل ۴۵

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = \text{ا}^2$$

کو پورا کرینگے۔ اس لئے مساوات بالا کو کرہ کی مساوات کہتے ہیں۔ اسی طرح سے ہم (اَ) سے دیکھ سکتے ہیں کہ اُس کرہ کی مساوات جس کا مرکز $\text{ف}_1(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$ ہو اور نصف قطر ا ہو

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)^2 + (\text{ی} - \text{ی}_1)^2 = \text{ا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہوتی ہے۔

(۳) خط مستقیم کی سمتی جیوب التمام۔ فرض کرو کہ و ف (شکل ۴۴) و میں سے گزرنے والا کوئی خط ہے۔ اس خط پر ایک سمت مثلاً و سے ف کی سمت کو مثبت فرض کرو۔ اس خط کا مقام پورے طور پر معین ہو جائیگا اگر ہمیں وہ زائے معلوم ہوں جو اس خط کی مثبت سمت محددوں کے محوروں کی مثبت سمتوں کے ساتھ بناتی ہے، اِن زاویوں یعنی لا و ف، ما و ف، ے و ف کو خط کے سمتی زاوئے کہتے ہیں اور اِن زاویوں کی جیوب التمام کو خط مذکور کی سمتی جیوب التمام کہتے ہیں۔ اِن زاویوں میں سے ہر ایک ۰ اور ۱۸۰° (بشمول طرفین) کے درمیان ہم مانتے ہیں کہ واقع ہو سکتا ہے۔

مثلاً و لا کے سمتی زاوئے (۰، ۹۰°، ۹۰°) ہیں، و لاَ کے (۱۸۰°، ۹۰°، ۹۰°)

ہیں اور ان کی سمتی جیوب التمام بالترتیب (۱، ۰، ۰)، (-۱، ۰، ۰) ہیں۔
اگر و ف کے سمتی زاویے عہ، بہ، جہ ہوں، تو

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{وم}}{\text{وف}}\text{،}\quad \text{جم بہ} = \frac{\text{ول}}{\text{وف}}\text{،}\quad \text{جم جہ} = \frac{\text{ون}}{\text{وف}}$$

$$\text{اور}\quad \text{جم}^2\,\text{عہ} + \text{جم}^2\,\text{بہ} + \text{جم}^2\,\text{جہ} = \frac{\text{وم}^2 + \text{ول}^2 + \text{ون}^2}{\text{وف}^2} = 1$$

اگر ہم جم عہ، جم بہ، جم جہ کی بجائے بالترتیب ل، م، ن لکھیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ ہر خط کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ذیل کے تماثل ربط سے باہم مربوط ہیں

$$\text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 = 1 \quad\text{.........}\quad (3)$$

اگر یہ خط مبدا و میں سے نہ گزرے تو اس خط کی مثبت سمت کے متوازی و میں سے گزرنیوالا ایک خط کھینچو۔ موخر الذکر خط کی سمتی جیوب التمام وہی ہیں جو اصلی خط کی ہیں۔

اگر ف۱ اور ف۲ کا درمیانی فاصلہ د ہو جہاں د مثبت ہے تو ف۱ ف۲ کی سمتی جیوب التمام ہیں:-

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{د}}\text{،}\quad \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{د}}\text{،}\quad \frac{\text{یا}_2 - \text{یا}_1}{\text{د}}$$

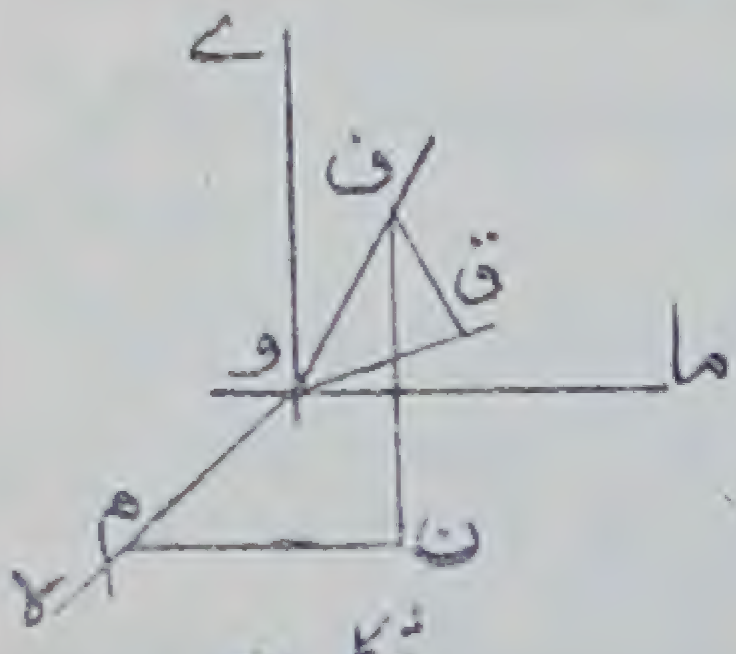
اور ف۲ ف۱ کی سمتی جیوب التمام ہیں:- ...... (۳')

$$\frac{\text{لا}_1 - \text{لا}_2}{\text{د}}\text{،}\quad \frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{د}}\text{،}\quad \frac{\text{یا}_1 - \text{یا}_2}{\text{د}}$$

(۴) دو خطوں کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اس کی جیب التمام۔

فرض کرو کہ ان خطوں کی سمتی جیوب التمام (ل۱، م۱، ن۱) اور (ل۲، م۲، ن۲) ہیں، وف، وق (شکل ۱۴۶) خطوں کی مثبت سمتوں کے متوازی کھینچو، نیز فرض کرو کہ وف کا ظل وق پر وق ہے، ف سے سطح مستوی

لا و ما پر عمود ف ن اور
ن سے و لا پر عمود ن م
کھینچو۔ تب



شکل ۴۶

وم = ل$_1$ × وف، م ن = م$_1$ × وف،
ن ف = ن$_1$ × وف، وق = وف جم طہ
جہاں طہ خطوط وف، وق
کا درمیانی زاویہ ہے۔

اظلال کے اساسی اصولوں سے
وف کا جو ظل وق پر ہے وہ وف پر وم، م ن، ن ف کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ لیکن وم کا ظل وق پر ل$_2$ × وم ہے، م ن کا م$_2$ × م ن اور ن ف کا ن$_2$ × ن ف ہے کیونکہ وم اور وق کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام ل$_2$ ہے، وغیرہ وغیرہ۔

اس لئے وف جم طہ = ل$_2$ × وم + م$_2$ × م ن + ن$_2$ × ن ف
= ل$_1$ ل$_2$ × وف + م$_1$ م$_2$ × وف + ن$_1$ ن$_2$ × وف

اور اس لئے جم طہ = ل$_1$ ل$_2$ + م$_1$ م$_2$ + ن$_1$ ن$_2$ .... (۴)

چونکہ جب^2 طہ = ۱ - جم^2 طہ اور ل$_1^2$ + م$_1^2$ + ن$_1^2$ = ۱ اور ل$_2^2$ + م$_2^2$ + ن$_2^2$ = ۱

اسلئے جب^2 طہ = (ل$_1^2$ + م$_1^2$ + ن$_1^2$) (ل$_2^2$ + م$_2^2$ + ن$_2^2$) - (ل$_1$ ل$_2$ + م$_1$ م$_2$ + ن$_1$ ن$_2$)^2

= (م$_1$ ن$_2$ - م$_2$ ن$_1$)^2 + (ن$_1$ ل$_2$ - ن$_2$ ل$_1$)^2 + (ل$_1$ م$_2$ - ل$_2$ م$_1$)^2 .... (۵)

خطوں کے علی القوائم ہونے کی شرط (۴) کی رو سے ہے

ل$_1$ ل$_2$ + م$_1$ م$_2$ + ن$_1$ ن$_2$ = ۰ .... (۴ ا)

(۵) خط مستقیم کی مساواتیں۔ فرض کرو کہ نقطہ ف (لا$_1$، ما$_1$، ہی$_1$) خط کا

ایک دیا ہوا ثابت نقطہ ہے اور ف (لا، ما، ی) خطِ مذکور پر کوئی اور نقطہ ہے (شکل ۴۵) فرض کرو کہ ف۱ ف = ر اور ف۱ ف۲ کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہیں۔ تب

ف۱ لا۲ = لا - لا۱ = ل ر، ما - ما۱ = م ر، ی - ی۱ = ن ر

اور اس لئے (لا - لا۱)/ل = (ما - ما۱)/م = (ی - ی۱)/ن .... (۶)

معادلات (۶) اُن روابط کو ظاہر کرتی ہیں جو خط پر کے کسی نقطہ اور ثابت نقطہ کے محددوں میں پائے جاتے ہیں اس لئے ان کو خط کی مساواتیں کہتے ہیں۔ اگر نقطہ ف، ف۱ کے اُس طرف لیا جاتا جس طرف کہ ف۲ نہیں ہے تو ف ف۲ کی سمتی جیوب التمام (-ل، -م، -ن) ہوتیں لیکن پھر بھی محصلہ مساواتیں وہی رہتیں۔ اگر متغیر نقطہ (لا، ما، ی) اور ثابت نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) کے درمیان مطلق فاصلہ ر ہو تو

(لا - لا۱)/ل = (ما - ما۱)/م = (ی - ی۱)/ن = ± ر

جہاں + علامت لینی چاہئے جبکہ متغیر نقطہ ثابت نقطہ سے مثبت سمت میں واقع ہو اور - علامت لینی چاہئے جبکہ متغیر نقطہ ثابت نقطہ سے منفی سمت میں واقع ہو۔

(۶) سطح مستوی کی مساوات۔ مساوات لا = ا صریحاً اس سطح مستوی پر کے ہر ایک نقطہ کے لئے درست ہے جو ماوے کے متوازی ا فاصلہ پر ہو۔

بالفاظ دیگر لا = ا سطح مستوی ماوے کے متوازی سطح مستوی کی مساوات ہے۔

اسی طرح ما = ب، ی = ج محددوں کی دو سطوح مستوی کے متوازی سطوح مستوی کو تعبیر کرتی ہیں۔ خود محددوں کی سطوح مستوی کی مساواتیں بالترتیب لا = ۰، ما = ۰ اور ی = ۰ ہیں۔

مساوات ھا = ا لا + ب جب اسے صرف محددوں کی سطح مستوی لا و ھا کے لحاظ سے دیکھا جائے ایک خط مستقیم (فرض کرو) خ ط کو تعبیر کرتی ہے۔ اگر خ ط میں سے خط ےَ و ے کے متوازی ایک سطح مستوی کھینچی جائے تو اس سطح مستوی پر کے ہر ایک نقطہ کے محدد مساوات ھا = ا لا + ب کو پورا کرتے ہیں۔ پس جب مساوات ھا = ا لا + ب کو فضا کے لحاظ سے دیکھا جائے تو یہ محدوف محدد کے محور کے متوازی ایک سطح مستوی کو تعبیر کرتی ہے۔

اسی طرح ی = ا لا + ب اور ی = ا ھا + ب بالترتیب و ھا اور و لا کے متوازی سطوح مستوی کو تعبیر کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک سطح مستوی محددوں کے محوروں سے نقاط خ، ط، س پر ملتی ہے (شکل ۴۷) و سے اس سطح مستوی پر عمود و ع نکالو اور فرض کرو کہ اس عمود کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہیں، اب اس سطح مستوی پر کوئی نقطہ ف (لا، ھا، ی) لو اور محدد و مر، مر د، د ف کھینچو۔

و ف کا ظل و ع پر خود و ع ہے جس کو ع سے تعبیر کیا جا سکتا ہے، نیز و ف کا ظل و ع پر ظلوں و مر، مر د، د ف کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور یہ ظل بالترتیب ل × و مر، م × مر د، ن × د ف ہیں، اس لئے

ل لا + م ھا + ن ی = ع .... (۷)

اس لئے سطح مستوی کی مساوات محددوں میں درجہ اول کی مساوات ہے۔

اگر $\sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2}$ = س

تو مساوات ا لا + ب ھا + ج ی = د ...... (۷ً)

کو $\frac{ا}{س}$، $\frac{ب}{س}$، $\frac{ج}{س}$، $\frac{د}{س}$ کی بجائے بالترتیب ل، م، ن، ع لکھنے سے اس شکل



شکل ۴۷

ل لا + م ما + ن ہی = ع

میں لکھا جاسکتا ہے، اس میں جذر کی علامت وہی لی جاسکتی ہے جو د کی ہے، اس طرح ع یا د/ر مثبت ہوگا۔ مقادیر ا/ر ، ب/ر ، ج/ر سمتی جیوب التمام ہیں کیونکہ سمتی جیوب التمام کی شرط (۳) یعنی یہ کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ایک ہونا چاہئے پوری ہوتی ہے، یہ مقادیر اس سطح مستوی پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام ہیں۔

سطح مستوی لا = ۰ پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام (۱، ۰، ۰) ہیں، سطح مستوی ما = الا + ب یعنی - الا + ما = ب پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام

(- ا/√(ا² + ۱) ، ۱/√(ا² + ۱) ، ۰) ہیں، وغیرہ وغیرہ

(۷) سطح کی مساوات - منحنی کی مساواتیں - بالعموم ہی = ف (لا، ما) یا ف (لا، ما، ہی) = ۰ کی شکل کی کوئی مساوات سطح منحنی کو تعبیر کرتی ہے، مثلاً (۲) کی رو سے مساوات لا² + ما² + ہی² - ا² = ۰ سے نصف قطر ا کا ایک کرہ تعبیر ہوتا ہے۔

نیز جب کسی نقطہ کے محدد دو مساواتوں ف (لا، ما، ہی) = ۰ اور فہ (لا، ما، ہی) = ۰ کو پورا کریں تو نقطہ ان دونوں سطحوں پر واقع ہوگا جو ان مساواتوں سے تعبیر ہوتی ہیں، یعنی اگر ان مساواتوں کو ہمزاد مساواتیں تصور کیا جائے تو ان دونوں سے ملکر ان سطحوں کے تقاطع کا منحنی تعبیر ہوگا جو (سطحیں) جداگانہ مساواتوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔
مثلاً دو مساواتیں

۳لا + ۲ما + ہی = ۱ ، ۲لا + ۳ما - ہی = ۲

سے دو سطوح مستوی تعبیر ہوتی ہیں، اگر ان کو ہمزاد مساواتیں تصور کیا جائے تو ان سے ان کے تقاطع کا منحنی یعنی ایک خط مستقیم تعبیر ہوگا۔

اسی طرح مساوات (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ما - ما۱ = م/ن (ی - ی۱) ، ما - ما۱ = م/ل (لا - لا۱)

جو دو سطوح مستوی کی مساواتیں ہیں، پس اِن سے اِن سطوح مستوی کا خطِ تقاطع تعبیر ہوتا ہے۔

دو مساواتوں لا = ۱ اور لا² + ما² + ی² = ۹ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے جو کرہ اور سطح مستوی کے تقاطع سے پیدا ہوتا ہے۔

(۸) قطبی محدد۔ شکل ۴۴ میں فرض کرو کہ و ف = ر، ∠ ی و ف = طہ، ∠ لا و ن = فہ، تب ر، طہ، فہ کو ف کے قطبی محدد کہتے ہیں، کسی نقطہ کے مستطیلی محددوں (لا، ما، ی) اور قطبی محددوں (ر، طہ، فہ) کے باہمی ارتباط مندرجۂ ذیل بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

لا = ر جب طہ جم فہ، ما = ر جب طہ جب فہ، ی = ر جم طہ

(۹) اسطوانی محدد۔ شکل ۴۴ میں فرض کرو کہ و ن = س، ∠ لا و ن = فہ، ن ف = ی، تب س، فہ، ی کو نقطہ ف کے اسطوانی محدد کہتے ہیں۔ اس صورت میں ظاہر ہے کہ

س = ر جب طہ، لا = س جم فہ، ما = س جب فہ

نقطہ ن ظِل ہے نقطہ ف کا سطح لا و ما پر، س اور فہ صریحاً اس سطح پر ن کے مستوی قطبی محدد ہیں۔ ر، طہ، فہ کو بعض اوقات کروی قطبی محدد بھی کہتے ہیں۔

مشق ۱۔ تین نقطوں (۱، ۰، ۰)، (۰، ۲، ۰) اور (۰، ۰، ۳) میں سے گزرنیوالی سطح مستوی کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ ا لا + ب ما + ج ی = د ہے، تب مندرجہ بالا تینوں نقطوں سے یہ مساوات پوری ہونی چاہیے، اس لئے ا، ب، ج، د ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

ا = د، ۲ ب = د، ۳ ج = د

یعنی ا/د = ۱، ب/د = ۱/۲، ج/د = ۱/۳

اور مطلوبہ مساوات ہے $\text{لا} + \frac{\text{ما}}{۲} + \frac{\text{ی}}{۳} = ۱$

یہ بات قابل غور ہے کہ ہمیں صرف ا، ب، ج، د کی نسبتیں درکار ہیں، یعنی اس سے ظاہر ہے کہ سطح مستوی کی مساوات میں صرف تین غیر تابع مستقل ہوتے ہیں جس طرح کہ مستوی ہندسہ میں خطِ مستقیم کی مساوات میں صرف دو غیر تابع مستقل ہوتے ہیں۔

مشق ۲- نقاط (ا، ۰، ۰)، (۰، ب، ۰)، (۰، ۰، ج) میں سے گزرنے والی سطح مستوی کی مساوات ہے:-

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} = ۱$$

جہاں ا، ب، ج وہ مقطوعے ہیں جو سطح مستوی محوروں پر قطع کرتی ہے۔

مشق ۳- تین نقطوں (۲، ۰، ۳)، (-۱، ۵، ۲)، (۳، -۴، -۲) میں سے گزرنے والی سطح مستوی کی مساوات ہے:-

$$۲۹\,\text{لا} + ۱۶\,\text{ما} - ۷\,\text{ی} = ۳۷$$

مشق ۴- دو نقطوں $(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱، \text{ی}_۱)$ اور $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲، \text{ی}_۲)$ میں سے گزرنے والے خط کی مساواتیں ہیں۔

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_۱}{\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_۱}{\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_۱}{\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱}$$

دفعہ ۱۸۹ (۵) کی رو سے اس خط کی مساواتیں جو $(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱، \text{ی}_۱)$ میں سے گزرتا ہے اور جسکی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہیں

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_۱}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_۱}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_۱}{\text{ن}}$$

ہیں۔ چونکہ $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲، \text{ی}_۲)$ اس خطِ مستقیم پر واقع ہے اس لئے نسبتیں ل : م : ن ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱}{\text{م}} = \frac{\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱}{\text{ن}}$$

ان مساواتوں سے مطلوبہ مساواتیں بآسانی حاصل ہو جاتی ہیں۔

مشق ۵۔ جو خط نقاط (۳، -۴، -۲)، (-۱، ۵، ۲) میں سے گزرتا ہے اس کی سمتی جیوب التمام $\left(-\frac{۴}{\sqrt{۱۱۳}}, \frac{۹}{\sqrt{۱۱۳}}, \frac{۴}{\sqrt{۱۱۳}}\right)$ ہیں جہاں خط کی مثبت سمت پہلے نقطہ سے دوسرے نقطہ کی طرف ہے۔

مشق ۶۔ ذیل کی سطوح مستوی

۳ لا + ما - ۲ ی = ۱ ، ۲ لا - ۳ ما + ی = ۱

کے درمیان جو (حادہ) زاویہ بنتا ہے اس کی جیب التمام $\frac{۱}{۱۴}$ ہے۔

مشق ۷۔ مف طہ چھوٹا زاویہ ہے جو ان خطوط کے درمیان بنتا ہے جن کی جیوب التمام (ل، م، ن) اور (ل + مف ل، م + مف م، ن + مف ن) ہیں، ثابت کرو کہ

(مف طہ)^2 = (مف ل)^2 + (مف م)^2 + (مف ن)^2

ظاہر ہے کہ

(ل + مف ل)^2 + (م + مف م)^2 + (ن + مف ن)^2 = ۱ = ل^2 + م^2 + ن^2

اور ۲ (ل مف ل + م مف م + ن مف ن) = - {(مف ل)^2 + (مف م)^2 + (مف ن)^2}

نیز ۲ جب^2 ($\frac{۱}{۲}$ مف طہ) = ۱ - جم مف طہ = - (ل مف ل + م مف م + ن مف ن)

جس سے نتیجہ مطلوبہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

۹۰۔ **پورا مشتق۔ پورا تفرقہ۔** فرض کرو کہ ع = ف (لا، ما)، جہاں لا اور ما ایک تیسرے متغیر ت کے تفاعل ہیں، ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\text{و ع}}{\text{و ت}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{و لا}}{\text{و ت}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{و ما}}{\text{و ت}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جب، ت میں مف ت کا اضافہ ہو تو فرض کرو کہ لا، ما، ع میں بالترتیب مف لا، مف ما، مف ع کا اضافہ ہوتا ہے، تب

مف ع = ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما)

جس کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

مف ع = [ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما)]

+ [ف (لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما)] ....(۱)

دفعہ ۲۷ کے اوسط قیمت کے مسئلہ کی رُو سے

ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما)

= ف_لا (لا + طہ_۱ مف لا، ما + مف ما) مف لا ....(۲)

ف (لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما) = ف_ما (لا، ما + طہ_۲ مف ما) مف ما ...(۳)

جہاں طہ_۱ اور طہ_۲ کسور واجب ہیں۔ (۲) میں مف لا کا سر ف (لا، ما + مف ما) کا لا مشتق ہے جو اِس مفروضہ کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے کہ ما + مف ما نہیں بدلتا اور جس میں لا کی بجائے لا + طہ_۱ مف لا لکھا گیا ہے۔ (۳) میں مف ما کا سر ف (لا، ما) کا ما مشتق ہے جو اِس مفروضہ کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے کہ لا نہیں بدلتا اور جس میں ما کی بجائے ما + طہ_۲ مف ما لکھا گیا ہے۔ اِس لئے

مف ع / مف ت = ف_لا (لا + طہ_۱ مف لا، ما + مف ما) مف لا / مف ت

+ ف_ما (لا، ما + طہ_۲ مف ما) مف ما / مف ت

اب نہا_{مف ت ← ۰} مف ع / مف ت = فر ع / فر ت ، نہا_{مف ت ← ۰} مف لا / مف ت = فر لا / فر ت

نہا_{مف ت ← ۰} مف ما / مف ت = فر ما / فر ت

نہا_{مف ت ← ۰} ف_لا (لا + طہ_۱ مف لا، ما + مف ما) = ف_لا (لا، ما)

نہا_{مف ت ← ۰} ف_ما (لا، ما + طہ_۲ مف ما) = ف_ما (لا، ما)

کیونکہ صف لا اور صف ما دونوں صف ت کے ساتھ صفر کی طرف استدقاق کرتے ہیں اور سب تفاعلوں کو مسلسل فرض کیا گیا ہے۔ ف‌لا (لا، ما) اور ف‌ما (لا، ما) کی بجائے بالترتیب $\frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}}$ اور $\frac{\text{جفع}}{\text{جفما}}$ لکھنے سے ہمیں مساوات (ا) حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اگر ع = ف (لا، ما، ی) اور لا، ما، ی میں سے ہر ایک متغیر ت کا تفاعل ہو تو

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جفما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جفی}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} \quad \text{......(ب)}$$

علیٰ ہذالقیاس متغیروں کی کسی تعداد کے لئے۔

(ا) میں ہم متغیر ت کی بجائے لا لے سکتے ہیں، تب ما، لا کا ایک تفاعل ہوگا اور ع دراصل ایک متغیر لا کا تفاعل ہوگا، اس صورت میں مساوات (ا) ہو جاتی ہے۔

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جفما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad \text{......(اَ)}$$

اسی طرح (ب) سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جفما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جفی}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} \quad \text{......(بَ)}$$

اِن مساواتوں میں $\frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}}$ اور $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ کے معنے بالکل مختلف ہیں، مشتق $\frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}}$ اس مفروضہ کی بنا پر بنایا گیا ہے کہ صرف ایک بالصراحت بیان کیا ہوا متغیر لا بدلتا ہے، برعکس اس کے $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ انتہا ہے $\frac{\text{صفع}}{\text{صفلا}}$ کی

جہاں صف ع، ع کی تبدیلی کو تعبیر کرتا ہے جو (۱) بالصراحت بیان کئے ہوئے متغیر لا کی تبدیلی صف لا کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے (۲) جو تبدیلیوں صف ما، صف کی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے جو خود صف لا کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

$\frac{\text{فع}}{\text{فلا}}$ ، $\frac{\text{فع}}{\text{فت}}$ کو بالترتیب لا اور ت کے لحاظ سے پورا مشتق کہتے ہیں۔ مشتق۔ اگر ع = لا^2 + ما^2، تب

$$\frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}} = \text{۲لا} \quad , \quad \frac{\text{جفع}}{\text{جفما}} = \text{۲ما}$$

لیکن اگر ما، لا کا کوئی تفاعل ہو مثلاً ما = ا لا + ب ، تو

$$\text{ع} = \text{لا}^2 + (\text{ا لا} + \text{ب})^2 \quad , \quad \frac{\text{فع}}{\text{فلا}} = \text{۲لا} + \text{۲ا}\,(\text{ا لا} + \text{ب})$$

یا ہم (۱) کو استعمال کر سکتے ہیں، اسطرح

$$\frac{\text{فع}}{\text{فلا}} = \frac{\text{جفع}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جفما}} \times \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} = \text{۲لا} + \text{۲ما} \times \text{ا}$$

کیونکہ $\frac{\text{فما}}{\text{فلا}}$ = ا، پس اسطرح بھی ہمیں وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو پہلے ہوا۔

اگر لا اور ما غیر تابع ہوں اور اگر صف ع، ع کی اس تبدیلی کو ظاہر کرے جو دونوں غیر تابع تبدیلیوں صف لا اور صف ما کے جواب میں واقع ہوتی ہے تو مساوات (۱) یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\text{صف ع} = \text{ف}_1(\text{لا} + \text{طہ}_1\,\text{صف لا}\,,\ \text{ما} + \text{صف ما})\ \text{صف لا}$$
$$+\ \text{ف}_2(\text{لا}\,,\ \text{ما} + \text{طہ}_2\,\text{صف ما})\ \text{صف ما}$$

$$= [\text{ف}_1(\text{لا}\,,\text{ما}) + \text{سہ}_1]\ \text{صف لا} + [\text{ف}_2(\text{لا}\,,\text{ما}) + \text{سہ}_2]\ \text{صف ما}$$

جہاں سہ$_1$، سہ$_2$ کی انتہائیں صف لا اور صف ما کے ساتھ صفر کی طرف استدقاق کرتی ہیں۔

اِس لئے اگر ہم صف لا اور صف ما کو غیر تابع اصلی یا صدری صغائے تصوّر کریں اور صف لا، صف ما کی بجائے فر لا، فر ما لکھیں تو حاصل ضرب سہ فر لا، سہ فر ما پہلے رتبہ سے بڑے رتبہ کے ہوں گے اور صف ع کا اصلی حصہ فر ع ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا۔

$$\text{فر ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \times \text{فر لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \times \text{فر ما} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{ج})$$

اسی طرح تین (یا زیادہ) غیر تابع متغیروں کے لئے

$$\text{فر ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{فر لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \times \text{فر ما} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ہی}} \times \text{فر ہی} \quad \ldots\ldots (\text{د})$$

فر ع کو ہم پورا یا کامل تفرقہ کہینگے اور

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{فر لا}،\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ \text{فر ما}،\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ہی}}\ \text{فر ہی}$$

کو جزدی تفرقہ کہینگے۔ اِن جزدی تفرقوں کو بعض اوقات یوں بھی لکھتے ہیں

$\text{فر}_{\text{لا}}\,\text{ع}$، $\text{فر}_{\text{ما}}\,\text{ع}$، $\text{فر}_{\text{ہی}}\,\text{ع}$۔

اگر لا، ما، ہی غیر تابع نہ ہوں بلکہ اِن میں سے ہر ایک ت کا تفاعل ہو تو چونکہ $\text{فر لا} = \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right) \text{فر ت}$ ...... تو ہمیں (ا) اور (ب) کو فر ت کے ساتھ ضرب دینے سے (ج) اور (د) کی طرح کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

مساواتیں (ا) تا (د) علم ہندسہ اور علم حیل میں کثرت سے استعمال ہوتی ہیں۔ مستوی علم ہندسہ میں (ا) بہت کار آمد ہوتی ہے۔ طالب علم کو ذیل کی مشقوں کا بغور مطالعہ کرنا چاہئے۔ [دیکھو ضمیمہ]

مشق ۱۔ فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{ما}^{۲} - ۱$ تب چونکہ لا اور ما غیر تابع ہیں

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = ۲\,\text{ا}\,\text{لا}،\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = ۲\,\text{ب}\,\text{ما}$$

مساوات ع = ۰ پر غور کرو، اب متغیر لا اور ما غیر تابع نہیں ہیں۔ نقطہ (لا، ما) لازماً مخروطی ع = ۰ پر واقع ہوگا اور ما کو لا کا ایک تفاعل یعنی مخروطی کا معیّن تصور کر سکتے ہیں۔ چونکہ لا اور ما کی سب قابل تسلیم قیمتوں کے لئے ع ہمیشہ صفر ہے، اس لئے ع کا پورا لا مشتق (جزوی مشتق نہیں) بھی ہمیشہ صفر ہوگا اس لئے (۱) کی رو سے

$$\frac{\text{جفا ع}}{\text{جفا لا}} + \frac{\text{جفا ع}}{\text{جفا ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{جفا ع}}{\text{جفا لا}} \Big/ \frac{\text{جفا ع}}{\text{جفا ما}} = -\frac{\text{ا لا}}{\text{ب ما}}$$

اس مساوات سے مخروطی کے نقطہ (لا، ما) پر کا ڈھال حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۲۔ فرض کرو کہ ع کوئی تفاعل ف (لا، ما) ہے لا، ما کا۔ مساوات ع = ۰ یعنی ف (لا، ما) = ۰، ما کو لا کے تفاعل کے طور پر بیان کرتی ہے یعنی ما معیّن ہے منحنی ف (لا، ما) = ۰ کا۔ مشق اکی طرح ع کا پورا لا مشتق صفر ہے اور نقطہ (لا، ما) پر کا ڈھال مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{جفا ع}}{\text{جفا لا}} \Big/ \frac{\text{جفا ع}}{\text{جفا ما}} = -\frac{\text{جفا ف}}{\text{جفا لا}} \Big/ \frac{\text{جفا ف}}{\text{جفا ما}} \quad \text{جہاں}$$

ف (لا، ما) کی بجائے اختصار کی خاطر ف لکھا گیا ہے۔

مشق ۳۔ اگر ف (لا، ما) = لا³ + ما³ − ۳ ا لا ما تو جس منحنی کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ ہے اس کا ڈھال ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{۳ لا}^2 - \text{۳ ا ما}}{\text{۳ ما}^2 - \text{۳ ا لا}} = \frac{\text{ا ما} - \text{لا}^2}{\text{ما}^2 - \text{ا لا}}$$

مشق ۴۔ اگر د ح = ک طہ (جہاں ک مستقل ہے) تو فر د کو فر ح اور فر طہ کی رقوم میں معلوم کرو۔

$$\frac{\text{جفا د}}{\text{جفا ح}} = -\frac{\text{ک طہ}}{\text{ح}^2} = -\frac{\text{د}}{\text{ح}} \text{،} \quad \frac{\text{جفا د}}{\text{جفا طہ}} = \frac{\text{ک}}{\text{ح}} = \frac{\text{د}}{\text{طہ}}$$

$$\text{فر د} = \frac{\text{جفا د}}{\text{جفا ح}} \times \text{فر ح} + \frac{\text{جفا د}}{\text{جفا طہ}}\,\text{فر طہ} = -\frac{\text{د}}{\text{ح}}\,\text{فر ح} + \frac{\text{د}}{\text{طہ}}\,\text{فر طہ}$$

مشق ۵۔ اگر ع = مس⁻¹ (ما / لا) تو ثابت کرو کہ

فر ع = (لا فر ما - ما فر لا) / (لا² + ما²)

مشق ۶۔ اگر لا = ر جم طہ، ما = ر جیب طہ، جہاں ر اور طہ غیر تابع ہیں تو ثابت کرو کہ

فر لا = جم طہ فر ر - ر جیب طہ فر طہ، فر ما = جیب طہ فر ر + ر جم طہ فر طہ

لا فر ما - ما فر لا = ر² فر طہ

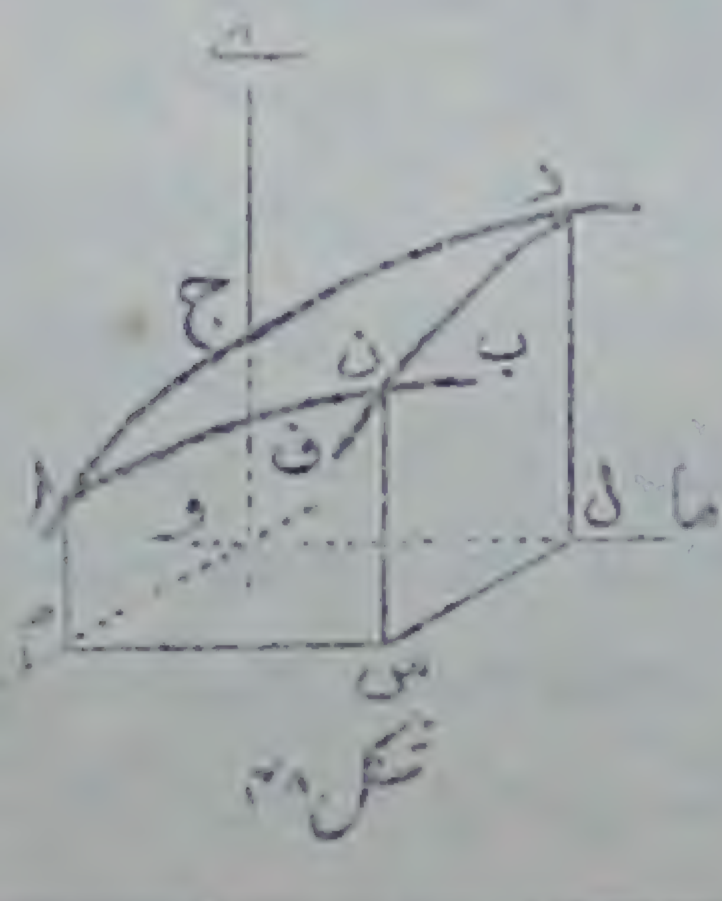
مشق ۷۔ فرض کرو کہ ع = ف (لا، ما) - ی، تب

جف ع / جف لا = جف ف / جف لا ، جف ع / جف ما = جف ف / جف ما ، جف ع / جف ی = -۱

مساوات ع = ۰ سے ایک سطح متعین ہوتی ہے اور اب ی کو دو غیر تابع متغیروں لا اور ما کا تفاعل فرض کیا جا سکتا ہے یعنی ی = ف (لا، ما)

جف ی / جف لا = جف ف / جف لا = جف ع / جف لا ، جف ی / جف ما = جف ف / جف ما = جف ع / جف ما

۹۱۔ ہندسی تمثیلات۔ فرض کرو کہ سطح ی = ف (لا، ما) پر ن کوئی نقطہ (لا، ما، ی) اور سطوح مستوی ما و ی اور ی و لا کے متوازی ن میں سے گزرنے والی سطوح مستوی سے سطح زیر بحث کی تراشیں ا ن ب اور د ن ف حاصل ہوتی ہیں (دیکھو شکل ۴۸)



شکل ۴۸

منحنی د ن ف کے لئے ما مستقل ہے، اس لئے

جف ی / جف لا = جف ف / جف لا

منحنی د ن ف کے نقطہ ن پر کا ڈھال ہے، اسی طرح $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ منحنی ا ن ب کے نقطہ ن پر کا ڈھال ہے۔

اگر سطح کی مساوات ع = ۰ ہو جہاں ع تفاعل ف (لا، ما، ی) ہے تو مساوات ع = ۰، ی کو دو غیر تابع متغیروں لا، ما کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کرتی ہے، منحنی د ن ف پر ما مستقل ہے، اس لئے اس منحنی پر ع یعنی ف (لا، ما، ی) کا پورا لا، مشتق صفر ہوگا کیونکہ اس منحنی کے لئے ع تفاعل ہے لا اور ی کا جو ہمیشہ صفر ہوتا ہے، اس لئے دفعہ ۹۰ مشتق ۱، ۲ کی مانند

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} \times \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۰ \quad \text{یا} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} \Big/ \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ منحنی د ن ف کے نقطہ ن پر کا ڈھال ہے۔

اسی طرح منحنی ا ن ب کے نقطہ ن پر کا ڈھال ہے:۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \Big/ \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \quad \ldots\ldots (۱')$$

یہ جملات ع = ف (لا، ما) - ی رکھنے سے وہی ہو جاتے ہیں جو اوپر درج کئے گئے ہیں۔ (مقابلہ کرو دفعہ ۹۰ مشتق ۷)

مماسی سطح مستوی۔ شکل ۹۰ میں فرض کرو کہ ما و ے اور ے و لا کے متوازی سطوح مستوی اور سطح زیر بحث کی تراشیں بالترتیب ا ن ت$_۲$ اور ب ن ت$_۱$ ہیں۔

فرض کرو کہ ن نقطہ (لا، ما، ی) ہے، م م$_۱$ = ہف لا، م م$_۲$ = ہف ما اور م$_۳$ نقطہ (لا + ہف لا، ما + ہف ما، ی) ہے اور ن$_۳$ سطح پر کا نقطہ (لا + ہف لا، ما + ہف ما، ی + ہف ی) ہے، فرض کرو کہ نقطہ ن پر ب ن ن$_۱$ اور ا ن ن$_۲$ کے مماس بالترتیب ن ت$_۱$ اور ن ت$_۲$

ہیں جہاں $ت_۱$، $م_۱ن_۱$ محدودہ پر واقع ہے اور $ت_۲$، $م_۲ن_۲$ محدودہ پر واقع ہے، $ن_۱ مَ_۱ مَ_۲ م_۲$ ایک مستطیل ہے جو $م_۱ م_۲ م_۳$ کے متوازی اور ہر لحاظ سے مساوی ہے، $ن_۱ن_۲$ اور $ن_۲ن_۳$ منحنی ہیں جن پر مستوی سطحیں $م_۱ مَ_۱$ اور $م_۲ مَ_۲$ سطح کو کاٹتی ہیں اور $ت_۱ت_۲$، $ت_۲ت_۳$ وہ خطوطِ مستقیم ہیں جن پر یہی سطوح مستوی $م_۱ مَ_۱$ اور $م_۲ مَ_۲$، سطح مستوی $ن ت_۱ ت_۲$ کو کاٹتی ہیں۔

چونکہ منحنی ب ن $ن_۱$ کے نقطہ ن پر کا ڈھال $\frac{جف\ ی}{جف\ لا}$ اور منحنی ا ن $ن_۲$ کے نقطہ ن پر کا ڈھال $\frac{جف\ ی}{جف\ ما}$ ہے، اس لئے

$$مَ_۱ت_۱ = \frac{جف\ ی}{جف\ لا} \times مف\ لا ،\quad مَ_۲ت_۲ = \frac{جف\ ی}{جف\ ما} \times مف\ ما$$

نیز شکل کے ہندسہ سے ظاہر ہے کہ

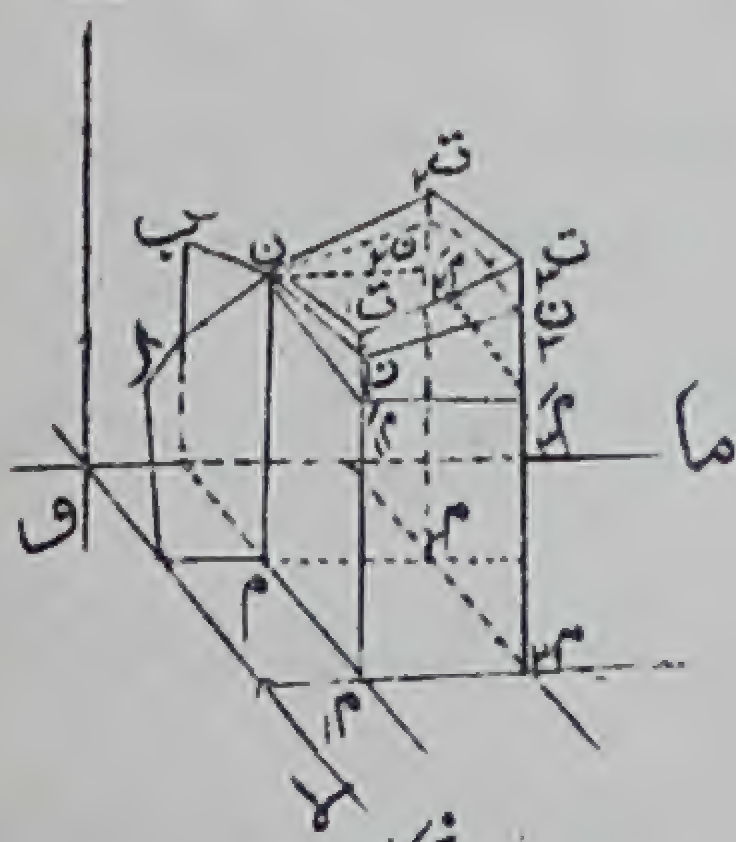
$$مَ_۱ت_۱ + مَ_۲ت_۲ = مَ_۳ت_۳$$

جس سے $\frac{جف\ ی}{جف\ لا}\ مف\ لا + \frac{جف\ ی}{جف\ ما}\ مف\ ما = مَ_۳ت_۳$ ....(۲)

لیکن $\frac{جف\ ی}{جف\ لا}\ مف\ لا + \frac{جف\ ی}{جف\ ما}\ مف\ ما$

مف ی کا صدری یا اصلی حصہ ہے (دفعہ ۹۰، ج) اس لئے جب $ن مَ_۱$ اور $ن مَ_۲$ سے بالترتیب مف لا اور مف ما تعبیر ہوں تو خط $مَ_۳ت_۲$، مف ی کے اصلی حصہ کو تعبیر کریگا۔

نیز اگر سطح مستوی $ن م م_۳ ن_۳$ سطح کو منحنی $ن ن_۳$ پر قطع کرے تو $ن ن_۳$ کے نقطہ ن پر کا ڈھال $\frac{مف\ ی}{م\ م_۳}$ یعنی $\frac{مف\ ی}{ن\ مَ_۳}$ کی انتہا ہوگی لیکن صغایہ ن



شکل ۴۹

اصولوں کی رو سے (مف ی)/(ن م۳) کی انتہا وہی ہے جو (م۳ ت۳)/(ن م۲) کی ہے کیونکہ م۳ ت۳، مف ی کا اصلی حصہ ہے، اس لئے قوس ن ن۲ کے نقطہ ن پر کا ڈھال (م۳ ت۳)/(ن م۲) ہے اور اس لئے ن ت۲ نقطہ ن پر قوس ن ن۲ کا مماس ہے۔

سطح مستوی ن ت۱ ت۲ دو خطوط مستقیم ن ت۱ اور ن ت۲ سے یعنی نقطہ (لا، ما، ی) اور مشتقات (جف ی)/(جف لا)، (جف ی)/(جف ما) سے پورے طور پر متعین ہو جاتی ہے، غیر تابع اضافوں مف لا، مف ما کے مناسب انتخاب سے ہم نقطہ ن کے نزدیک سطح پر کوئی اور نقطہ ق لے سکتے ہیں اور قوس ن ق کا مماس سطح مستوی ن ت۱ ت۲ میں واقع ہوگا۔ اس سطح مستوی کو نقطہ ن پر سطح کی مماسی سطح مستوی کہتے ہیں اور جو خط ن میں سے گذرے اور مماسی سطح مستوی پر عمود ہو اس کو نقطہ ن پر سطح کا عماد کہتے ہیں۔ مماسی سطح مستوی کی مساوات معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ اس سطح مستوی پر ت کوئی نقطہ ہے جس کے محدد (لا، ما، ے) ہیں، اگر ن کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو

م۲ ت۲ = ے − ی، م۱ ت۱ = (جف ی)/(جف لا) مف لا = (جف ی)/(جف لا) (لا − لا)

م۲ ت۲ = (جف ی)/(جف ما) (ما − ما) اور اس لئے (۲) کی رو سے

$$\text{ے} - \text{ی} = \frac{\text{جفا ی}}{\text{جفا لا}}(\text{لا} - \text{لا}) + \frac{\text{جفا ی}}{\text{جفا ما}}(\text{ما} - \text{ما}) \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$

یہ سطح کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کی مماسی سطح مستوی کی مساوات ہے جس میں لا، ما، ے مماسی سطح پر کے کسی نقطہ کے دائریار وال محددیں۔

جب سطح کی مساوات ف (لا، ما، ی) = ۰ ہو تو $\frac{\text{جفا ی}}{\text{جفا لا}}$، $\frac{\text{جفا ی}}{\text{جفا ما}}$ کی قیمتیں (۱) اور (۱) سے درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لا} - \text{لا})\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + (\text{ما} - \text{ما})\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + (\text{ے} - \text{ی})\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \text{۰} \quad \ldots (\text{۳}')$$

عماد کی سمتی جیوب التمام دائر محددوں لا، ما، ے کے سروں کے متناسب ہوتی ہیں [۸۹، ا (۶)] اس لئے عماد کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\frac{\text{جفا ی}}{\text{جفا لا}}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\frac{\text{جفا ی}}{\text{جفا ما}}} = -(\text{ے} - \text{ی}) \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}} = \frac{\text{ے} - \text{ی}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} \quad \ldots\ldots (\text{۴}')$$

مشق ۱۔ مساوات ف (لا، ما، ی) = لا² + ما² + ی² − ا² = ۰ سے نصف قطر ا کا ایک کرہ تعبیر ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \text{۲ لا}،\ \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = \text{۲ ما}،\ \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \text{۲ ی}$$

اس لئے (لا، ما، ی) پر کی مماسی سطح مستوی ہے:-

$$(\text{لا} - \text{لا})\,\text{۲ لا} + (\text{ما} - \text{ما})\,\text{۲ ما} + (\text{ے} - \text{ی})\,\text{۲ ی} = \text{۰}$$

یا لا لا + ما ما + ی ے = لا² + ما² + ی² = ا²

کیونکہ (لا، ما، ی) کرہ پر واقع ہے۔ اگر ہم (لا، ما، ی) کو دائرہ محدد لیں اور نقطۂ تماس کے محدد (لا۱، ما۱، ی۱) ہوں تو مساوات بالا ہوگی

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{ی}\,\text{ی}_1 = \text{ا}^2$$

عماد کی مساواتیں ہیں:-

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{2\,\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{2\,\text{ما}_1} = \frac{\text{ی}-\text{ی}_1}{2\,\text{ی}_1} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = \frac{\text{ی}}{\text{ی}_1}$$

اگر (لا، ما، ی) کو دائرہ محدد مانا جائے تو مساواتیں ہیں:-

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = \frac{\text{ی}}{\text{ی}_1}$$

عماد صریحاً مبدأ میں سے گزرتا ہے جو کرہ کا مرکز ہے۔

مشق ۲۔ مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2 = 1$ سے ایک ایسی سطح تعبیر ہوتی ہے جس کو مرکز دار مخروطی نما کہتے ہیں (اس کی مستوی تراش بالعموم ایک مرکز دار مخروطی ہوتی ہے)، نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کی مماسی سطح اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

مشق ۳۔ مساوات $\text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2 - 2\,\text{لا} = 0$ سے ایک غیر مرکز دار مخروطی نما تعبیر ہوتا ہے۔ نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کی مماسی سطح مستوی اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

مشق ۴۔ مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2 = 0$ سے جہاں ا، ب، ج ایک ہی علامت کے نہیں ہیں ایک مخروط تعبیر ہوتا ہے جس کا راس مبدأ پر ہے، اس کے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر مماسی سطح اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

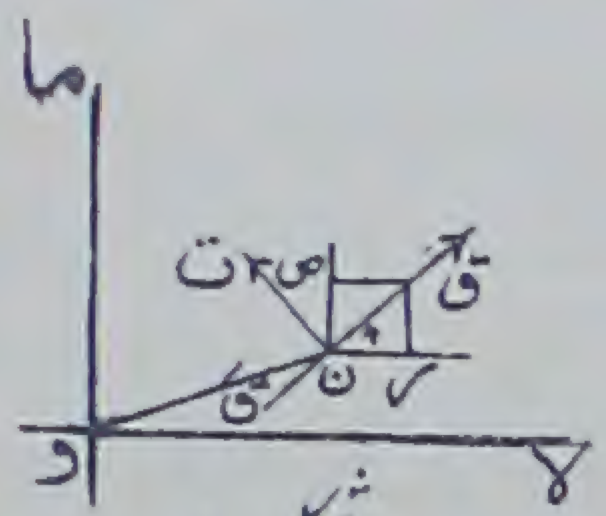
اگر $\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2$ تو مشتقات

$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}$ سب صفر ہوتے ہیں جب کہ

$\text{لا} = \text{ما} = \text{ی} = 0$، مخروط کی ہر ایک مماسی سطح مستوی مبدأ میں سے گزرتی ہے

اور مبدأ میں سے گزرنے والا کوئی خاص عماد نہیں ہے، مماسی سطح مستوی اور عماد کی مساواتیں مبدأ کے لئے غیر معین شکل اختیار کرلیتی ہیں۔ سطح پر کے خاص خاص نقطوں کے لئے ممکن ہے کہ تینوں جزوی مشتقات میں سے ہر ایک صفر ہو، اس صورت میں اس نقطہ پر کوئی خاص مماسی سطح یا عماد نہیں کھنچ سکیگا۔ ان نقطوں کو بالعموم مخروطی نقطے کہتے ہیں۔ اس کی سادہ مثال مخروط کا راس ہے۔

۹۲۔ کسی دی ہوئی سمت میں تبدیلی کی شرح۔ اکثر اوقات اس شرح کا معلوم کرنا ضروری ہوتا ہے جس کے مواق کسی ایک نقطہ کے محدودوں کا تفاعل ایک دی ہوئی سمت میں بدلتا ہے۔ مثلاً ٹھنڈے ہونیوالے ایک ٹھوس جسم کے اندر کسی نقطہ پر تپش کی کمی کی شرح بالعموم اس نقطہ میں سے گزرنے والے مختلف خطوں پر مختلف ہوتی ہے۔



شکل ۵۰

(۱) فرض کرو کہ ع دو متغیروں کا تفاعل ف (لا، ما) ہے اور نقطہ ن (لا، ما) پر اور نقطہ ق (لا + مف لا، ما + مف ما) پر ع کی قیمتیں بالترتیب $\text{ع}_\text{ن}$، $\text{ع}_\text{ق}$ ہیں جہاں ن ر = مف لا، ر ق = ن ص = مف ما (شکل ۵۰)، تب

$$\text{ع}_\text{ن} = \text{ف (لا، ما)}$$

$$\text{ع}_\text{ق} = \text{ف (لا + مف لا، ما + مف ما)}$$

ن ق کی سمت میں ع کے بڑہنے کی اوسط شرح $(\text{ع}_\text{ق} - \text{ع}_\text{ن}) / \text{ن ق}$ ہے جسکو لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\text{ع}_\text{ق} - \text{ع}_\text{ن}}{\text{ن ق}} = \frac{\text{ع}_\text{ر} - \text{ع}_\text{ن}}{\text{ن ر}} \times \frac{\text{ن ر}}{\text{ن ق}} + \frac{\text{ع}_\text{ق} - \text{ع}_\text{ر}}{\text{ر ق}} \times \frac{\text{ر ق}}{\text{ن ق}}$$

دفعہ ۸۹، (۳) کی طرح اگر سمت ن ق کو ن ق کی سمت سے تمیز کیا جائے

اور ن ق، ولا کے ساتھ زاویہ فہ بنائے (ملاحظہ ہو دفعہ ہذا کے اختتام پر نوٹ) تو

$$\frac{ن ر}{ن ق} = جم فہ ، \frac{ر ق}{ن ق} = جب فہ$$

بعینہٖ دفعہ ۹۰ کی طرح یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ن ق ← ۰ کے لئے

(عر - عن)/ن ر اور (عق - عر)/ر ق کی انتہائیں بالترتیب

$\frac{جفا ع}{جفا لا}$ اور $\frac{جفا ع}{جفا ما}$ ہیں، اگر ن ق کو مفا س سے تعبیر کیا جائے (جہاں س کسی خطِ مستقیم یا خطِ منحنی کا طول ہے جو کسی خاص نقطہ سے ن تک ناپا گیا ہے) تو ع کے اضافہ کی اوسط شرح (عق - عن)/مفا س

یا $\frac{مفا عن}{مفا س}$ ہے اور اس لئے ن ق کی سمت میں ع کے اضافہ کی شرح

$$\frac{جفا ع}{جفا س} = \frac{جفا ع}{جفا لا} جم فہ + \frac{جفا ع}{جفا ما} جب فہ \quad ......(۱)$$

ہے، اگر ن ت کی سمت میں جو ن ق پر عمود وار ہے ع کے اضافہ کی شرح کو $\frac{جفا ع}{جفا سَ}$ سے تعبیر کیا جائے تو چونکہ ن ت، و لا کی سمت کے ساتھ

زاویہ فہ + $\frac{\pi}{۲}$ بناتا ہے، اس لئے

$$\frac{جفا ع}{جفا سَ} = - \frac{جفا ع}{جفا لا} جب فہ + \frac{جفا ع}{جفا ما} جم فہ \quad ......(۲)$$

(۲) اگر ع تین متغیروں کا تفاعل ف (لا، ما، ی) ہو تو بعینہٖ اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ن ق کی سمت میں اضافہ کی شرح

$\frac{جفا ع}{جفا س}$ حسب ذیل ہے

جفا ع / جفا س = ل، جفا ع / جفا لا + م، جفا ع / جفا ما + ن، جفا ع / جفا ی ..... (۳)

جہاں ل، م، ن، سمتی جیوب التمام ہیں ن ق کی۔

اگر (۱) اور (۲) کو جفا ع / جفا لا ، جفا ع / جفا ما کے لئے حل کیا جائے تو

جفا ع / جفا لا = جفا ع / جفا س جم فہ − جفا ع / جفا سَ جب فہ ..... (آ)

جفا ع / جفا ما = جفا ع / جفا س جب فہ + جفا ع / جفا سَ جم فہ ..... (۲َ)

مساواتیں (۱)، (۲) اور (۳) دفعہ ۹۰ کی مساواتوں میں ت کو س یا سَ کے مساوی رکھنے سے بھی فوراً حاصل ہوسکتی ہیں، ہم نے فر ع / فر س کی بجائے علامت جفا ع / جفا س کو اس لئے استعمال کیا ہے کہ ہم دو (یا تین) غیر متعلق سمتوں میں ع کی تبدیلی کی شرح معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اس صورت میں اور اس کے مشابہ صورتوں میں رموز احصا سے جو مفہوم تعبیر ہوتا ہے اُس کو ہمیشہ ذہن میں رکھنا چاہیئے۔

اِن ضابطوں کے استعمال کے لئے باب ہذا کے اختتام پر کی مثالیں ملاحظہ ہوں (سوالات ۹ تا ۱۳)

زاویوں کے متعلق اشارات۔ ابواب ماقبل میں صرف اُن مثبت یا منفی حادہ زاویوں کو بحث میں لایا گیا ہے جو سطح مستوی لا و ما میں کا کوئی خط و لا کے ساتھ بناتا ہے مگر جس وقت ایک نقطہ میں سے گزرنے والے نصف خطوں سے بحث کی جائے مثلاً صورت (۱) میں زاویہ کے حادہ ہونے کی پابندی کو ترک کیا جاسکتا ہے اور زاویہ کو قطبی محددوں کے زاویہ طہ کی طرح صفر سے ۲ π تک یا − π سے π تک بدلنے والا فرض کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً ن قَ، و لا کے ساتھ زاویہ (فہ + π) یا فہ − π بناتا ہے، اس نئی قرارداد کے موافق زاویہ کی جیب التمام منفی بھی ہوسکتی ہے۔ فضا میں

خطوط کے لئے دفعہ ۹۸ ا (۳) کی مانند سمت کی تعیین کرنا ہمیشہ کافی ہوتا ہے۔

۱۴۳ **اعلیٰ رتبوں کے مشتقات۔** ع = ف (لا، ما) کے مشتقات بالعموم لا اور ما کے تفاعل ہوتے ہیں اور اس لئے ان کے بھی مشتقات ہو سکتے ہیں۔ پس ہمیں دوسرے، تیسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بھی حاصل ہوتے ہیں۔ ان کو بھی ایک متغیر کے تفاعلوں کی طرح تعبیر کیا جاتا ہے:-

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\text{، }\frac{\text{جف}^3\text{ع}}{\text{جف ما}^3}\text{، ......، }\text{ع}_{\text{لالا}}\text{، }\text{ع}_{\text{ماماما}}\text{، }\text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا، ما})\text{، }\text{ف}_{\text{ماماما}}(\text{لا، ما})$$

خطوطِ وحدانی اور اس کے اندر کے حروف کو بالعموم ترک کر دیا جاتا ہے، اس طرح آخری دو علامات کو $\text{ف}_{\text{لالا}}$، $\text{ف}_{\text{ماماما}}$ لکھا جاتا ہے۔

نیز $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ کا ما مشتق ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)\quad\text{یا}\quad\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}}$$

اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کا لا مشتق ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)\quad\text{یا}\quad\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}$$

جب تفاعل زیر بحث تمام مسلسل ہوں تو یہ دو تفاعل مساوی ہوتے ہیں (دیکھو ذیل میں)، تمثیلاً فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{ا لا}^{\text{م}}\text{ ما}^{\text{ن}}$، تو

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{م ا لا}^{\text{م}-1}\text{ ما}^{\text{ن}}\text{، }\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}} = \text{ن م ا لا}^{\text{م}-1}\text{ ما}^{\text{ن}-1}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ن ا لا}^{\text{م}}\text{ ما}^{\text{ن}-1}\text{، }\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \text{م ن ا لا}^{\text{م}-1}\text{ ما}^{\text{ن}-1}$$

اس لئے (جف² ع) / (جف لا جف ما) = (جف² ع) / (جف ما جف لا) جبکہ ع = ا لا^م ما^ن

بالفاظ دیگر تفرق کی ترتیب سے کچھ فرق نہیں آتا یعنی لا کے اور ما کے لحاظ سے تفرق کرنے کے عمل باہم بدل سکتے ہیں۔

مشق۔ ثابت کرو کہ یہ دو مشتق مساوی ہوں گے جبکہ

(۱) ع = لا جب ما + ما جب لا (۲) ع = لا لوگ ما (۳) ع = سن⁻¹ (ما / لا)

علامت (جف⁵ ع) / (جف لا² جف ما³) سے یہ مراد ہے کہ پہلے ع کو ما کے لحاظ سے تین دفعہ اور پھر لا کے لحاظ سے دو دفعہ تفرق کیا گیا ہے، اسی طرح علامت

(جف⁵ ع) / (جف ما³ جف لا²)

سے یہ مراد ہے کہ ع کو پہلے لا کے لحاظ سے دو دفعہ اور پھر ما کے لحاظ سے تین دفعہ تفرق کیا گیا ہے۔

اسی طرح متغیروں کی کسی تعداد والے تفاعل کے اعلیٰ مشتقوں کے لئے اسی قسم کے معنے اور ترقیمیں استعمال کیجاتی ہیں۔

اس خاصیت مبادلہ کا صحیح اور باضابطہ ثبوت قدرے مشکل ہے۔

اس جملہ پر غور کرو:-

[ف (لا + ھ، ما + ک) - ف (لا، ما + ک) - ف (لا + ھ، ما) + ف (لا، ما)] / ھ ک ....(۱)

مشتق کی تعریف کی رو سے

نہا (ھ ← ۰) [ف (لا + ھ، ما + ک) - ف (لا، ما + ک)] / ھ = ف_لا (لا، ما + ک)

نہا (ھ ← ۰) [ف (لا + ھ، ما) - ف (لا، ما)] / ھ = ف_لا (لا، ما)

اس لئے ھ ← ۰ کے لئے (۱) کی انتہا ہے

{ف (لا، ما + ک) - ف (لا، ما)} / ک .... (۲)

نیز ک ← ۰ کے لئے (۲) کی انتہا ف (لا، ما) کا ما مشتق $\text{ف}_{\text{مالا}}$ ہے۔
اگر (۱) کے شمار کنندہ میں دوسری اور تیسری رقموں کو باہم بدل دیا جائے اور پہلے ک ← ۰ کے لئے اور بعد میں ھ ← ۰ کے لئے انتہائیں معلوم کی جائیں تو ہمیں $\text{ف}_{\text{لاما}}$ حاصل ہوتا ہے پس $\text{ف}_{\text{مالا}}$ اور $\text{ف}_{\text{لاما}}$ دونوں ایک ہی رقم کی انتہائیں لینے سے حاصل ہوتے ہیں۔
لیکن یہ فرض کرلینا کہ ھ اور ک کے کسی ترتیب سے بھی صفر کی طرف استدقاق کرنے سے انتہائیں وہی رہینگی مسئلہ زیر بحث کو ثابت شدہ فرض کر لینے کے مترادف ہے۔ ایک سادہ مثال سے واضح ہو جائیگا کہ یہ ضروری نہیں کہ مختلف ترتیبوں سے انتہائیں لینے سے ہمیشہ وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے

تفاعل (ھ + ۲ک) / (ھ + ک) کو لو۔

$$\underset{\text{ھ}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ھ}+۲\text{ک}}{\text{ھ}+\text{ک}} = \frac{۲\text{ک}}{\text{ک}} ، \quad \underset{\text{ک}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \left\{ \underset{\text{ھ}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ھ}+۲\text{ک}}{\text{ھ}+\text{ک}} \right\} = \underset{\text{ک}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{۲\text{ک}}{\text{ک}} = ۲$$

$$\underset{\text{ک}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ھ}+۲\text{ک}}{\text{ھ}+\text{ک}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ھ}} \quad \underset{\text{ھ}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \left\{ \underset{\text{ک}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ھ}+۲\text{ک}}{\text{ھ}+\text{ک}} \right\} = \underset{\text{ھ}\leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ھ}}{\text{ھ}} = ۱$$

یہ کہنے کی ضرورت نہیں کہ نہ اس مثال میں اور نہ ہی (۱) میں ھ اور ک صفر ہوتے ہیں، صفر ھ اور ک کی قیمت نہیں بلکہ انتہا ہے۔
اگر تمام تفاعیل زیر بحث کو مسلسل فرض کیا جائے تو عمل کچھ اس طرح ہو سکتا ہے، اختصار کی خاطر فرض کرو کہ

فا (لا) = ف (لا، ما + ک) - ف (لا، ما)

تب (۱) کا شمار کنندہ ہوگا، فا (لا + ھ) - فا (لا)، اوسط قیمت کے مسئلہ سے

فا (لا + ھ) - فا (لا) = ھ $\text{فا}_{\text{لا}}$ (لا + طہ ھ) جہاں ۰ < طہ < ۱

یا تفاعل ف (لا، ما) پر پھر لوٹ آنے سے

فا (لا + ھ) - فا (لا) = ھ [$\text{ف}_{\text{لا}}$ (لا + طہ ھ، ما + ک)
- $\text{ف}_{\text{لا}}$ (لا + طہ ھ، ما)]

جس سے (۱) ہو جاتی ہے

$$\{\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما} + \text{ک}) - \text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما})\} / \text{ک} \ldots\ldots (۲)$$

اب (۲) میں ما کا جو تفاعل ہے اس پر اوسط قیمت کا مسئلہ لگاؤ

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما} + \text{ک}) - \text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما})$$

$$= \text{ک ف}_{\text{لاما}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما} + \text{طہ ک}) \text{ جہاں، } \text{طہ} < ۱$$

اور (۱) ہو جاتی ہے $\text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما} + \text{طہ ک}) \ldots\ldots (۳)$

اب فا (لا) کی بجائے $\text{فنا}(\text{ما}) = \text{ف}(\text{لا} + \text{ھ}، \text{ما}) - \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})$ لینے سے (۱) کا شمار کنندہ $\text{فنا}(\text{ما} + \text{ک}) - \text{فنا}(\text{ما})$ ہے، اس پر اوسط قیمت کا مسئلہ لگانے اور حسب سابق عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (۱) مساوی ہے

$$\text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا} + \text{طہ ھ}، \text{ما} + \text{طہ ک}) \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس لئے دونوں جملے (۳) اور (۴) مساوی ہیں۔ چونکہ تفاعل مسلسل ہیں اسلئے ھ اور ک خواہ کسی ترتیب سے صفر کی طرف استدقاق کریں انتہائیں باہم مساوی ہونگی یعنی

$$\text{ف}_{\text{مالا}} = \text{ف}_{\text{لاما}}$$

مبادلہ کی خاصیت کو استقراء کے ذریعہ بڑے رتبہ کے مشتقات تک وسعت دیجا سکتی ہے بشرطیکہ سب تفاعلوں کو مسلسل تصور کیا جائے۔ مثلاً چونکہ

$$\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}}$$

$$\frac{\text{جف}^{3}\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^{3}\text{ع}}{\text{جف لا جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^{2}}{\text{جف لا جف ما}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{جف}^{2}}{\text{جف ما جف لا}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^{3}\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}^{2}}$$

اور عام طور پر

$$\frac{\text{جف}^{\text{ف+ق+ر}}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{\text{ف}}\,\text{جف ما}^{\text{ق}}\,\text{جف ی}^{\text{ر}}}=\frac{\text{جف}^{\text{ف+ق+ر}}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{\text{ف}}\,\text{جف ی}^{\text{ر}}\,\text{جف ما}^{\text{ق}}}=\frac{\text{جف}^{\text{ف+ق+ر}}\,\text{ع}}{\text{جف ی}^{\text{ر}}\,\text{جف لا}^{\text{ف}}\,\text{جف ما}^{\text{ق}}}=\ldots\ldots$$

جو آسانی سے استقرا سے ثابت ہو سکتا ہے۔

مشق ۱۔ شکل ۴۸ دفعہ ۹۱ میں فرض کرو کہ ح حجم ہے جو سطح ا ن د ج محدود ل کی سطوح مستوی اور سطوح مستوی م ن، ل ن سے گھرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جف ح}}{\text{جف لا}}=$ م س ن ا کا رقبہ، $\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ح}}{\text{جف ما جف لا}}=$ س ن

(۲) $\frac{\text{جف ح}}{\text{جف ما}}=$ ل س ن د کا رقبہ، $\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ح}}{\text{جف لا جف ما}}=$ س ن

اگر ح کو تفاعل ف (لا، ما) فرض کیا جائے تو ہمیں مبادلہ کی خاصیت کا ہندسی ثبوت حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۲۔ اگر ع = لوگ ر جہاں $\text{ر}^2=(\text{لا}-\text{ا})^2+(\text{ما}-\text{ب})^2$ اور (لا - ا) اور (ما - ب) ایک ساتھ صفر نہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}}+\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{2}}=0$$

$$\frac{\text{جف}(\text{ر}^2)}{\text{جف لا}}=2(\text{لا}-\text{ا})\text{، نیز }\frac{\text{جف}(\text{ر}^2)}{\text{جف لا}}=2\text{ر}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}}\text{ اسلئے }\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}}=\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}=\frac{\text{ف لوگ ر}}{\text{ف ر}}\times\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}}=\frac{1}{\text{ر}}\times\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}}=\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}^2}$$

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}}=\frac{1}{\text{ر}^2}+(\text{لا}-\text{ا})\frac{\text{جف ر}^{-2}}{\text{جف لا}}=\frac{1}{\text{ر}^2}-\frac{2(\text{لا}-\text{ا})^2}{\text{ر}^4}$$

اسی طرح $\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{2}}=\frac{1}{\text{ر}^2}-\frac{2(\text{ما}-\text{ب})^2}{\text{ر}^4}$

اور اس لئے جمع کرنے سے نتیجہ مطلوبہ حاصل ہو جاتا ہے کیونکہ $\text{ر}^2 = (\text{لا} - \text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ب})^2$

مشق ۳۔ اگر $\text{ع} = \frac{1}{\text{ر}}$ جہاں $\text{ر}^2 = (\text{لا} - \text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ب})^2 + (\text{ی} - \text{ج})^2$ اور $(\text{لا} - \text{ا})$، $(\text{ما} - \text{ب})$، $(\text{ی} - \text{ج})$ ایک ساتھ صفر نہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ی}^2} = 0$$

برق کا بار نقطہ (ا، ب، ج) پر جمع ہے، اس کا قوہ (لا، ما، ی) پر $\frac{\text{م}}{\text{ر}}$ ہے، پس قوہ ؤ مندرجہ بالا مساوات کو پورا کرتا ہے، اس مساوات کو لاپلاس کی مساوات کہتے ہیں۔

اگر برق کے بار م_1، م_2، ..... بالترتیب نقاط $(\text{ا}_1، \text{ب}_1، \text{ج}_1)$، $(\text{ا}_2، \text{ب}_2، \text{ج}_2)$، ..... پر جمع کئے جائیں تو ان باروں کا قوہ ؤ نقطہ (لا، ما، ی) پر $\text{مج} \left(\frac{\text{م}}{\text{ر}}\right)$ ہوگا جہاں

$$\text{ر}_1^2 = (\text{لا} - \text{ا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ب}_1)^2 + (\text{ی} - \text{ج}_1)^2$$

یعنی کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر جو ان کمیتوں میں سے کسی کمیت پر منطبق نہ ہو قوہ اسی مساوات کو پورا کرتا ہے۔

مشق ۴۔ اگر $\text{ع} = \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})$ اور لا، ما تفاعل ہیں ت کے، $\frac{\text{ف}^2\text{ع}}{\text{فت}^2}$ معلوم کرو۔

$$\frac{\text{فع}}{\text{فت}} = \frac{\text{جفع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فلا}}{\text{فت}} + \frac{\text{جفع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فما}}{\text{فت}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\text{ف}^2\text{ع}}{\text{فت}^2} = \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{فع}}{\text{فت}}\right) = \frac{\text{جفع}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{ف}^2\text{لا}}{\text{فت}^2} + \frac{\text{فلا}}{\text{فت}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جفع}}{\text{جف لا}}\right)$$
$$+ \frac{\text{جفع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{فت}^2} + \frac{\text{فما}}{\text{فت}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جفع}}{\text{جف ما}}\right)$$

چونکہ $\frac{\text{جفع}}{\text{جف لا}}$ تفاعل ہے لا، ما کا اس لئے اس کا ت، مشتق اسی طرح معلوم ہو سکتا ہے جس طرح $\frac{\text{فع}}{\text{فت}}$، (۱) میں معلوم کیا گیا ہے۔

یعنی (۱) میں ع کی بجائے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ لکھو :-

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف ت}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\,\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}}\,\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}}$$

اسی طرح $\frac{\text{ف}}{\text{ف ت}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\,\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}\,\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}}$

یہ قیمتیں مندرج کرنے اور یہ ملحوظ رکھنے سے کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}}=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}$

$$\frac{\text{ف}^2\text{ع}}{\text{ف ت}^2}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{ف}^2\text{لا}}{\text{ف ت}^2}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{ف ت}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\left(\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}}\right)^2$$

$$+2\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\,\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}}\,\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}\left(\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}}\right)^2$$

مشق ۵ - اگر ف (لا، ما) = ۰ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{ف لا}^2}$ مساوات

$$\text{ف}_{\text{ما}}\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{ف لا}^2}+\text{ف}_{\text{ماما}}\left(\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}\right)^2+2\,\text{ف}_{\text{لاما}}\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}+\text{ف}_{\text{لالا}}=0$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اسے براہ راست بھی حاصل کیا جاسکتا ہے، یا مشق ۴ میں ت = لا رکھو اور دیکھو کہ لا اور ما کی ہر قیمت کے لئے ع = ف (لا، ما) = ۰ اور بناءً علیہ $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ت}}$ اور $\frac{\text{ف}^2\text{ع}}{\text{ف ت}^2}$ میں سے ہر ایک صفر ہے اور $\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}}=1$، $\frac{\text{ف}^2\text{لا}}{\text{ف ت}^2}=0$

مشق ۴ سے امثلہ ۲۶، ۲۷، ۲۸ کے نتائج اسی طرح حاصل کرو۔

مشق ۶ - اگر ع = ف (ما + ا لا) تو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}=\text{ا}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ (۲) $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}=\text{ا}^2\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}$

مشق ۷۔ اگر ع = ف (لا + ا ت) + فا (لا ۔ ا ت) تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف ت}^{2}} = \text{ا}^{2}\,\frac{\text{جف}^{2}\text{ع}}{\text{جف لا}^{2}}$$

اس کی تصدیق کرو جبکہ ع = ا جم (لا + ا ت) + ب جب (لا ۔ ا ت)

۹۴۔ پورا تفرقہ ۔ اگر ع غیر تابع متغیروں لا اور ما کا کوئی تفاعل ہو تو ع کا پورا تفرقی یا تفرقہ (دفعہ ۹۰ کی رو سے) ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اب یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ اگر دو غیر تابع متغیروں لا اور ما کے کوئی دو تفاعل فا (لا، ما) اور سا (لا، ما) دئے ہوئے ہوں تو کیا ہمیشہ کوئی اور تفاعل ع ایسا ہوتا ہے کہ

$$\text{فا (لا، ما) فرلا} + \text{سا (لا، ما) فرما} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس کا تفرقہ ہو۔

اگر لا اور ما غیر تابع نہ ہوں بلکہ ما، لا کا کوئی تفاعل، فرض کرو ف (لا) ہو تو ہم ما کی بجائے ف (لا) اور فرما کی بجائے فَ (لا) فرلا لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح سے جملہ (۲)، فا (لا) فرلا کی شکل کا ہو جاتا ہے اور اس صورت میں (ملاحظہ ہو دفعہ ۸۲) ایک تفاعل ایسا ہوتا ہے جس کا لا، مشتق فا (لا) یعنی جبکا تفرقہ فا (لا) فرلا ہو۔

لیکن اگر لا اور ما غیر تابع ہوں تو صورت حال اور ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ جملہ (۲) کسی تفاعل ع کا پورا تفرقہ ہے، تب جملات (۱) اور (۲)، فرلا اور فرما کی سب قیمتوں کے لئے باہم مساوی ہونگے، چونکہ فرلا اور فرما غیر تابع ہیں، اس لئے ہم لے سکتے ہیں فرما = جبکہ فرلا ± ۰ اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{فا (لا، ما)} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اور اسی طرح سے لا اور ما کی سب قیمتوں کے لئے

$$\text{سا (لا، ما)} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$$

اس لئے $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف سا}}{\text{جف لا}}$ ......(۳)

اسلئے جملہ (۲) مکمل تفرقہ نہیں ہو سکتا تاوقتیکہ $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف سا}}{\text{جف لا}}$

اس لئے شرط (۳) ضروری شرط ہے، نیز یہی شرط کافی بھی ہے، لیکن کافی ہونے کے ثبوت کے لئے طالب علم تفرقی مساواتوں کی کتابیں مطالعہ کرے۔

اگر ف، ق اور ر تین غیر تابع متغیروں لا، ما، ی کے تفاعل ہوں، تو اس امر کے لئے کہ

$$\text{ف فرلا + ق فرما + ر فری}$$

پورا تفرقہ ہو یعنی لا، ما، ی کا ایک تفاعل ع ایسا موجود ہو کہ

$$\text{فرع = ف فرلا + ق فرما + ر فری}$$

ضروری اور کافی شرائط یہ ہیں:-

$$\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} ،\quad \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}} ،\quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}$$

طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ یہ شرائط ضروری ہیں۔

مشق ۱- (۳ لا² - ۴ لا ما) فرلا + (۳ ما² - ۲ لا²) فرما پورا تفرقی ہے کیونکہ

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{(۳ لا}^2\text{ - ۴ لا ما)} = \text{- ۴ لا} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\text{(۳ ما}^2\text{ - ۲ لا}^2\text{)}$$

اور $\text{ع = لا}^3\text{ - ۲ لا}^2\text{ ما + ما}^3$

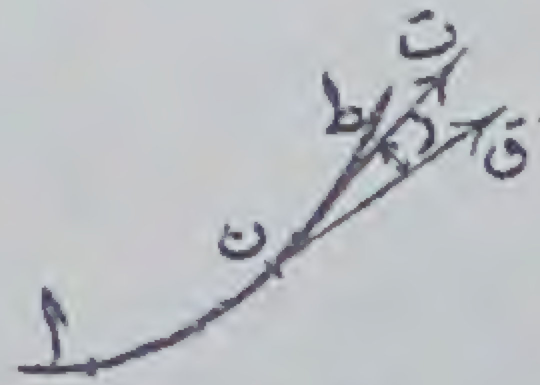
مشق ۲- اگر ف = ما ی (۲ لا + ما + ی)، ق = ی لا (لا + ۲ ما + ی)

ر = لا ما (لا + ما + ۲ ی)

تو ثابت کرو کہ فرع = ف فرلا + ق فرما + ر فری

جہاں $\text{ع = لا}^2\text{ ما ی + ما}^2\text{ ی لا + ی}^2\text{ لا ما}$

۹۵ - علم حیل میں جزوی تفرق کا استعمال - فرض کرو کہ مستوی منحنی ا ن ط ایک ذرہ کا طریق ہے جس پر ایک قوت ق ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو مماس ن ت کے ساتھ زاویہ ز بناتی ہے جہاں ق اور ز دونوں نقطہ ن کے محددوں لا اور ما کے تفاعل ہیں۔ فرض کرو کہ ا (لا، ب ا) سے مقام ن تک جانے میں کام ک ہوتا ہے۔ نیز قوس ا ن کو س سے تعبیر کرو۔ صغاریوں کے پہلے رتبہ تک فاصلہ فر س طے کرنے میں جو کام ہوتا ہے وہ یہ ہے


شکل ۵۱

$$\text{فرک} = \text{ق} (\text{جم ز}) \text{ فرس}$$

فرض کرو کہ ن ت اور ن ق محور لا کے ساتھ بالترتیب زاوئے فما اور سما بناتے ہیں، تب

$$\text{جم فما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\text{، جب فما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$

اور چونکہ جم ز = جم (فما - سما)

$$\text{ق جم ز} = \text{ق جم سما} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{ق جب سما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{لا} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$

جہاں لا = ق جم سما، ما = ق جب سما جو محوروں کے متوازی ق کے اجزائے ترکیبی ہیں۔

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{فرک} = \left(\text{لا} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) \text{فرس} \quad \ldots\ldots (1)$$

اب فرض کرو کہ لا فرلا + ما فرما کسی وحید القیمت تفاعل ف (لا، ما) کا مکمل تفرقہ ہے۔ اسلئے $\text{لا} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$ اور $\text{ما} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$، جس سے

$$\text{فک} = \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فلا}}{\text{فس}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فما}}{\text{فس}}\right)\times\text{فس} = \frac{\text{فف}}{\text{فس}}\times\text{فس}$$

$$= \text{فف}$$

اسلئے جب ذرہ منحنی پر حرکت کرتا ہے ک کے بدلنے کی شرح $\frac{\text{فک}}{\text{فس}}$ مساوی ہے تفاعل ف (لا، ما) کے بدلنے کی شرح $\frac{\text{فف}}{\text{فس}}$ کے اور ک میں کوئی تبدیلی فک تفاعل ف (لا، ما) کی متناظر تبدیلی فف کے مساوی ہوتی ہے۔ ذرہ کے ا سے ن تک حرکت کرنے میں جو کام ہوتا ہے وہ ف (لا، ما) کی تبدیلی کے مساوی ہے، پس

$$\text{ک} = \text{ف (لا، ما)} - \text{ف (ا، ب)} \quad\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر کَ وہ کام ہو جو ذرۂ مذکور کے ا سے ن تک کسی مختلف راستے سے حرکت کرنے میں ہوتا ہو اور اگر اس راستہ کا طول سَ ہو تو حسب سابق

$$\text{فکَ} = \frac{\text{فف}}{\text{فسَ}}\times\text{فسَ} = \text{فف}$$

$$\text{یعنی کَ} = \text{ف (لا، ما)} - \text{ف (ا، ب)} = \text{ک}$$

اس لئے اس صورت میں ا سے ن تک جانے میں قوت جو کام کرتی ہے وہ ا اور ن کے درمیانی راستہ پر منحصر نہیں ہوتا اور جب ا ثابت ہو اور ن متغیر تو کام محض ن کے محددوں کا تفاعل ہوتا ہے، جب ن، ا پر منطبق ہو یعنی جب راستہ بند منحنی ہو تو کام صفر ہوتا ہے (دیکھو مثال ۲ اس صورت کی توضیح کے لئے جس میں ف (لا، ما) کثیر القیمت ہو)

برعکس اس کے فرض کرو کہ لا فلا + ما فما کمل تفرقہ نہیں ہے، اس صورت میں فس کا سر مساوات (۱) میں ایک تفاعل ف (لا، ما) کا پورا مشتق نہیں ہے۔ ا سے ن تک جانے میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں راستہ کی مساوات استعمال کرکے ما کو لا کی رقوم میں بیان کرنا چاہئے۔ تب (۱) ہو جائیگی

$$\text{فک} = \left(\text{لا} + \text{ما}\,\frac{\text{فما}}{\text{فلا}}\right)\frac{\text{فلا}}{\text{فس}}\times\text{فس} = \left(\text{لا} + \text{ما}\,\frac{\text{فما}}{\text{فلا}}\right)\text{فلا} \quad\ldots (۱\text{َ})$$

اور (اَ) میں فرلا کا سر صرف لا کا تفاعل ہے، مختلف راستوں کے لئے تفاعل
لا + ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی مختلف قیمتیں ہونگی اور اس لئے ک صرف ن کے محددوں
پر موقوف نہیں ہوگا بلکہ ا سے ن تک پہنچنے کے راستہ پر بھی موقوف ہوگا (دیکھو
مثال ۲)

اگر ا ن ق مستوی منحنی نہ ہو تو اسی طریقہ سے جس سے کہ مستوی منحنی کی صورت
میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$ معلوم کئے گئے تھے (دفعہ ۶۲) یہ معلوم ہو سکتا
ہے کہ مماس ن ت کی سمتی جیوب التمام یہ ہیں (دفعہ ۸۹، ۱، ۳ (۳َ))

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}،\ \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$$

اگر ن ق کی سمتی جیوب التمام لَ، مَ، نَ ہوں تو

$$\text{جم ز} = \text{لَ}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{مَ}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \text{نَ}\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$$

اور $\text{فرک} = \left(\text{لا}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \text{ے}\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)\text{فرس}$ ......(۳)

جہاں لا = لَ ق، ما = مَ ق، ے = نَ ق محوروں کے متوازی
قوت ق کے اجزائے ترکیبی ہیں۔

حسب سابق ہم دیکھتے ہیں کہ اگر
لا فرلا + ما فرما + ے فری کسی وحید القیمت تفاعل ف (لا، ما، ی) کا مکمل تفرقہ ہو تو
فرک = فرف اور ک = ف (لا، ما، ی) - ف (اَ، بَ، جَ) جہاں
اَ، بَ، جَ محدد ہیں نقطہ ا کے۔ اس صورت میں کام ک ا سے ن تک
جانے کے لئے کسی خاص راستہ پر منحصر نہیں ہے۔

جب لا فرلا + ما فرما + ے فری پورا تفرقہ نہ ہو تو راستہ کی مساوات کو استعمال میں لانا

ضروری ہوگا اور اس صورت میں کہ محض ا اور ن کے محدود ا پر ہی موقوف نہیں ہوگا بلکہ ا اور ن کے درمیان کے راستہ پر بھی منحصر ہوگا۔

جب لا فرلا + ما فرما + ے فری مکمل تفرقہ ہو تو قوت ق تحفظی قوت کہلاتی ہے۔ اس صورت میں اس کے اجزائے ترکیبی ایک توتی تفاعل ع یا قوہ۔ و کے مشتقات ہوتے ہیں

لا = جف ع / جف لا یا لا = − جف و / جف لا ، فرک = فرع یا فرک = − فرو

مشق ۱۔ اگر ق = م / ر^۲ جہاں ر^۲ = لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = و ن^۲ اور ق کی سمت و سے ن کی طرف ہو تو ق تحفظی قوت ہوگی۔

کیونکہ لا = (لا / ر) ق = م لا / ر^۳ ، ما = م ما / ر^۳ ، ے = م ی / ر^۳

اور فرک = لا فرلا + ما فرما + ے فری = (م / ر^۳) (لا فرلا + ما فرما + ی فری)

یا فرک = (م / ر^۲) فرر = فر (− م / ر) کیونکہ لا فرلا + ما فرما + ی فری = ر فرر

اس لئے ک = − م / ر + مستقل اور اگر و = م / ر

تو لا = − جف و / جف لا ، ما = − جف و / جف ما ، ے = − جف و / جف ی

مقام ن سے مقام ط تک جانے میں قوت کا کام ہے

م / و ن − م / و ط جو ن اور ط کے درمیانی راستہ پر منحصر نہیں ہے۔

مشق ۲۔ فرض کرو کہ لا = − ما / ر^۲ ، ما = لا / ر^۲ جہاں

ر^۲ = لا^۲ + ما^۲

اس صورت میں ما / لا = مس طہ رکھنے سے

فرک = (لا فرما − ما فرلا) / ر^۲ = فر مس^{-۱} (ما / لا) = فرطہ

اور اس لئے ک = طہ + مستقل

اگر نقطہ ن، ا سے روانہ ہو کر ایک ایسا بند منحنی مرتسم کرے جس کے اندر مبدا ہو پھر ا پر آجائے تو طما میں اور بناءً علیہ ک میں ۲ π کا اضافہ ہو جائیگا۔ کام صفر نہیں ہوگا اگرچہ فرک پورا تفرقہ ہے یعنی فرطما۔ تفاعل طما کثیر القیمت ہے
اگر راستہ ایسا بند منحنی ہو کہ مبدا اس کے اندر واقع نہ ہو تو اس منحنی کی تکوین میں صفر کام ہوگا۔

مشق ۳۔ فرض کرو کہ لا = ۔ ما، ما = لا، اس صورت میں
لا فرما ۔ ما فرلا مکمل تفرقہ نہیں ہے، فرض کرو کہ ا مبدا و پر منطبق ہوتا ہے
اور راستہ مکافی ما = ج لا^2 ہے، تب (۱) کی رو سے

فرک = (۔ ج لا^2 + لا × ۲ ج لا) فرلا = ج لا^2 فرلا

ک = $\frac{1}{3}$ ج لا^3 = $\frac{1}{3}$ لا ما

اگر راستہ ما = ج لا^3 ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ک = $\frac{1}{2}$ ج لا^4 = $\frac{1}{2}$ لا ما
یعنی کام مختلف راستوں کے لئے مختلف ہے۔

۹۶۔ جزوی تفرق کا استعمال حر حرکیات میں۔

کسی حر حرکی شئے کی دی ہوئی کمیت مثلاً اکائی کمیت کی حالت مکمل طور پر تین متغیروں د، ح، طما یعنی دباؤ، حجم اور تپش مطلق سے معین ہو جاتی ہے، د، ح، طما ایک مساوات مثلاً ف (د، ح، طما) = ۰ کے ذریعہ مربوط ہوتے ہیں ایسی ہر شئے کی الگ امتیازی مساوات ہوتی ہے۔ کامل گیس کے لئے یہ مساوات ہے
د ح = ک طما جہاں ک مستقل ہے، اس لئے تین متغیروں میں سے صرف دو غیر تابع ہیں۔
چونکہ ف (د، ح، طما) = ۰، اس لئے اس کا پورا تفرقہ صفر ہے، پس

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف د}}\ \text{فرد} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ح}}\ \text{فرح} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طما}}\ \text{فرطما} = 0$$

اگر د مستقل ہو اور ح اور طما بدلیں تو فرد = ۰ اور

$$\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}} = -\frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} \div \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ح}}$$

اسی طرح $\frac{\text{جف طہ}}{\text{جف د}}$ اور $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}$ بنانے اور ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف طہ}}{\text{جف د}} \times \frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

صریحاً $$\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف طہ}}{\text{جف ح}} = +1 \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہ یاد رہے کہ ان سب جملوں میں متغیروں د، ح، طہ میں سے ایک کا مشتق بلحاظ دوسرے کے تیسرے متغیر کو مستقل مان کر حاصل کیا گیا ہے۔

اگر شے کے اندر حرارت کی ایک چھوٹی مقدار مف ق داخل کی جائے اور د، ح، طہ میں بالترتیب مف د، مف ح، مف طہ کا اضافہ واقع ہو تو مف ق اِن اضافوں میں سے کسی دو کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر طہ اور ح کو متغیر مانا جائے تو ان کی رقوم میں صغاریوں کے پہلے رتبہ تک

$$\text{فر ق} = \text{م فر طہ} + \text{ن فر ح} \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس امر کو نہایت احتیاط سے سمجھ لینا چاہیئے کہ فر طہ اور فر ح تپش اور حجم کی کوئی اختیاری خفیف تبدیلیاں ہیں۔ تین تفرقی فر طہ، فر ح اور فر د صرف مساوات (۱) کے ربط کے ذریعہ مربوط ہیں اور ان میں سے کسی دو کو حسب خواہش کوئی قیمتیں دی جا سکتی ہیں۔

مستقل حجم پر حرارت نوعی ($\text{ک}_{\text{ح}}$) سے مف طہ ← ۰ کے لئے $\frac{\text{مف ق}}{\text{مف طہ}}$ کی انتہا مراد ہوتی ہے جبکہ یہ فرض کیا جائے کہ طہ میں مف طہ کا اضافہ ہونے سے حجم نہیں بدلتا یعنی بالفاظ دیگر فر ح = ۰۔ لیکن اگر فر ح = ۰ تو مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{فر ق}}{\text{فر طہ}} = \text{م}$ یعنی $\text{ک}_{\text{ح}} = \text{م}$۔

مستقل دباؤ پر حرارت نوعی ($\text{ک}_{\text{د}}$) سے $\text{مف طہ} \to ۰$ کے لئے $\frac{\text{مف ق}}{\text{مف طہ}}$ کی انتہا مراد ہوتی ہے جبکہ یہ فرض کیا جائے کہ د مستقل ہے یعنی فرد = ۰۔ $\text{ک}_{\text{د}}$ معلوم کرنے کے لئے مساوات (۴) کو اس طرح بدلنا چاہئے کہ طہ اور د غیر تابع متغیر ہوں۔ چونکہ ح، طہ اور د کا تفاعل ہے، اس لئے

$$\text{فرح} = \frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}}\,\text{فرطہ} + \frac{\text{جف ح}}{\text{جف د}}\,\text{فرد} \quad ......(۵)$$

اور (۴) ہو جاتی ہے

$$\text{فرق} = \left(\text{م} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}}\right)\text{فرطہ} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ح}}{\text{جف د}}\,\text{فرد}$$

$$\text{اس لئے}\quad \text{ک}_{\text{د}} = \text{م} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}} = \text{ک}_{\text{ح}} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}} \quad ......(۶)$$

شئے کی لچک ازروئے دفعہ ۰،۷ ہے "$-\text{ح}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرح}}$" فرض کرو کہ $\text{چ}_{\text{طہ}}$ لچک ہے جبکہ شئے مستقل تپش پر پھیلے

$$\text{اس لئے}\quad \text{چ}_{\text{طہ}} = -\text{ح}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}$$

جہاں $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}$ اس شرط کے ماتحت بنایا گیا ہے کہ طہ مستقل ہے۔

فرض کرو کہ $\text{چ}_{\text{فہ}}$ لچک ہے جبکہ شئے حرناگذار طریقہ پر پھیلتی ہے یعنی جبکہ حرارت نہ داخل ہوتی ہے اور نہ باہر نکلتی ہے۔ ان دونوں صورتوں میں ہمیں د کے ح، مشتقوں میں تمیز کرنا چاہئے فی الحال حرناگذار پھیلاؤ کی صورت میں د کے ح، مشتق کو $\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{فہ}}$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}$ کے وہی معنے ہیں جو اوپر لئے گئے ہیں، اس لئے

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\,{}_{\text{ف}} \div \left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right) = \left\{-\text{ح}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right\} \div \left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{ف}} \text{ح} - = \frac{\text{چ}_{\text{ف}}}{\text{چ}_{\text{ط}}}$$

(۷) ....

$\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{ف}}$ معلوم کرنے کے لئے ہمیں (۴) کو اس طرح تبدیل کرنا چاہئے کہ د اور ح غیر تابع متغیر ہوں، اب

$$\text{فط} = \frac{\text{جف ط}}{\text{جف د}}\,\text{فد} + \frac{\text{جف ط}}{\text{جف ح}}\,\text{فح}$$

اور اس لئے $\text{فق} = \text{م}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{ا جف د}}\,\text{فد} + \left(\text{م}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{ا جف ح}} + \text{ن}\right)\text{فح}$ ....(۸)

$\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{ف}}$ کی قیمت (۸) سے فرق کو صفر فرض کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے

$$\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{ف}} = -\frac{\text{م}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{ا جف ح}} + \text{ن}}{\text{م}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{ا جف د}}} = -\frac{\text{م}+\text{ن}\,\frac{\text{جف ح}}{\text{جف ط}}}{\text{م}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{ا جف د}} \times \frac{\text{جف ح}}{\text{جف ط}}}$$ (۳) کی رو سے

اوپر کا شمار کنندہ $\text{ک}_{\text{د}}$ ہے اور $\text{م} = \text{ک}_{\text{ح}}$، اس لئے

$$\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{ف}} \div \left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{ا}} = -\frac{\text{ک}_{\text{د}}}{\text{ک}_{\text{ح}}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{جف د}}\,\frac{\text{جف ح}}{\text{جف ط}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}}} = \frac{\text{ک}_{\text{د}}}{\text{ک}_{\text{ح}}}$$

(۲) سے ....

اس لئے $\frac{\text{چ}_{\text{ف}}}{\text{چ}_{\text{ط}}} = \frac{\text{ک}_{\text{د}}}{\text{ک}_{\text{ح}}}$ .... (۹)

گیس کامل کے لئے $\frac{\text{ک}_{\text{د}}}{\text{ک}_{\text{ح}}}$ مستقل ہوتا ہے (فرض کرو جیم)، نیز گیس کامل کے لئے

د ح = ک طہ، اس لئے

جف د / جف ح = − د / ح

اِس لئے حرناگذار پھیلاؤ کے لئے (۷) اور (۹) کی رُو سے

فد / فح ÷ (− د / ح) = جہ یا ف / فح لوک (د ح^جہ) = ۰

یعنی د ح^جہ = مستقل

نتائج ۱ تا ۳ اور ۵ تا ۹ محض تعریفات اور مساواتوں

ف (د، ح، طہ) = ۰ اور فرق = م فطہ + ن فح

کے باضابطہ اور منظم نتائج ہیں۔

۹۷۔ چار حرحرکی ربط۔ دفعہ ۸ ماقبل میں فرق مکمل تفرقہ نہیں ہے، ہم ق کو شکل فا (طہ، ح) ۔ فا (طہ، ح) میں طہ اور ح میں کوئی اور ربط تسلیم کئے بغیر بیان نہیں کر سکتے۔ طبعی طور پر ق، طہ اور ح کا تفاعل نہیں ہے۔ شئے کو حرارت پہنچائی جا سکتی ہے اور طہ اور ح قیمتوں کی ایک سعت میں سے گذر کر پھر اپنی ابتدائی تپش اور حجم پر آ سکتے ہیں جبکہ حرارت کی اتنی ہی مقدار خارج نہیں ہوتی جو جذب کی گئی تھی، دفعہ ۹۵ سے مقابلہ کرو جبکہ فرک مکمل تفرقہ ہے، جب لا، فا اپنی ابتدائی قیمتوں ا، ب پر آ جاتے ہیں تو ک = ۰ یعنی قوت جو کام کرتی ہے وہ اُس کے مساوی ہے جو اِس کے خلاف کیا جاتا ہے۔

حرحرکیات کی کتابوں میں یہ بتایا گیا ہے کہ اگر ہم رکھیں فرق = طہ فنہ جہاں فنہ ناکارگی ہے تو ہم (۴) کی بجائے

فحا = طہ فنہ − د فح .... (۱۰)

لکھ سکتے ہیں جہاں حا ذاتی توانائی ہے اور د فح وہ کام ہے جو صغاری پھیلاؤ فح میں ہوتا ہے، فحا مکمل تفرقہ ہے یعنی حا اُن متغیروں کا تفاعل ہے جو شئے کی حالت کو متعین کرتے ہیں۔

اب ہمارے پاس چار متغیر د، ح، طہ، فہ ہیں لیکن ان میں سے صرف دو غیر تابع ہیں، اگر ح اور طہ کو غیر تابع مانا جائے تو علامت $\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$ اب کافی طور پر صاف نہیں ہے، اس سے د کا طہ، مشتق مراد ہے جبکہ ح مستقل رہے، لیکن اگر فہ اور طہ غیر تابع متغیر ہوں تو $\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$ سے مراد طہ، مشتق ہوگا جبکہ فہ مستقل رہے، اس التباس کو رفع کرنے کے لئے جس صورت میں اشتباہ کا احتمال ہو مشتق کو خطوط وحدانی کے اندر لکھ کر اس کے ساتھ اس غیر تابع متغیر کو لاحق کردینگے جس کو مستقل فرض کیا گیا ہے۔ مثلاً $\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{ح}}$ سے یہ مراد ہے کہ ح اور طہ غیر تابع متغیر ہیں اور $\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$ کے بنانے میں ح مستقل ہے۔

چونکہ فرحا کمل تفرقہ ہے، اس لئے (دفعہ ۹۴ (۳)) مساوات ۱۰ کی رو سے

$$\left(\frac{\text{جف طہ}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{فہ}} = \left(\frac{\text{جف(-د)}}{\text{جف فہ}}\right)_{\text{ح}} \text{ یا } \left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف فہ}}\right)_{\text{ح}} = -\left(\frac{\text{جف طہ}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{فہ}} \quad \ldots(۴)$$

اب فرض کرو کہ ح اور طہ غیر تابع متغیر ہیں، تب چونکہ

$$\text{فر فہ} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ح}}\,\text{فر ح} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}}\,\text{فر طہ}$$

(۱۰) ہو جاتی ہے $\text{فرحا} = \text{طہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}}\,\text{فر طہ} + \left(\text{طہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ح}} - \text{د}\right)\text{فر ح}$

اور اس لئے $\frac{\text{جف}}{\text{جف ح}}\left(\text{طہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}\left(\text{طہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ح}} - \text{د}\right)$

یا $\text{طہ}\frac{\text{جف}^2\text{ فہ}}{\text{جف ح جف طہ}} = \text{طہ}\frac{\text{جف}^2\text{ فہ}}{\text{جف طہ جف ح}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ح}} - \frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$

یعنی $\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{ح}} = \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ح}}\right)_{\text{طہ}}$ .... (۳̄)

کیونکہ دوسرے رتبہ کے دو مشتقات مساوی ہیں۔

اسی طرح د اور فہ کو غیر تابع متغیر لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$\left(\frac{\text{جف ح}}{\text{جف فہ}}\right)_{\text{د}} = \left(\frac{\text{جف طہ}}{\text{جف د}}\right)_{\text{فہ}}$ .... (۲̄)

اور د اور طہ کو غیر تابع متغیر لینے سے

$\left(\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{د}} = -\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف د}}\right)_{\text{طہ}}$ .... (۱̄)

مساواتیں (۱̄)، (۲̄)، (۳̄)، (۴̄) وہی ہیں جو مکسویل کی "حرارت" صفحہ ۱۶۹ میں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) ہیں۔

تفرق کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہئے کہ جب مثلاً ح اور طہ غیر تابع متغیر ہوں تو $\frac{\text{جف طہ}}{\text{جف ح}}$ صفر ہے۔ اِن چار روابط کو احتیاط کے ساتھ نکالنے سے جزوی مشتقات کے معنوں کے متعلق بہت سی مفید واقفیت حاصل ہوتی ہے ہر قدم پر یہ ضروری ہے کہ علامات اور ترقیم کی طرف اسقدر توجہ نہ کی جائے جسقدر اِن اعمال کے معنی کی طرف جن کو یہ علامات تعبیر کرتی ہیں۔

مشق ۱- $\text{فرفہ} = \text{فرق}/\text{طہ} = (\text{م فرطہ} + \text{ن فرح})/\text{طہ}$

گیس کامل کے لئے $\text{ک}_{\text{د}}$ اور $\text{ک}_{\text{ح}}$ مستقل ہوتے ہیں اور دفعہ ۹۶ کی رو سے

$$\text{ک}_{\text{ح}} = \text{م} \quad \text{اور} \quad \text{ک}_{\text{د}} - \text{ک}_{\text{ح}} = \text{ن}\left(\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{د}}$$

لیکن گیس کامل کے لئے $\left(\frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{د}} = \frac{\text{ح}}{\text{طہ}}$، اس لئے

$$\frac{\text{ن}}{\text{طہ}} = (\text{ک}_{\text{د}} - \text{ک}_{\text{ح}})/\text{ح} \quad \text{اور}$$

فر فہ = کخ فر طہ/طہ + (کد - کخ) فر ح/ح = فر لوک (طہ^کخ ح^(کد - کخ))

جس کی تصدیق تفرق کرنے سے ہو سکتی ہے۔ اس لئے

فہ = لوک (طہ^کخ ح^(کد - کخ)) + مستقل

حرناگذار پھیلاؤ کے لئے فر ق = ۰ اور فر فہ = ۰، اس لئے

طہ^کخ ح^(کد - کخ) = مستقل یا د ح^جہ = مستقل

جیساکہ دفعہ ۹۶ میں۔

مشق ۲۔ حرارت کے اضافہ فر ق سے توانائی میں جو اضافہ فر حا ہوتا ہے وہ ہے

فر حا = فر ق - د فر ح = (ن - د) فر ح + م فر طہ

ثابت کرو کہ فر حا اگر مکمل تفرقہ ہو تو فر ق مکمل تفرقہ نہیں ہے۔

چونکہ فر حا مکمل تفرقہ ہے اس لئے

$$\frac{\text{جف}(ن-د)}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ح}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{جف ن}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ح}} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$$

یعنی $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف طہ}}$ اور $\frac{\text{جف م}}{\text{جف ح}}$ مساوی نہیں ہے اور اس سے نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

مشق ۳۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف ح}}{\text{جف فہ}} - \frac{\text{جف د}}{\text{جف فہ}} \times \frac{\text{جف ح}}{\text{جف طہ}} = ۱$$

اور

$$\frac{\text{جف طہ}}{\text{جف د}} \quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ح}} - \frac{\text{جف طہ}}{\text{جف ح}} \quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف د}} = ۱$$

مشق ۴۔ ثابت کرو کہ مساوات ۱۰ ان شکلوں میں بھی لکھی جا سکتی ہے۔

فر حا = فر (طہ فہ) - فہ فر طہ - د فر ح

فرحا = - فر(د ح) + طہ فرفہ + ح فرد

فرحا = فر(طہ فہ) - فر(د ح) - فہ فرطہ + ح فرد

اور اِن سے (آ)، (۲)، (۳) کو ثابت کرو۔

مشق ۵۔ حرحرکیات کی کتابوں میں یہ بتایا گیا ہے کہ فرفہ مکمل تفرقہ ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ح}}\left(\frac{\text{م}}{\text{طہ}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}\left(\frac{\text{ن}}{\text{طہ}}\right)$$

۹۸۔ متغیر کی تبدیلی۔ اعلیٰ رتبوں کے تفرقے۔
جب کسی تفاعل ما کے متغیر متبوع لا کی بجائے فرض کرو لا = فہ(ت) لکھنے سے ما کو ت کے تفاعل میں تبدیل کیا جائے جہاں ت کوئی ایسا اور متغیر متبوع ہے کہ لا اس کا تفاعل ہے تو ضرور ہے کہ ما کے لا مشتق

$\text{عف}_{\text{لا}}$ ما، $\text{عف}^{2}_{\text{لا}}$ ما، .... کو ما کے ت مشتق $\text{عف}_{\text{ت}}$ ما، $\text{عف}^{2}_{\text{ت}}$ ما .... میں تحویل کیا جائے، ہم دیکھ چکے ہیں کہ (دفعہ ۶۸، مشق ۲)

$$\text{عف}_{\text{لا}}\text{ما} = \text{عف}_{\text{ت}}\text{ما} / \text{عف}_{\text{ت}}\text{لا} \quad \text{اور} \quad \text{عف}^{2}_{\text{لا}}\text{ما} = \frac{\text{عف}_{\text{ت}}\text{لا}\ \text{عف}^{2}_{\text{ت}}\text{ما} - \text{عف}_{\text{ت}}\text{ما}\ \text{عف}^{2}_{\text{ت}}\text{لا}}{(\text{عف}_{\text{ت}}\text{لا})^{3}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور $\text{عف}^{3}_{\text{لا}}$ ما، $\text{عف}^{4}_{\text{لا}}$ ما ..... بھی حسب ضرورت آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

چونکہ فہ(ت) کو معلوم تسلیم کر لیا گیا ہے اسلئے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$، $\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}}$، .... محسوب ہو سکتے ہیں۔ بعد ازاں لا کی بجائے فہ(ت) اور $\text{عف}_{\text{لا}}$ ما، $\text{عف}^{2}_{\text{لا}}$ ما .... کی بجائے اِن کی محسوب کردہ قیمتیں مندرج کرنے سے کسی جملہ کو جسمیں لا، ما، $\text{عف}_{\text{لا}}$ ما، $\text{عف}^{2}_{\text{لا}}$ ما ..... شامل ہوں ایک اور جملے میں منتقل کیا جا سکتا ہے جس میں ت، ما، $\text{عف}_{\text{ت}}$ ما، $\text{عف}^{2}_{\text{ت}}$ ما، ..... شامل ہوں

اگر ہم ما کو متغیر متبوع اور لا کو تابع متغیر بنانا چاہیں تو

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \frac{1}{\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لا}} \text{ ، } \text{عف}^{2}_{\text{لا}}\,\text{ما} = \text{عف}_{\text{ما}}\left(\frac{1}{\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لا}}\right) \div \text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لا} = -\frac{\text{عف}^{2}_{\text{ما}}\,\text{لا}}{(\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{لا})^{3}} \quad ......(2)$$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

اسی طرح اگر ہمیں قائم محددوں سے قطبی محددوں میں تحویل کرنا ہو تو لا اور ما کی کوئی مساوات ف (لا ، ما) = ۰ ، ر اور طہ کی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے اور ہم عف $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ما}$ ، $\text{عف}^{2}_{\text{لا}}\,\text{ما}$ ، ... کو $\text{عف}_{\text{طہ}}\,\text{ر}$ ، $\text{عف}^{2}_{\text{طہ}}\,\text{ر}$ ، ... میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں طہ متغیر متبوع ہے۔ کیونکہ لا = ر جم طہ ، ما = ر جب طہ اور ہم حاصل ضربوں ر جم طہ اور ر جب طہ کو طہ کے لحاظ سے تفرق کر سکتے ہیں جہاں ر ، طہ کا تفاعل ہے۔

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}} &= \text{جم طہ}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} - \text{ر جب طہ} \\ \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر طہ}^{2}} &= \text{جم طہ}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ر}}{\text{فر طہ}^{2}} - 2\,\text{جب طہ}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} - \text{ر جم طہ} \end{aligned}\right\} \quad ...(3)$$

اسی قسم کے جملے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}}$ اور $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر طہ}^{2}}$ کے لئے حاصل ہوتے ہیں۔ مساواتوں (۱) میں ہم ت کی بجائے طہ فرض کر سکتے ہیں کیونکہ ت کوئی متغیر ہے ، تب $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ کی بجائے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}}$ ہوگا ، $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}}$ کی بجائے $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر طہ}^{2}}$ ہو جائیگا ، وغیرہ وغیرہ۔ اس طرح ہم $\text{عف}\,\text{ما}$ ، $\text{عف}^{2}\,\text{ما}$ کو ر ، طہ ، $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ر}}{\text{فر طہ}^{2}}$ ، ...... کی رقوم میں تحویل کر سکتے ہیں۔

علم ہندسہ اور علم حیل میں اکثر اوقات بڑے رتبہ کے تفرقوں سے واسطہ پڑتا ہے۔ جب لا متغیر متبوع ہو تو فر ما = ما َ فر لا (دفعہ ۶۰) جہاں $\text{ما}' = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

ما کے دوسرے تفرقہ کو ہم فر۲ ما سے تعبیر کرینگے، اور مساوات ذیل سے اسکی تعیین ہوگی

فر۲ ما = ماً فر لا۲ = (عف۲لا ما) فر لا۲

اور بالعموم ما کے ن ویں تفرقہ کو ہم فرن ما سے تعبیر کرینگے اور مساوات ذیل سے اس کی تعیین ہوگی

فرن ما = ما(ن) فر لان = (عفنلا ما) فر لان

جہاں فر لان سے مراد (فر لا)ن ہے۔
اگر فر لا اول رتبہ کا صغاریہ ہو تو فرن ما بالعموم ن ویں رتبہ کا صغاریہ ہوتا ہے۔
مساواتوں (۱) کی دوسری مساوات میں بائیں جانب جو کسر ہے اسکے شمارکنندہ اور نسب نما کو فر ت۲ سے ضرب دو، چونکہ ت متبوع متغیر ہے، اس لئے

فر لا = لاً فر ت ، فر۲ لا = لاً فر ت۲
فر ما = ماً فر ت ، فر۲ ما = ماً فر ت۲

اور اس لئے عف۲لا ما = (فر لا فر۲ ما - فر ما فر۲ لا) / فر لا۳ ...... (۴)

اسی طرح عف۲لا ما تفرقوں کے خارج قسمت کے طور پہ بیان ہو جاتا ہے۔ تفرقوں کے لئے متبوع متغیر لا نہیں ہے بلکہ ت ہے (جو کوئی متغیر ہے جس کے لا اور ما تفاعل ہیں) اگر لا متبوع متغیر ہو تو تعریف کی رو سے

فر۲ لا = (عف۲لا لا) فر لا۲ = ۰ × فر لا۲ = ۰

اور اسی طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ فر۳ لا ، فر۴ لا ...... صفر ہیں، دوسرے الفاظ میں متبوع متغیر کا تفرقہ مستقل ہوتا ہے۔
(۴) سے ہم بآسانی (۲) کو اخذ کر سکتے ہیں، ما کو متغیر متبوع مانو،

تب فر۲ما = فرلا = (عف لا) فرما، فر۲لا = (عف لا) فرما۲ اور (۴) ہو جاتی ہے

$$\text{عف}^2\text{ما} = -\text{فرما (عف}^2\text{لا) فرما} / (\text{عف لا})^3\,\text{فرما}^2 = -\text{عف}^2\text{لا} / (\text{عف لا})^3$$

ایک سے زیادہ متبوع متغیروں کے لئے یہ تحویلیں پیچیدہ ہوتی ہیں، ہم صرف ایک مثال پر غور کریں گے جو ریاضی طبیعیات میں بہت اہمیت رکھتی ہے۔

۹۹۔ لف۲ ع کا استحالہ۔ فرض کرو کہ ع دو متبوع متغیروں لا اور ما کا ایک تفاعل ہے اور لا اور ما کو قطبی محددوں ر اور طہ میں تبدیل کیا گیا ہے، ہم $\text{ع}_{\text{لا}}$، $\text{ع}_{\text{لالا}}$ ...... کو $\text{ع}_{\text{ر}}$، $\text{ع}_{\text{رر}}$ ...... کی رقوم میں بیان کرنا چاہتے ہیں۔ واضح ہو کہ مشتق $\text{ع}_{\text{ر}}$ کے اندر یہ مفہوم موجود ہے کہ تفاعل ع میں لا اور ما کی بجائے ر جم طہ اور ر جب طہ لکھا گیا ہے۔

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}}$ ، ع کی تبدیلی کی شرح ہے اس سمت میں جس میں کہ ر بڑھتا ہے جبکہ طہ مستقل رہے، دفعہ ۹۲ میں رکھو فہ = طہ اور س = ر تب

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{جب طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \quad ......(1)$$

دفعہ ۹۲ میں $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف سَ}}$ ، ع کی تبدیلی کی شرح ہے سمت فہ + $\frac{\pi}{2}$ میں،

فرض کرو کہ فہ = طہ یعنی ن ت عمود ہے و ن پر اور مف سَ = ن ت = ر مف طہ

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف سَ}} = \text{نہا}_{\text{مف سَ}\to 0}\,\frac{\text{مف ع}}{\text{مف سَ}} = \text{نہا}_{\text{مف طہ}\to 0}\,\frac{\text{مف ع}}{\text{ر مف طہ}}$$

$$= \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}}$$

اس لیے $\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} = -\text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ ......(۲)

جزو جف س کی جگہ ر جف طہ نے لے لی ہے، ر جف طہ جزو ہے ر کی سمت پر عمود وار جس طرح کہ جف ر جزو کا طول ہے ر کی سمت میں۔

مساواتیں (۱) اور (۲) ضروری ہیں، ہم ان کا ایک اور ثبوت درج کرتے ہیں۔ دفعہ ۹۰ (۱) کی رُو سے لا اور ما کو ر کا تفاعل فرض کرکے جبکہ طہ مستقل رہے ہمیں ت کی بجائے ر لکھنے سے حاصل ہوتا ہے:-

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ر}} \text{ ......(۱َ)}$$

یہاں دفعہ ۹۷ کی ترقیم کے مطابق $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ سے مراد $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ما}}$ ہے

اور $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}}$ سے مراد $\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}}\right)_{\text{طہ}}$ ہے۔ نیز

$$\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}}\right)_{\text{طہ}} = \frac{\text{جف (ر جم طہ)}}{\text{جف ر}} = \text{جم طہ}،\ \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ر}}\right)_{\text{طہ}} = \text{جب طہ}$$

(۱َ) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے مساوات (۱) حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح سے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{ر}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{ر}}$

.........(۲َ)

اور $\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{ر}} = -\text{ر جب طہ}،\ \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}\right)_{\text{ر}} = \text{ر جم طہ}$

جس سے مساوات (۲) حاصل ہوتی ہے۔

(۱) اور (۲) کو $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کے لئے حل کرنے سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} \quad \text{.....(۳)}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{جب طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \frac{\text{جم طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} \quad \text{.....(۴)}$$

تفاعل $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ی}^2}$

علم طبعیات میں بہت کثرت سے استعمال ہوتا ہے، اس کو ہم لف² ع سے تعبیر کریں گے بعض اوقات لف² ع کو اور متغیروں کی رقوم میں بدلنا پڑتا ہے

اول۔ فرض کرو کہ ع دو متغیروں لا اور ما کا تفاعل ہے یعنی تیسری رقم لف² ع میں نہیں ہے، اور ہم اسے اس طرح بدلنا چاہتے ہیں کہ قطبی محدد ر، طہ متغیر متبوع ہوں۔

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کو بالترتیب $\text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{ع}_{\text{ما}}$ سے تعبیر کرو تب ہم $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}$ کو (۳) میں ع کی بجائے $\text{ع}_{\text{لا}}$ لکھنے سے ر، طہ کی رقوم میں تبدیل کر سکتے ہیں، اب ہمیں $\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف ر}}$ اور $\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف طہ}}$ محسوب کرنا ہے۔

$$\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف ر}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left\{\text{جم طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}}\right\}$$

$$= \text{جم طہ}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2} + \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر جف طہ}}$$

$$\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف طہ}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر جف طہ}} - \text{جب طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طہ}^2} - \frac{\text{جم طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}}$$

اس لئے (۳) کی رو سے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف لا}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف طہ}}$$

اور جب $\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف ر}}$ ، $\frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف طہ}}$ کی مندرجہ بالا قیمتیں درج کی جائیں تو تخفیف سی آسان تحویل کے بعد حاصل ہوتا ہے :-

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} = \text{جم}^2\text{طہ}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2} - \frac{2\,\text{جب طہ جم طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر جف طہ}}$$

$$+ \frac{\text{جب}^2\text{طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \frac{\text{جب}^2\text{طہ}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طہ}^2} + \frac{2\,\text{جب طہ جم طہ}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}}$$

(۵) ....

اسی طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \text{جب}^2\text{طہ}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2} + \frac{2\,\text{جب طہ جم طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر جف طہ}}$$

$$+ \frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طہ}^2} + \frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} - \frac{2\,\text{جب طہ جم طہ}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}}$$

(۶) ....

(۵) اور (۶) کو جمع کرنے سے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طہ}^2} \quad \text{...(۷)}$$

دوم- لف² ع کو لا، ما، ی سے اسطوانی محددوں میں تحویل کرو۔

$$\text{لا} = \text{ر جم فہ}،\quad \text{ما} = \text{ر جب فہ}،\quad \text{ی} = \text{ی}$$

یہاں ی نہیں بدلتا، اس لئے ہمیں (۷) میں ر، طہ کی بجائے صرف

ر، فہ لکھ لینا ہے، پس

$$\text{لف}^{۲}\text{ع} = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ر}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف فہ}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ی}^{۲}} \quad \text{.....(۸)}$$

بالآخر کروی قطبی محددوں میں تحویل کرو۔

لا = ذ جب طہ جم فہ، ما = ذ جب طہ جب فہ، ی = ذ جم طہ

یہ استحالہ دو منزلوں میں ہو سکتا ہے، پہلے اسطوانی محددوں ر، فہ، ی میں تبدیل کرو جہاں ر = ذ جب طہ، اس استحالہ سے (۸) حاصل ہوتی ہے پھر ی، ر سے ذ، طہ میں لیجاؤ جہاں

ی = ذ جم طہ، ر = ذ جب طہ

اس تبدیلی سے (۷) میں لا کی بجائے ی اور ما کی بجائے ر لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ی}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ر}^{۲}} = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ذ}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ذ}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ذ}} + \frac{۱}{\text{ذ}^{۲}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف طہ}^{۲}} \quad \text{.....(۹)}$$

نیز (۴) سے ما کی بجائے ر لکھنے سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} = \text{جب طہ}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ذ}} + \frac{\text{جم طہ}}{\text{ذ}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} \quad \text{.....(۱۰)}$$

(۹) اور (۱۰) سے (۸) میں درج کرنے اور ر = ذ جب طہ رکھنے سے

$$\text{لف}^{۲}\text{ع} = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ذ}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ذ}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ذ}} + \frac{۱}{\text{ذ}^{۲}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف طہ}^{۲}} + \frac{\text{مم طہ}}{\text{ذ}^{۲}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} + \frac{۱}{\text{ذ}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\text{طہ}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف فہ}^{۲}} \quad \text{.....(۱۱)}$$

بعض اوقات (۱۱) کی پہلی دو رقموں کو ذیل کی معادل شکلوں میں لکھنا مفید ہوتا ہے

$$\frac{۱}{\text{ذ}^{۲}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ذ}}\left(\text{ذ}^{۲}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ذ}}\right) \text{ یا } \frac{۱}{\text{ذ}}\,\frac{\text{جف}^{۲}(\text{ذ ع})}{\text{جف ذ}^{۲}}$$

اور ہم (۱۱) کو بدل کر اس شکل میں لکھ سکتے ہیں:-

$$\text{لف}^2\text{ع} = \frac{1}{\text{ر}^3}\left\{\text{ر}^2\frac{\text{جف}^2(\text{رع})}{\text{جف ر}^2} + \frac{\text{جف}^2(\text{رع})}{\text{جف طہ}^2} + \text{مم طہ}\frac{\text{جف}(\text{رع})}{\text{جف طہ}} + \frac{1}{\text{جب}^2\text{طہ}}\frac{\text{جف}^2(\text{رع})}{\text{جف فہ}^2}\right\} \cdots\cdots (۱۲)$$

کیونکہ $\frac{\text{جف}^2(\text{رع})}{\text{جف طہ}^2} = \text{ر}\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طہ}^2}$، وغیرہ۔

مشق ۱۹

۱۔ اگر لا = رجم طہ، ما = رجب طہ تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\ \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}}\right)_{\text{طہ}} = \left(\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ما}}, \quad (۲)\ \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{رجف طہ}}\right)_{\text{ر}} = \left(\frac{\text{رجف طہ}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ما}}$$

مساوات (۱) اس مسئلہ کے متصادم نہیں ہے کہ جب، لا ایک متغیر ر کا تفاعل ہو تو $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ر}}$ اور $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر لا}}$ کا حاصل ضرب ۱ ہوتا ہے۔

طالب علم کو چاہئے کہ مساواتوں کو شکل کھینچ کر ثابت کرے، اس طرح سے ان کے معنے وضاحت کے ساتھ اسکی سمجھ میں آجائینگے۔

۲۔ اگر لا = رجم طہ اور ما = رجب طہ تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\ \text{عف}^2_{\text{لا}}\text{ما} = \left\{\text{ر}^2 + ۲(\text{عف}_{\text{طہ}}\text{ر})^2 - \text{ر عف}^2_{\text{طہ}}\text{ر}\right\} / (\text{جم طہ عف}_{\text{طہ}}\text{ر} - \text{رجب طہ})^3$$

$$(۲)\ \{1 + (\text{عف}_{\text{لا}}\text{ما})^2\}^{3/2} / \text{عف}^2_{\text{لا}}\text{ما} = \{\text{ر}^2 + (\text{عف}_{\text{طہ}}\text{ر})^2\}^{3/2} / \left\{\text{ر}^2 + ۲(\text{عف}_{\text{طہ}}\text{ر})^2 - \text{ر عف}^2_{\text{طہ}}\text{ر}\right\}$$

قطبی مساوات ر = ف (طہ) سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے اس پر کے نقطۂ انعطاف کی شرط (۱) کے ذریعہ معلوم کرو۔

۳۔ اگر لا = ا (ا ۔ جم ت)، ما = ا (ن ت + جب ت) تو عف لا، ما کو ت کی رقوم میں معلوم کرو۔

۴۔ اگر لا = د جم طہ اور ما = د جب طہ اور لا، ما، د، طہ تفاعل ہوں ت کے تو ثابت کرو کہ

(۱) لاَ جم طہ + ماَ جب طہ = دَ (۲) ۔ لاَ جب طہ + ماَ جم طہ = د طہَ

(۳) لاً جم طہ + ماً جب طہ = دً ۔ د (طہَ)۲ (۴) ۔ لاً جب طہ + ماً جم طہ = د طہً + ۲ دَ طہَ

اگر ن نقطہ (لا، ما) ہو تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ن کی رفتاریں نیم قطر سمتی کی سیدھ میں اور اسکے عمود وار تعبیر ہوتی ہیں اور مساواتوں (۳) اور (۴) سے انہی سمتوں میں ن کا اسراع حاصل ہوتا ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ

$$\text{د طہً} + ۲\,\text{دَ طہَ} = \frac{۱}{\text{د}}\,\frac{\text{ف}}{\text{ف ت}}\left(\text{د}^۲\,\text{طہَ}\right)$$

۵۔ اگر س کسی منحنی کی قوس کا طول ہو جو ایک ثابت نقطہ سے نقطہ ن (لا، ما، ی) تک ناپا جائے تو س، مشتقوں کو زبروں سے اور ت مشتقوں کو نقطوں (مثلاً لاٗ) سے تعبیر کرکے ثابت کرو کہ

(۱) لاَ لاً + ماَ ماً + یَ یً = ۰ (۲) لاٗ = لاَ سٗ

(۳) لاٗٗ = لاَ سٗٗ + لاً سٗ۲ (۴) لاٗ لاٗٗ + ماٗ ماٗٗ + یٗ یٗٗ = سٗ سٗٗ

(۵) لاٗٗ۲ + ماٗٗ۲ + یٗٗ۲ = سٗٗ۲ + $\frac{\text{س}^۴}{\text{ر}^۲}$ جہاں $\frac{۱}{\text{ر}^۲}$ = لاً۲ + ماً۲ + یً۲

مساوات (۱) متماثلہ لاَ۲ + ماَ۲ + یَ۲ = ا کو س کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اوپر کی مساوات اس لئے درست ہے کہ لاَ، ماَ، یَ ہی سمتی جیوب التمام ہیں۔ یہ نتائج علم الحیل میں کارآمد ہوتے ہیں، مثلاً (۴) سے مماسی رفتار اور (۵) سے کل

اسراع حاصل ہوتا ہے۔

۶۔ اگر محوروں کو زاویہ عہ میں سے گھمایا جائے تو کسی نقطہ کے پرانے محدد (لا، ما) اسی نقطہ کے لئے محددوں (ضا، عا) سے ذیل کی مساواتوں سے مربوط ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۲۷)

$$\text{لا} = \text{ضا جم عہ} - \text{عا جب عہ}$$

$$\text{ما} = \text{ضا جب عہ} + \text{عا جم عہ}$$

ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ضا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2} \quad \cdots\cdots (1)$$

کیونکہ

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ضا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ضا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ضا}}$$

$$= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \cdot \text{جم عہ} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{جب عہ}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \cdot \frac{\text{جف لا}}{\text{جف عا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{جف ما}}{\text{جف عا}}$$

$$= -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{جب عہ} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{جم عہ}$$

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کے لئے حل کرنے سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ضا}} \cdot \text{جم عہ} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}} \text{جب عہ}،$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ضا}} \text{جب عہ} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}} \text{جم عہ}$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف ضا}} \text{جم عہ} - \frac{\text{جف ع}_{\text{لا}}}{\text{جف عا}} \text{جب عہ} \quad \text{وغیرہ}$$

(۱) کی طرح کی مساوات تین متغیروں لا، ما، ہی کے لئے بھی درست ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}^{۲}}\left(\text{لف}^{۲}\,\text{ع}\right) = \text{لف}^{۲}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}^{۲}}\right)$

۸۔ اگر دفعہ ۹۹ (۱۲) میں ط کی بجائے صا لکھا جائے جہاں صا = جم ط تو ثابت کرو کہ $\text{لف}^{۲}\,\text{ع}$ ہو جاتا ہے

$$\frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\left[\text{ر}\,\frac{\text{جف}^{۲}(\text{رع})}{\text{جف ر}^{۲}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف صا}}\left\{(۱-\text{صا}^{۲})\frac{\text{جف ع}}{\text{جف صا}}\right\} + \frac{۱}{۱-\text{صا}^{۲}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف فا}^{۲}}\right]$$

۹۔ ن، نَ دو نقطے (لا، ما، ہی) اور (لاَ، ماَ، ہیَ) ہیں اور ن نَ = ر جو ایک مثبت عدد ہے، ن ق = فس اور نَ قَ = فسَ، نیز ن ق اور نَ قَ کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) اور (لَ، مَ، نَ) ہیں۔ زاویے قَ ن نَ اور ق نَ ن بالترتیب ط اور طَ ہیں اور ن ق اور نَ قَ کی سمتوں کا درمیانی زاویہ سر ہے، ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف س}} = -\text{جم ط}$ (۲) $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف سَ}} = -\text{جم طَ}$

(۳) $\text{ر}\,\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ر}}{\text{جف س جف سَ}} + \frac{\text{جف ر}}{\text{جف س}}\,\frac{\text{جف ر}}{\text{جف سَ}} = -\text{جم سر}$

(۴) $\frac{\text{جف}\,(\text{ر}^{-۱})}{\text{جف س}} = \frac{\text{جم ط}}{\text{ر}^{۲}}$

(۵) $\frac{۲}{\text{ما ر}}\,\frac{\text{جف}^{۲}\,(\text{ما ر})}{\text{جف س جف سَ}} = -\,\frac{۲\,\text{جم سر} + ۳\,\text{جم ط}\,\text{جم طَ}}{\text{ر}^{۲}}$

دفعہ ۹۲ (۳) میں رکھو ع = ر، تب چونکہ $\text{ر}^{۲} = (\text{لاَ} - \text{لا})^{۲} + (\text{ماَ} - \text{ما})^{۲} + (\text{ہیَ} - \text{ہی})^{۲}$

$\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}^{۲}} = -(\text{لاَ} - \text{لا})/\text{ر}$، $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لاَ}} = (\text{لاَ} - \text{لا})/\text{ر}$، وغیرہ

اور ن نَ کی لا، سمتی جیب التمام (یعنی اُس زاویہ کی جیب التمام جو ن نَ محور لا کے ساتھ بناتا ہے)

$\frac{(\text{لاَ} - \text{لا})}{\text{ر}}$ ہے، نَ ن کی $\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\text{ر}}$ ہے۔

$$\text{تب}\quad \frac{\text{جف ر}}{\text{جف س}} = \text{ل}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} + \text{م}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}} + \text{ن}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ی}}$$

$$= -\left\{\text{ل}\frac{\text{لاَ} - \text{لا}}{\text{ر}} + \dots + \dots\right\} = -\text{جم طہ}$$

$\frac{\text{جف}^2\text{ ر}}{\text{جف س جف سَ}}$ معلوم کرنے کے لئے $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف س}}$ کو سَ کے لحاظ سے تفرق کرنے میں یہ بات قابل غور ہے کہ ل، م، ن اور لا، ما، ی منحصر نہیں ہیں سَ پر اور اسی طرح لَ، مَ، نَ اور لاَ، ماَ، یَ منحصر نہیں ہیں س پر۔

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف سَ}} \times \frac{\text{ل}(\text{لاَ} - \text{لا})}{\text{ر}} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف سَ}} - \frac{\text{ل}(\text{لاَ} - \text{لا})}{\text{ر}^2}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف سَ}}$$

$$= \frac{\text{ل لَ}}{\text{ر}} - \text{ل}\frac{\text{لاَ} - \text{لا}}{\text{ر}} \times \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف سَ}}$$ کیونکہ $\text{لَ} = \frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف سَ}}$ –

م (ماَ - ما) / ر، ن (یَ - ی) / ر کے مشتقات معلوم کرنے اور جمع کرنے سے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ ر}}{\text{جف س جف سَ}} = -\left(\frac{\text{ل لَ} + \text{م مَ} + \text{ن نَ}}{\text{ر}}\right) + \left(\text{ل}\frac{\text{لاَ} - \text{لا}}{\text{ر}} + \text{م}\frac{\text{ماَ} - \text{ما}}{\text{ر}} + \text{ن}\frac{\text{یَ} - \text{ی}}{\text{ر}}\right)\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف س}}$$

$$= -\frac{\text{جم سہ}}{\text{ر}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف س}} \times \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ر}}{\text{جف سَ}}$$

جس سے (۳) حاصل ہوتی ہے، نیز

جف (ذ⁻¹) / جف س = - ذ⁻² جف ذ / جف س = جم طہ / ذ² ... جو (۴) ہے

۱۰۔ فرض کرو کہ ق ن (مشق ماقبل) کو پیچھے کی طرف ق₁ تک بڑھایا گیا ہے اور ن ق₁ = ق ن بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ع = ۱ / ن ن′ = ۱ / ذ

اور عق اور عق₁ بالترتیب ۱ / ق ن′ اور ۱ / ق₁ ن′ کو تعبیر کرتے ہیں، ثابت کرو (دفعہ ۹۲ کے موافق) کہ

جف ع / جف س = نہا (عق - عق₁) / ق₁ ق ، جف ع / جف س = جم طہ / ذ²

۱۱۔ مشق ۹ کی ترقیم کے مطابق فرض کرو کہ ن ایک چھوٹے مقناطیس کا مرکز ہے جس کا معیار اثر م ہے اور جس کا محور ن ق کی سمت میں ہے، ثابت کرو کہ مقناطیس کا قوہ ف نقطہ ن′ پر ہے

ف = م جف (۱/ذ) / جف س = م جم طہ / ذ²

فرض کرو کہ ق، ق₁ (دیکھو مثال ۱۰) پر مقناطیسیت کی مقداریں م₁ اور -م₁ رکھی گئی ہیں، ن′ پر ان مقداروں کا قوہ ہے

م₁ عق - م₁ عق₁ = م₁ ق₁ ق (عق - عق₁) / ق₁ ق

فرض کرو کہ ق₁ ق صفر ہو جاتا ہے لیکن حاصل ضرب م₁ × ق₁ ق مستقل (م کے مساوی) رہتا ہے، تب ف اس کسر کی جو ابھی لکھی گئی انتہا ہے، یہ مشق ۱۰ کی رو سے ہے

م جف ع / جف س = م جم طہ / ذ²

۱۲- نَ پر مقناطیسی قوت کے اجزائے ترکیبی (مشق ۱۱) $-\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ ،

$-\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ ، $-\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}$ ہیں، ثابت کرو کہ

$$-\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{۳م (لاَ - لا) جم طا}}{\text{ر}^{۴}} - \frac{\text{م ل}}{\text{ر}^{۳}}$$

اسی قسم کے جملے باقی دو اور اجزائے ترکیبی کے لئے۔

۱۳- اگر مَ معیار اثر والے ایک ابتدائی چھوٹے مقناطیس کو اس طرح رکھا جائے کہ اس کا مرکز نَ پر ہو اور اس کا محور نَ قَ پر ہو تو ثابت کرو کہ مقناطیسوں کی باہمی توانائی بالقوہ ہے

$$\text{قا} = \text{مَ}\frac{\text{جف و}}{\text{جف سَ}} = \text{م مَ}\frac{\text{جف}^{۲}(\text{ر}^{-۱})}{\text{جف س جف سَ}} = \text{م مَ}\frac{(\text{جم سہ} + \text{۳ جم طا جم طَا})}{\text{ر}^{۳}}$$

مشق ۱۱ کا طریقہ استعمال کرو اور ع یا $\frac{۱}{\text{ر}}$ کی بجائے و لو۔

باب دوازدہم

مشتق کا استعمال مساواتوں کے نظریہ میں

۱۰۰۔ اگر ف (لا)، لا میں ن ویں درجہ کا کوئی منطق، صحیح تفاعل ہو تو مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں ثابت کیا جاتا ہے کہ بالعموم لا کی ن قیمتوں کے لئے ف (لا) صفر ہوتا ہے، ان قیمتوں کو مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں کہتے ہیں، یا انہیں کبھی تفاعل ف (لا) کے صفر بھی کہتے ہیں۔ ضروری نہیں کہ یہ قیمتیں ہمیشہ حقیقی عدد ہوں اور نہ ہی یہ ضروری ہے کہ یہ سب قیمتیں مختلف ہوں۔ مثلاً اگر

ف (لا) = (لا - ۱)^۲ (لا - ۲) (لا^۲ + ۱) تو ظاہر ہے کہ ف (لا) پانچویں درجہ کا تفاعل ہے، مساوات ف (لا) = ۰ کی دو اصلیں ایک کے مساوی ہیں، ایک اصل ۲ ہے اور دو اصلیں خیالی ہیں ±√-۱

ع۱ کو مساوات ف (لا) = ۰ کی د ضعفی اصل یا تفاعل ف (لا) کا د ضعفی صفر اُس وقت کہتے ہیں اگر ف (لا) میں (لا - ع۱)^د شامل ہو لیکن اس میں (لا - ع۱) کی د سے کوئی بڑی قوت شامل نہ ہو۔ اس صورت میں ف (لا) کی شکل (لا - ا)^د ف۱ (لا) ہوگی اور ف۱ (ع۱) صفر نہیں ہوگا، کیونکہ اگر ف۱ (ع۱) صفر ہو تو مسئلہ باقی سے ف۱ (لا) میں لا - ع۱ شامل ہوگا اور اس لئے ف (لا) میں (لا - ع۱)^د سے بڑی قوت شامل ہوگی، جو ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔

جب، ف(لا) = (لا - عا)^{ر} فا(لا) تو ظاہر ہے کہ ف(لا) کے پہلے، دوسرے، ..... (ر - ۱) ویں مشتق میں جزو ضربی (لا - عا) شامل ہوگا اور اس لئے یہ مشتق لا = عا کے لئے صفر ہونگے۔

طالب علم یہ خود ثابت کرے کہ اگر عا، ف(لا) کا ر ضعفی صفر ہو تو اسکے لئے ضروری اور کافی شرائط یہ ہیں کہ ف(لا) اور اس کے پہلے (ر - ۱) مشتق لا = عا کے لئے صفر ہو جائیں اور ر واں مشتق لا = ع کے لئے صفر نہ ہو۔ نیز طالب علم یہ دیکھے کہ ف(لا) = ۰ کی ضعفی اصلیں فَ(لا) = ۰ کی اصلیں ہیں اور اس لئے ف(لا) اور فَ(لا) کے مقسوم علیہ اعظم کے صفر معلوم کرنے سے انہیں ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

صریحاً (لا - عا)^{ر} فا(لا) کی ترسیم محور لا کو عبور کرے گی اگر ر طاق ہو اور عبور نہیں کرے گی اگر ر جفت ہو، اگر ر > ۱ تو محور لا نقطہ (عا، ۰) پر ترسیم کا مماس ہوگا کیونکہ اس صورت میں فَ(عا) صفر ہوگا۔

مشق ۱۔ ثابت کرو کہ ۲ مساوات ذیل کی تہری اصل ہے

۳ لا^{۴} - ۱۶ لا^{۳} + ۲۴ لا^{۲} - ۱۶ = ۰

ف(۲)، فَ(۲)، فً(۲) تینوں صفر ہیں، لیکن فً(۲) صفر نہیں ہے۔

ف(لا) = (لا - ۲)^{۳} (۳ لا + ۲) یعنی ۲ تہری اصل ہے اور باقی ماندہ اصل -$\frac{۲}{۳}$ ہے۔

مشق ۲۔ بتاؤ کہ ق اور ر میں کیا ربط ہو کہ مساوات

لا^{۲} + ق لا + ر = ۰

میں ایک دوہری اصل ہو۔

اگر دوہری اصل عا ہو تو فا(عا) = ۰ اور فَ(عا) = ۰ اور فً(عا) ≠ ۰، اس لئے

عا^{۲} + ق عا + ر = ۰ (۱)

۳ عہ² + ق = ۰ (۲)

اور ۶ عہ ≠ ۰

(۲) سے عہ² = − ق/۳ اور اس لئے (۱) سے ۲ ق عہ/۳ + ر = ۰

اس لئے عہ² = − ق/۳ اور عہ² = ۹ ر² / ۴ ق²

اس لئے ۲۷ ر² + ۴ ق³ = ۰ مطلوبہ ربط ہے۔

۱۰۱۔ **مسلسل تفاعل** ۔ اب ہم ف (لا) کو کوئی مسلسل تفاعل فرض کرتے ہیں، یہ بات ہمیشہ یاد رکھنی چاہئے کہ جو مسائل تفاعل کو مسلسل فرض کر کے ثابت کئے گئے ہیں ممکن ہے کہ وہ تفاعل کے غیر مسلسل ہونے کی صورت میں درست نہ رہیں۔

اگر ف (ا) اور ف (ب) مختلف العلامت ہوں تو (دفعہ ۴۵ مسئلہ ۲) وقفہ (ا، ب) کے درمیان ف (لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل ضرور ہوتی ہے۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ اصل وقفہ (ا، ب) کے درمیان واقع ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اصل ا اور ب میں سے ایک عدد سے چھوٹی اور دوسرے سے بڑی ہے۔

اگر فَ (لا) مسلسل ہو اور وقفہ (ا، ب) کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے صفر نہ ہو تو وقفہ مذکور کے اندر تفاعل ف (لا) یا بڑھنے والا یا گھٹنے والا ہوگا اور اس لئے جب، ف (ا) اور ف (ب) مختلف العلامت ہوں تو ف (لا) وقفہ مذکور کے اندر صرف ایک دفعہ معدوم ہوگا یعنی وقفہ مذکور کے اندر ف (لا) کی صرف ایک اصل ہوگی

اگر ف (لا) اور فَ (لا) مسلسل ہوں تو ف (لا) = ۰ کی ہر دو متصل اصلوں کے درمیان فَ (لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل ضرور ہوتی ہے اور برعکس اس کے فَ (لا) = ۰ کی ہر دو متصل اصلوں کے

درمیان ف (لا) = ٠ کی زیادہ سے زیادہ ایک اصل ہو سکتی ہے اور ممکن ہے کہ ایک بھی نہ ہو۔

اس مسئلہ کا پہلا حصہ رول کا مسئلہ ہے (دفعہ ٧٢)، اس کا عکس ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ ف َ (لا) = ٠ کی دو اصلیں عہ اور بہ ہیں۔ اور اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ وقفہ (عہ، بہ) کے اندر ف (لا) = ٠ کی دو اصلیں ا اور ب ہیں، ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عہ < ا < ب < بہ۔ چونکہ ف (ا) = ٠ اور ف (ب) = ٠ اس لئے ف َ (لا) وقفہ (ا، ب) کے درمیان کم از کم ایک دفعہ ضرور صفر ہوگا اور یہ امر ہمارے اس مفروضہ کے خلاف ہے کہ عہ اور بہ، ف َ (لا) = ٠ کی دو متصل اصلیں ہیں۔ یہ قبل ازیں بتایا جا چکا ہے کہ ف َ (لا) = ٠، ف (لا) = ٠ کی دو متصل اصلوں کے درمیان ایک سے زیادہ مرتبہ صفر ہو سکتا ہے اور اسلئے یہ ممکن ہے کہ ف َ (لا) = ٠ کی دو متصل اصلوں کے درمیان ف (لا) = ٠ کی کوئی اصل نہ ہو (دفعہ ٧٢)۔

٢٠١- مساوات کی اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرنیکے لئے نیوٹن کا طریقہ۔ اس باب میں ہم صرف حقیقی اصلوں کو ملحوظ رکھینگے اور ہم یہ مان لینگے کہ سعت زیر بحث کے اندر ف (لا) اور اس کے پہلے دو مشتق مسلسل ہیں۔ جب، ف (لا) کوئی منطق صحیح تفاعل ہو تو ہم یہ بھی فرض کر لینگے کہ ف (لا) کی ضعفی اصلیں (اگر کوئی ہوں تو) ذو اضعاف اقل کے قاعدہ سے معلوم کر لی گئی ہیں اور ان کے متناظر اجزائے ضربی نکال دئے گئے ہیں، اس لئے ف (لا) اور ف َ (لا)، لا کی ایک ہی قیمت کے لئے معدوم نہیں ہوں گے۔ (ممکن ہے کہ ذو اضعاف اقل کے صفر معلوم کرنیکے لئے مساوات کی اصلوں کے تقربات کے متعلق مندرجہ ذیل قاعدوں میں سے کسی ایک کو استعمال کرنا پڑے)

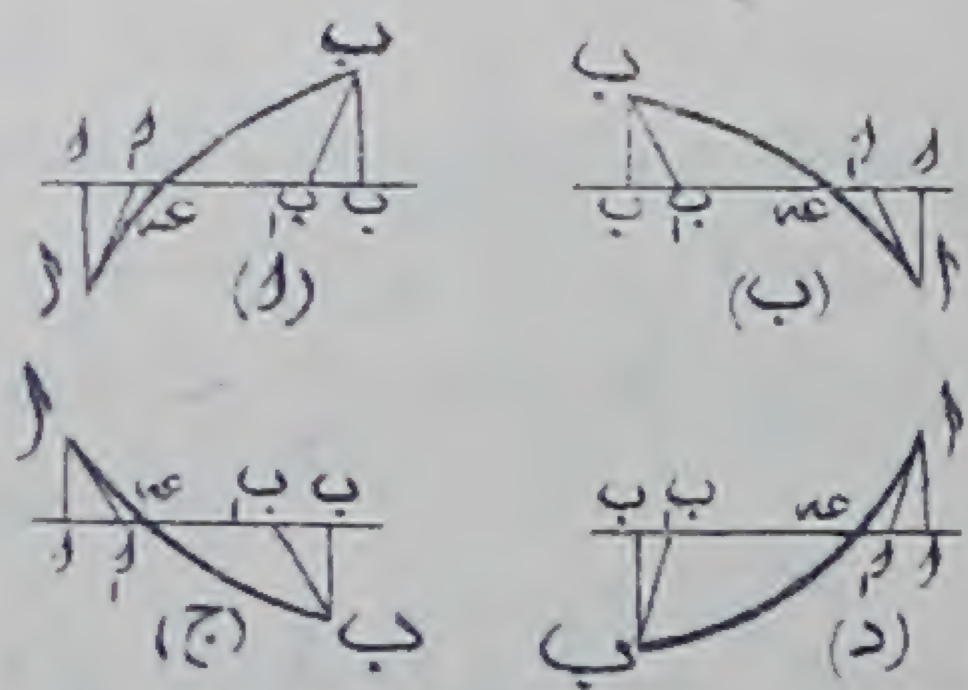
اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرنے کے متعلق ذیل کا قاعدہ نیوٹن کا ہے فرض کرو کہ یہ معلوم کر لیا گیا ہے کہ ف (ا) تعداداً چھوٹا ہے۔ بالعموم حسب ذیل طریقہ سے ہم ا سے بھی زیادہ تقریبی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ عـ۰ وہ اصل ہے جس کے قریب ا واقع ہے یعنی ف (عـ۰) = ۰
اوسط قیمت کے مسئلہ سے

ف (عـ۰) = ف (ا) + (عـ۰ - ا) فَ (ا) + ½ (عـ۰ - ا)² فً (لا) ..... (۱)

جہاں لا وقفہ (عـ۰، ا) کے اندر واقع ہے۔ اگر ہم (عـ۰ - ا)² کو بمقابلہ (عـ۰ - ا) کے نظر انداز کر دیں تو چونکہ ف (عـ۰) = ۰ اس لئے مساوات (۱) ہو جاتی ہے
ف (ا) + (عـ۰ - ا) فَ (ا) = ۰ جس سے عـ۱ = ا - ف (ا)/فَ (ا)
جہاں عـ۱، عـ۰ کی تقریبی قیمت ہے۔
اب ہم عـ۱ کو اسی طرح استعمال کر سکتے ہیں جس طرح ہم نے ا کو استعمال کیا، اس طرح مزید تقریبی قیمت عـ۲ حاصل ہوتی ہے۔
جہاں عـ۲ = عـ۱ - ف (عـ۱)/فَ (عـ۱)
علیٰ ہذالقیاس۔ اس طریقہ سے یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ عـ۱ درحقیقت ا کی نسبت عـ۰ کے زیادہ قریب ہے، اس سے درجہ تقرب کا پتہ نہیں چلتا۔ اس لئے ہم تقرب کے شرائط ذیل میں معلوم کرتے ہیں۔
۴۰۱ - تقرب کے درجہ کی جانچ۔ فرض کرو کہ (۱) ف (ا) اور ف (ب) مختلف العلامت ہیں اور (۲) وقفہ (ا، ب) کے اندر فَ (لا) معدوم نہیں ہوتا اور (۳) فً (لا) وقفہ مذکور کے اندر معدوم نہیں ہوتا۔
شرائط (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ وقفہ (ا، ب) کے اندر ف (لا) کی ایک اور صرف ایک اصل (فرض کرو عـ۰) ہے۔ شرط (۳) سے ظاہر ہے کہ ف (لا) کی ترسیم بالتمام وقفہ مذکور کے اندر یا اوپر کی طرف محدب ہے یا اوپر کی طرف مقعر ہے یعنی وقفہ مذکور کے اندر اس پر کوئی نقطہ انعطاف نہیں ہے۔
فرض کرو کہ ا وقفہ زیر بحث کا وہ سرا ہے جس پر ف (لا) کی وہی علامت ہے جو فً (لا) کی ہے، وقفہ کے اس سرے کا انتخاب نہایت ضروری ہے

ا، ب کی نسبت بڑا یا چھوٹا ہو سکتا ہے۔
اشکال (ا) اور (ب) میں جو ترسیمیں ہیں ان میں فً (لا) منفی ہے اور (ج) اور (د) میں فً (لا) مثبت ہے۔ نقاط ا اور ب کے فصلے ا اور ب ہیں۔



شکل (۵۲)

ان ترسیموں سے ظاہر ہے کہ ا پر کا مماس محور لا کو ایک نقطہ ا۱ پر قطع کرتا ہے جہاں ا۱، ا اور عہ کے درمیان واقع ہے۔ اس لئے ا۱، ا کی نسبت ف (لا) = ۰ کی زیادہ تقریبی اصل ہے۔ اب ا پر کے مماس کی مساوات ہے

ما = ف (ا) + (لا - ا) فَ (ا)

جب، ما = ۰ تو لا = ا۱، اس لئے

ا۱ = ا - ف (ا) / فَ (ا) ....(۱)

اب فرض کرو کہ وہ خط جو ب میں سے گزرتا ہے اور ا پر کے مماس کے متوازی ہے محور لا کو نقطہ ب۱ پر کاٹتا ہے۔ خط کی مساوات ہے

ما = ف (ب) + (لا - ب) فَ (ا)

اس لئے ب۱ = ب - ف (ب) / فَ (ا) ....(آ)

اور ب۱، ب اور عہ کے درمیان واقع ہے گویا ب۱، ب کی نسبت

زیادہ تقریبی اصل ہے۔ اگرچہ یہ ضروری نہیں کہ یہ اصل ا سے بہتر ہو۔
اب ب - ا = -{ف(ب) - ف(ا) - (ب - ا) ف(ا)}/ف(ا)
جس کو اوسط قیمت کے مسئلہ کی مدد سے یوں بھی لکھا جا سکتا ہے :-

ب - ا = - ½ (ب - ا)² فً (لا) / فَ (ا)۔ جہاں لا، وقفہ (ا، ب)

کے اندر واقع ہے۔

فرض کرو کہ ب - ا کی عددی قیمت د ہے اور (ب - ا) کی عددی قیمت د ہے۔ نیز فرض کرو کہ وقفہ (ا، ب) کے اندر فً (لا) کی بڑی سے بڑی قیمت ع اور فَ (لا) کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ق ہے۔ تب

د ≥ د²ع/۲ق یا د ≥ د²ک، ک = ع/۲ق

چونکہ عہ - ا تعداداً ب - ا سے چھوٹا ہے، اسلئے عہ - ا تعداداً د سے اور بنائے علیہ د²ک سے چھوٹا ہے یعنی اگر اصل عہ کی بجائے ا کو لیا جائے تو غلطی د²ک کی نسبت تعداداً کم ہوتی ہے۔ اسی طرح ب کی غلطی د²ک سے کم ہے۔

ا، ب کی بجائے ا، ب لیکر ہم یہی عمل کر سکتے ہیں۔ اسی قسم کی ترمیم استعمال کرنے سے ہم دیکھینگے کہ

ا = ا - ف(ا)/فَ(ا)، ب = ب - ف(ب)/فَ(ا)

د ≥ د²ک یعنی د ≥ د²ک²

اور ا یا ب کو لینے سے غلطی د سے یا د²ک³ سے کم ہوتی ہے۔
یہی عمل پھر کیا جا سکتا ہے۔ جونہی کہ ا، ب ایسے ہو جائیں کہ د ک کی قیمت ایک سے کم ہو جائے تو تقرب زیادہ سرعت کے ساتھ اصل کے

قریب آتا ہے۔ بالعموم $ب_۱$، $ب_۲$، ..... کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

اشکال کا معائنہ کرنے سے طالب علم دیکھیگا کہ اگر ا کا انتخاب اس طرح نہ کیا جائے جیسا اوپر کیا گیا ہے تو $ا_۱$ اور $ب_۱$ کی قیمت $ا_۲$ اور ب کی نسبت ع سے زیادہ دور ہو سکتی ہے۔

۱۰۴۔ مثالیں

مثال ۱۔ اگر ف (لا) = ۳ $لا^۳$ − ۴ لا + ۵ تو ف (لا) = ۰ کی اصلیں معلوم کرو۔

$$ف' (لا) = ۹ (لا + \frac{۲}{۳}) (لا - \frac{۲}{۳})$$

$$ف'' (لا) = ۱۸ لا ، \quad ف''' (لا) = ۱۸$$

$$ف (- \frac{۲}{۳}) = ۶\frac{۷}{۹} ، \text{ ف (لا) کی اعظم قیمت ہے۔}$$

ف $(\frac{۲}{۳}) = ۳\frac{۲}{۹}$ اقل قیمت ہے۔ نقطہ (۰، ۵) نقطۂ انعطاف ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ف (لا) کی ترسیم محور لا کو صرف ایک دفعہ عبور کرتی ہے۔ یعنی حقیقی اصل صرف ایک ہے۔

ف (−۲) = −۱۱، ف (−۱) = +۶، یعنی اصل −۲ اور −۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ چونکہ ف (−۲) اور ف (−۱) بڑے ہیں، اسلئے ہم ا، ب کے مناسب انتخاب سے پہلے بہتر تقرب حاصل کرتے ہیں۔

اب ف (−۱ء۶) = −۸۸۸ء، ف (−۱ء۵) = +۸۷۵ء، چونکہ ف'' (لا) منفی ہوتا ہے جبکہ لا منفی ہو، اس لئے ہم لیتے ہیں ا = −۱ء۶ اور ب = −۱ء۵

ع = وقفہ (−۱ء۶، −۱ء۵) کے اندر ف'' (لا) کی تعداداً بڑی سے بڑی قیمت = ۲۸ء۸

ق = اسی وقفہ میں ف' (لا) کی تعداداً چھوٹی سے چھوٹی قیمت

= ۱۶٫۲۵

ک = ع / ق۲ = ۱۴٫۴ / ۱۶٫۲۵ < ۱

د = ۰٫۱ ، د۲ ک < ۰٫۰۱

ا۱ = ا - ف (ا) / فَ (ا) = -۱٫۶ + ۰٫۰۴ = -۱٫۵۶

اور ا۱ کا فرق عہ سے ۰٫۱ کی نسبت کم ہے۔

ا۲ = ا۱ - ف (ا۱) / فَ (ا۱) = -۱٫۵۶ + ۰٫۰۰۸۳ = -۱٫۵۵۱۷

اور ا۲ کا فرق عہ سے تعداداً د۲ ک۲ یعنی ۰٫۰۰۱ سے کم ہے۔
قیمتیں ۰٫۰۴ اور ۰٫۰۰۸۳ درحقیقت تقریبی قیمتیں ہیں، اس امر کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ ہم اصل سے آگے نہ چلے جائیں
مثلاً - ف (ا) / فَ (ا) = ۰٫۰۴۶.....، لیکن اگر ہم یہ قیمت ۰٫۰۵ لیں تو اس سے ا۱ ہو جاتا ہے -۱٫۵۵، اور ہم دیکھینگے کہ ف (-۱٫۵۵) مثبت ہے۔ لیکن سب استدلال اس امر پر موقوف ہے کہ ف (ا۱) اور فً (لا) کی علامت ایک ہی ہو جو اس صورت میں منفی ہے۔
اور اچھا تقرب ہے

ا۳ = -۱٫۵۵۱۶۰۸۱۲

اور غلطی آخری مقام اعشاریہ کی ایک اکائی سے بھی کم ہے۔

مشق ۲ - مساوات لا + جب لا - π/۳ = ۰ کو حل کرو

اگر ایک دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ا ہو اور اگر اب اور اج دو وتر ہوں جو دائرہ کے رقبہ کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کریں تو اب اور ا میں سے گذرنے والے قطر کا درمیانی زاویہ ½ لا نیم قطریوں کے برابر ہو گا۔

ف (لا) = لا + جب لا - π/۳

فَ (لا) = ۱ + جم لا ، فً (لا) = - جب لا

یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ لا ۳۰° اور ۳۱° کے درمیان واقع ہے یا
نیم قطریوں میں ۵۲۳۶ء اور ۵۴۱۱ء کے درمیان واقع ہے۔

ف(۵۲۳۶ء) = -۰۲۳۶ء، فَ(۵۲۳۶ء) = ۱ء۸۶۶۰

ف(۵۴۱۱ء) = +۰۰۸۹ء، فَ(۵۴۱۱ء) = ۱ء۸۵۰۲

د = ۰۱۷۵ء < ۰۲ء، ک = ع / فَ۲ < ۲ء

د۲ ک < ۰۰۰۰۸ء

چونکہ فً (لا) منفی ہے، اس لئے ہم ا = ۵۲۳۶ء لیتے ہیں

ا۱ = ا - ف(ا) / فَ(ا) = ۵۲۳۶ء + ۰۱۲۶ء = ۵۳۶۲ء

اور غلطی اعشاریہ کے چوتھے مقام کی ایک اکائی سے بھی کم ہے۔
اگلے تقرب سے

ا۲ = ا۱ - ف(ا۱) / فَ(ا۱) = ۵۳۶۲ء + ۰۰۰۰۶۷۴ء
= ۵۳۶۲۶۷۴ء

اور غلطی آخری مقام کی ایک اکائی سے بھی کم ہے۔ درجوں میں زاویہ ۳۰° ۴۳' ۳" ہے

۱۰۵۔ متواتر تقربات۔ فرض کرو کہ مساوات کی شکل لا = فہ(لا) ہے
نیز فرض کرو کہ اس کی اصل عہ ہے اور ا، عہ کا تقرب ہے یعنی
عہ = ا + ھ (فرض کرو)

اب عہ = فہ(عہ) = فہ(ا + ھ) = فہ(ا) + ھ فہَ(ا + طہ ھ)

اور اس لئے عہ - فہ(ا) = ھ فہَ(ا + طہ ھ)

اگر الفاظ "بڑے" اور "چھوٹے" کو تعداداً بڑے اور چھوٹے کے معنوں میں استعمال کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو ا کی نسبت عہ کے زیادہ قریب ہو فہَ(لا) ایک کسر واجب م سے چھوٹا ہو تو عہ اور فہ(ا) کا تفاوت م ھ سے کم ہوگا یعنی عہ اور فہ(ا) کا فرق عہ اور ا کے فرق سے کم ہوگا۔ اس لئے فہ(ا)، ا

کی نسبت اصل کے زیادہ قریب ہے۔

فہ (ا$_1$) کو ا$_2$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ عہ = ا$_1$ + ھ، جہاں ھ مساوی ہے ھ فہَ (ا$_1$ + طہ ھ) اور بناءً علیہ کم ہے م ھ سے۔ اسی طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ

عہ - فہ (ا$_1$) = ھ فہَ (ا$_1$ + طہ ھ) < ھ$_1$ م < ھ م^2

پس فہ (ا$_1$) = ا$_2$ بمقابلہ ا$_1$ کے اصل کے زیادہ قریب ہے۔

غلطیوں ھ م اور ھ م^2 کی بالائی حدود بالعموم کافی سرعت سے گھٹتی جاتی ہیں کیونکہ جن صورتوں میں قاعدۂ ہذا لگ سکتا ہے ان میں م اکثر اوقات ایک چھوٹی کسر ہوتی ہے۔ بعد ازیں ہم ا$_2$ پر یہی عمل کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس قاعدہ کی کامیابی کے لئے ضروری ہے کہ فَ (لا) اصل کے قریب کسر واجب ہو۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نیوٹن کا طریقہ متواتر تقربات کی ایک خاص صورت ہے اور تاوقتیکہ م بہت چھوٹا نہ ہو مؤخر الذکر طریقہ کو نیوٹن کے طریقہ پر کوئی فوقیت حاصل نہیں۔

مشق - ۱۰^{لا} = ۳۴۵۶ √لا

اساس ۱۰ پر لوکارتم لینے سے

لا = ½ لوک لا + ۳٫۵۳۸۵۷۳۷ = فہ (لا)

اگر ہم ½ لوک لا کی ترسیم اور نیز لا - ۳٫۵۳۸۵۷۳۷ کی ترسیم بنائیں تو ہم دیکھینگے کہ یہ ترسیمیں لا کی ایک ایسی قیمت کے لئے جو ۴ کے نہایت قریب ہو اور نیز لا کی نہایت چھوٹی قیمت پر قطع کرتی ہیں۔ پہلے ا = ۴ کو لو،

تب فہَ (لا) = م / ۲لا = ۰٫۴۳۴۳ / ۲لا جہاں م = لوک$_{10}$ و

یعنی جب لا تقریباً ۴ کے مساوی ہو تو فہَ (لا) کسر واجب ہوتی ہے۔

پہلے تقربات کے لئے چار ہندسی لوکارتم لو

ا$_1$ = فہ (۴) = ۳٫۵۳۸۶ + ۰٫۳۰۱۰ = ۳٫۸۳۹۶

ل۳ = فد (ل۲) = ۳،۵۳۸۶ + ،۲۹۲۱ = ۳،۸۳۰۷

ل۴ = فد (ل۳) = ۳،۵۳۸۶ + ،۲۹۱۶ = ۳،۸۳۰۲

جب لا = ل۴، لا − فد (لا) = ،۰۰۰۵ یعنی ل۴ اصل کے اچھا خاصہ قریب ہے۔

اب سات ہندسی لوگارتم لو، تب

ل۵ = فد (ل۴) = ۳،۵۳۸۵۷۳۷ + ،۲۹۱۶۱۰۷ = ۳،۸۳۰۱۸۴۴

ل۶ = فد (ل۵) = ۳،۸۳۰۱۸۳۵

ل۷ = فد (ل۶) = ۳،۸۳۰۱۸۳۵

ل۶ اعشاریہ کے ساتویں مقام تک درست ہے۔

دوسری اصل کے لئے یہ قاعدہ ناموزوں ہے، کیونکہ صفر کے نزدیک فدَ(لا) ایک سے بڑا ہے، لیکن چونکہ لا بہت چھوٹا ہے، اس لئے ہم لا کی وہ قیمت لینے سے جو فد (لا) = ۰ کو پورا کرتی ہے ایک خاصی تقریبی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ لہٰذا

لوگ لا = −۴،۰۷۷۱۴۷۴ = ۸̄،۹۲۲۸۵۲۶

اور لا = ،۰۰۰۰۰۰۰۸۳۷۲۴۵

۱۰۶ — اصل کا پھیلاؤ سلسلہ میں۔ سلسلوں کا پلٹنا۔

فرض کرو کہ مساوات لا = فد (لا) ہے

لا = ا ما + ب لا۲ + ج لا ما + د ما۲ + ع لا۳ + ف لا۲ ما + گ لا ما۲ + ھ ما۳ + ...

یا لا = ا ما + ع۲ + ع۳ + ...

جہاں ع۲، ع۳، .... لا، ما میں دوسرے، تیسرے، .... درجہ کے ہیں۔

اگر ما کوئی چھوٹی مقدار ہو تو ایک اصل تقریباً ا ما ہوگی کیونکہ لا کی یہ قیمت ع۲ کو ما میں درجہ دوم کا اور ع۳ کو ما میں درجہ سوم کا .... بنا دیتی ہے۔ اس تقرب کو ا۱ سے موسوم کرو۔ صریحاً لا کی چھوٹی قیمتوں کے لئے ہم فدَ (لا) کو کسر واجب فرض کر سکتے ہیں۔

دوسرا تقرب ل۲ = فد (ا۱) = فد (ا ما) ہے

ما کے دوسرے درجہ تک ہم ع۳، ع۴ ..... کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔
اور فرض کر سکتے ہیں کہ

$$ل_۱ = فما (ا ما) = ا ما + ب (ا ما)^۲ + ج (ا ما) ما + د ما^۲$$

$$= ا ما + ب_۱ ما^۲ .... \text{(فرض کرو)}$$

اگلا تقرب ہے ل۲ = فہ (ل۱) اور فما (ل۱) بنانے میں ہمیں صرف ما میں درجہ سوم کی رقوم باقی رکھنا کافی ہوگا۔ اس لئے ع۲ میں ہمیں صرف پہلا تقرب ل۱ یا ا ما کو مندرج کرنا چاہئے کیونکہ اگر ہم ا ما + ب۱ ما۲ مندرج کریں تو سوائے ان رقوم کے جو ا ما سے حاصل ہوتی ہیں باقی سب رقوم درجہ سوم سے بڑے درجہ کی ہیں۔ ع۲ میں ہم ل۱ یا ا ما + ب۱ ما۲ مندرج کریں گے لیکن رقم ب (ب۱ ما۲)۲ کو ترک کر دیں گے۔ کیونکہ یہ درجہ چہارم کی ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$ل_۲ = ا ما + ب_۱ ما^۲ + ج_۱ ما^۳$$

اسی طرح سے ہم فما (ل۲) بھی معلوم کر سکتے ہیں۔
پس عملی طور پر اس طریقہ کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کیا جا سکتا ہے۔
پہلے تقرب کے لئے ع۲، ع۳ ..... کو نظر انداز کرو، ایسا کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے
ا ما = ل۱

دوسرے تقرب کے لئے ع۳، ع۴ ..... کو نظر انداز کرو اور ع۲ میں ل۱ کو مندرج کرو۔ اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ا ما + ب۱ ما۲ = ل۲

تیسرے تقرب کے لئے ع۴، ع۵ ..... کو نظر انداز کرو، ع۲ میں ل۲ کو اور ع۳ میں ل۱ کو مندرج کرو اور تیسرے سے بڑے درجہ کی رقموں کو نظر انداز کرو۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے ا ما + ب۱ ما۲ + ج۱ ما۳ = ل۳

چوتھے تقرب کے لئے ع۵ ..... کو نظر انداز کرو، ل۳ و ع۲ میں، ل۲ کو ع۳ میں، ل۱ کو ع۴ میں مندرج کرو اور چوتھے سے بڑے درجہ کی رقوم کو نظر انداز کرو۔ اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے: ا ما + ب۱ ما۲ + ج۱ ما۳ + ک۱ ما۴ = ل۴ اور علیٰ ہذا القیاس۔

مشق ۱- $لا = ۲ما + لا^{۲} - لا ما + لا^{۳} - لا^{۴}$

پہلا تقرب $لا = ۲ما$

دوسرا تقرب $لا = ۲ما + (۲ما)^{۲} - (۲ما)ما = ۲ما + ۲ما^{۲}$

تیسرا تقرب $لا = ۲ما + (۲ما + ۲ما^{۲})^{۲} - (۲ما + ۲ما^{۲})ما + (۲ما)^{۳}$

$= ۲ما + ۲ما^{۲} + ۱۴ما^{۳}$

چوتھا تقرب $لا = ۲ما + (۲ما + ۲ما^{۲} + ۱۴ما^{۳})^{۲} - (۲ما + ۲ما^{۲} + ۱۴ما^{۳})ما$

$+ (۲ما + ۲ما^{۲})^{۳} - (۲ما)^{۴}$

$= ۲ما + ۲ما^{۲} + ۱۴ما^{۳} + ۵۴ما^{۴}$

مشق ۲- فا(لا) ایک لامتناہی سلسلہ ہو سکتا ہے جبکہ مستدق ہونیکی معمولی شرطیں پوری کرے۔

مثلاً اگر ہم رکھیں $قو^{لا} = ۱ + ما$ تو

$$لا + \frac{۱}{۲}لا^{۲} + \frac{۱}{۶}لا^{۳} + \frac{۱}{۲۴}لا^{۴} + \ldots = ما$$

$$یا \quad لا = ما - \frac{۱}{۲}لا^{۲} - \frac{۱}{۶}لا^{۳} - \frac{۱}{۲۴}لا^{۴} \ldots\ldots$$

اور طالب علم آسانی سے دیکھ سکتا ہے کہ چوتھے درجہ تک

$$لا = ما - \frac{۱}{۲}ما^{۲} + \frac{۱}{۳}ما^{۳} - \frac{۱}{۴}ما^{۴}$$

یعنی $لوک(۱ + ما) = ما - \frac{۱}{۲}ما^{۲} + \frac{۱}{۳}ما^{۳} - \frac{۱}{۴}ما^{۴}$

یہ سلسلوں کے پلٹنے کی ایک مثال ہے۔ دفعہ ہذا کے مضمون پر مفصل اور پیچیدہ بحث کرنا اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔ پوری تشریح کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ کرسٹل کا "الجبرا" جلد دوم، باب ۳۰ کا مطالعہ کرے۔

مشق ۳- ما کو لا کی بڑی قیمتوں کے لئے لا کی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلاؤ جبکہ $ما^{۳} + لا^{۳} = ۳ا\, لا\, ما$

جب، لا اور ما دونوں بڑے ہوں تو حاصل ضرب لا ما کو $لا^{۳}$ اور $ما^{۳}$ کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اس لئے پہلے تقرب کے لئے $ما^{۳} + لا^{۳} = ۰$،

یعنی $\text{ما} = -\text{لا}$

دوسرا تقرب حاصل کرنے کے لئے لکھو

$$\text{ما} = -\text{لا} + ۳\,\text{لا}\,\text{ما} / (\text{لا}^۲ - \text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^۲)$$

اور بائیں جانب ما کی بجائے - لا رکھو - اس طرح سے ہمیں دوسری تقریبی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\text{ما} = -\text{لا} + ۳\,\text{لا}(-\text{لا}) / (\text{لا}^۲ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۲) = -\text{لا} - ۱$$

تیسرا تقرب حاصل کرنے کے لئے ما کی بجائے - (لا + ۱) رکھو اور $\frac{۱}{\text{لا}}$ کی قوتوں میں پھیلاؤ، $\frac{۱}{\text{لا}}$ بموجب مفروضہ چھوٹا ہے کیونکہ لا بڑا ہے، تب

$$\text{ما} = -\text{لا} - \frac{۳\,\text{لا}(\text{لا} + ۱)}{۳\,\text{لا}^۲ + ۳\,\text{لا} + ۱} = -\text{لا} - ۱\left(۱ + \frac{۱}{\text{لا}}\right)\left(۱ + \frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{۳\,\text{لا}^۲}\right)^{-۱}$$

$$= -\text{لا} - ۱\left(۱ + \frac{۱}{\text{لا}}\right)\left\{۱ - \left(\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{۳\,\text{لا}^۲}\right) + \left(\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{۳\,\text{لا}^۲}\right)^۲\right\}$$

$$= -\text{لا} - ۱\left(۱ - \frac{۱}{۳\,\text{لا}^۲}\right) = -\text{لا} - ۱ + \frac{۱}{۳\,\text{لا}^۲}$$

خط $\text{ما} = -\text{لا} - ۱$ منحنی کا متقارب ہے - رقم $\frac{۱}{۳\,\text{لا}^۲}$ سے ظاہر ہے کہ متقارب کے دونوں سروں پر منحنی متقارب کے اوپر واقع ہے - (دیکھو مشق ۶، مثال ۱۲)

اس دفعہ کا طریقہ منحنی پر کے کسی نقطہ کے نزدیک اس کی شکل معلوم کرنے میں بہت کارآمد ہوتا ہے، اگر نقطہ مذکور مبدأ نہ ہو تو ہم مبدأ کو اس نقطہ پر منتقل کر سکتے ہیں، تب منحنی کی مساوات اس شکل کی ہوگی جو دفعہ ہذا کی ابتدا میں دی گئی ہے - اگر ہم ما کو لا کی قوتوں میں پھیلانا چاہیں تو ہم منحنی کی مساوات کو اس شکل $\text{ما} = \text{سا}(\text{ما})$ میں لکھ سکتے ہیں - متقارب معلوم کرنے اور بالعموم مبدأ سے بڑے فاصلہ پر منحنی کی شکل کی تحقیق کرنے میں اس قاعدہ کے استعمال کے لئے مثال ۳ کو بطور نمونہ تصور کیا جا سکتا ہے - علم ہندسہ میں اس قاعدہ کے استعمال کی بسیط تشریح کے لئے فراسٹ نے جو ترسیم منحنیات پر ایک

قابل قدر رسالہ لکھا ہے (Curve tracing by Frost) اُس کو ملاحظہ کرنا سود مند ثابت ہوگا۔ اس کتاب کے متعلق پروفیسر کرسٹل کی رائے ہے کہ "یہ کتاب ہر ایسے شخص کے پاس موجود ہونی چاہئے جو عملی طور پر یا نظری طور پر ریاضی دان بننے کی آرزو رکھتا ہو"۔

۱۰۷۔ مساوات لا = مس لا

م لا = مس لا کی شکل کی مساواتیں ایصال حرارت کے نظریہ میں اور مرتعش بتروں کے نظریہ میں بکثرت واقع ہوتی ہیں۔ سہولت کی غرض سے ہم پہلے م = ۱ لیتے ہیں، لیکن اگر م ایک کے برابر نہ ہو تو بھی بحث کے استدلال میں اصولاً کچھ اختلاف واقع نہیں ہوتا۔ صفر صریحاً ایک اصل ہے اور منفی اصلیں تعداداً مثبت اصلوں کے مساوی ہیں، اس لئے صرف مثبت اصلوں پر غور کرنا کافی ہوگا۔

مس لا اور لا کی ترسیمیں کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیمیں وقفوں

(π، ۳π/۲)، (۲π، ۵π/۲) اور بالعموم (ن π، ن π + π/۲) کے اندر ایک

اور صرف ایک دفعہ قطع کرتی ہیں جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے ہر ایک وقفہ کے اندر مساوات کی ایک اور صرف ایک ہی اصل ہے اور صفر اور π/۲ کے درمیان کوئی اصل نہیں ہے۔

فرض کرو کہ لا - مس لا = ف (لا)، اب نیوٹن کے قاعدہ کی مدد سے

وقفہ (π، ۳π/۲) کے اندر کی اصل محسوب کرو۔

ف′ (لا) = - مس² لا ، ف″ (لا) = - ۲ مس لا قط² لا

جدولوں سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ ۱۸۰° + ۷۷° اور ۱۸۰° + ۷۸° کے درمیان واقع ہے۔ ان زاویوں کو نیم قطریوں میں بیان کرنے سے ہمیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک حاصل ہوتا ہے۔

لا = ۴٫۴۸۵ ، ف (لا) = ٫۱۵۴

لا = ۴٫۵۰۳ ، ف (لا) = -٫۲۰۲ ، ف′ (لا) = -۲۲٫۱

چونکہ ف (لا) منفی ہے اسلئے ہم لیتے ہیں ا = ۴،۵۰۳، ب = ۴،۴۸۵
پس د = ۰،۰۱۸ > ۰،۰۲ اور یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ ک چھوٹا ہے ۵ سے۔

ا۱ = ا - ف (ا) / ف َ (ا) = ۴،۵۰۳ - ۰،۰۰۹ = ۴،۴۹۴

اور غلطی د۲ ک یعنی ۰،۰۰۲ سے کم ہے۔
اس سے بہتر تقریب معلوم کرنے میں اس امر کی احتیاط رکھنی چاہیے کہ ہم اصل سے آگے نہ نکل جائیں۔ اگر ہم ایسا کریں تو ف (ا۱) مثبت ہوگا۔ مماس بڑی سرعت سے بدلتا ہے، اس لئے اگر چار ہندسی جدول استعمال کئے جائیں تو اصل سے آگے نکل جانے کا اندیشہ ہے۔ علاوہ ازیں بعد کے تقریب میں غلطی د ک۳ یا ۲×۱۰^-۵ سے کم ہوگی، اس لئے ہم معمولی سات ہندسی جدولیں استعمال کر سکتے ہیں۔
ا۱، اصل سے آگے نہیں ہے کیونکہ ف (ا۱) = -۰،۰۱۱۹۵۴۲
نیز ا۲ = ا۱ - ف (ا۱) / ف َ (ا۱) = ا۱ - ۰،۰۰۰۰۵۸۸۸ = ۴،۴۹۳۴۱۱۲
اس لئے اگر ہم اصل کو ۴،۴۹۳۴ فرض کریں تو غلطی آخری مقام میں دو اکائیوں سے کم ہوگی، زیادہ تقریبی قیمت ۴،۴۹۳۴۰۹۵ ہے۔
اور اصلیں حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ لا = ن π + π/۲ - طہ، تب طہ ایک حادہ زاویہ ہے اور

$$\text{مس لا} = \text{مس}\left(\frac{\pi}{2} - \text{طہ}\right) = \frac{1}{\text{مس طہ}}$$

اور چونکہ لا = مس لا، اس لئے مس طہ = ۱/لا، طہ = مس^-۱ (۱/لا)

اس لئے ن π + π/۲ کی بجائے ج رکھنے سے

$$\text{لا} = \text{ج} - \text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{\text{لا}}\right)$$

بعد کے باب میں یہ دکھایا گیا ہے کہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{\text{لا}}\right) = \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{3\,\text{لا}^3} + \frac{1}{5\,\text{لا}^5} - \frac{1}{7\,\text{لا}^7} + \ldots\ldots$$

یعنی $\text{لا} = \text{ج} - \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{3\,\text{لا}^3} - \frac{1}{5\,\text{لا}^5} + \frac{1}{7\,\text{لا}^7} - \cdots\cdots$

یہ مساوات دفعہ ماقبل کے طریقہ سے حل کی جا سکتی ہے کیونکہ ن = ۲ کے لئے بھی لا، ۵ ۶ ۷ سے بڑا ہے اور اس لئے $\frac{1}{\text{لا}}$ خاصہ چھوٹا ہے۔

پہلا تقرب $\quad \text{لا} = \text{ج}$

دوسرا تقرب $\quad \text{لا} = \text{ج} - \frac{1}{\text{ج}}$

تیسرا تقرب $\quad \text{لا} = \text{ج} - \left(\text{ج} - \frac{1}{\text{ج}}\right)^{-1} + \frac{1}{3\,\text{ج}^3} = \text{ج} - \frac{1}{\text{ج}} - \frac{2}{3\,\text{ج}^3}$

چوتھا تقرب $\quad \text{لا} = \text{ج} - \left(\text{ج} - \frac{1}{\text{ج}} - \frac{2}{3\,\text{ج}^3}\right)^{-1} + \frac{1}{3}\left(\text{ج} - \frac{1}{\text{ج}}\right)^{-3} - \frac{1}{5\,\text{ج}^5}$

$$= \text{ج} - \frac{1}{\text{ج}}\left(1 + \frac{1}{\text{ج}^2} + \frac{5}{3\,\text{ج}^4}\right) + \frac{1}{3\,\text{ج}^3}\left(1 + \frac{3}{\text{ج}^2}\right) - \frac{1}{5\,\text{ج}^5}$$

$$= \text{ج} - \frac{1}{\text{ج}} - \frac{2}{3\,\text{ج}^3} - \frac{13}{15\,\text{ج}^5}$$

پانچواں تقرب $\quad \text{لا} = \text{ج} - \frac{1}{\text{ج}} - \frac{2}{3\,\text{ج}^3} - \frac{13}{15\,\text{ج}^5} - \frac{146}{105\,\text{ج}^7}$

ن = ۲، ۳، ۴، ..... کے لئے آخری تقرب عملی طور پر کافی صحیح ہوتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ ن = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ..... کے لئے $\frac{\text{لا}}{\pi}$ کی قیمتیں ۱٫۴۳۰۳، ۲٫۴۵۹۰، ۳٫۴۷۰۹، ۴٫۴۷۷۴، ۵٫۴۸۱۸، ۶٫۴۸۴۴ ہیں، ملاحظہ ہو ریلے کی کتاب "آواز"۔ آئلو نے بہت سی مساواتوں پر جن میں مثلثی اور قوت نمائی تفاعل شامل ہیں مفصل بحث کی ہے اور مساوات لا = مس لا کا عام حل اُسی کے ساتھ منسوب ہے۔

مشق ۲۰

ذیل کی مثالوں میں اصل کو اعشاریہ کے تیسرے یا چوتھے مقام تک محسوب کرنا

بالعموم کافی ہوگا۔ بعض صورتوں میں جوابات اس سے زیادہ ہندسوں تک درج کیے گئے ہیں۔

۱۔ ۳ لا^۳ + ۵ لا ۔ ۴۰ = ۰ کی حقیقی اصل معلوم کرو۔

۲۔ نصف قطر ا کے ایک کرہ کو ایک سطح مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کے حجم نسبت ۱ : ۲ میں ہیں۔ کرہ کے مرکز سے سطح مستوی کا فاصلہ لا مساوات ۳ لا^۳ ۔ ۹ لا + ۲ = ۰ کی اصل ہے، لا معلوم کرو۔

۳۔ لا^۳ ۔ ۴ لا^۲ ۔ ۷ لا + ۲۴ = ۰ کی وہ اصل معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔

۴۔ اگر (۱ + لا)^لا = ۲۷،۳۴ تو لا معلوم کرو۔

۵۔ اگر ۱۰^لا = ۲۰ لا تو لا معلوم کرو۔

۶۔ ایک دائرہ کا وتر اب ہے اور مرکز ج ہے، وتر مذکور قطاع اج ب کی تنصیف کرتا ہے۔ اگر زاویہ اج ب، لا نیم قطریوں کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ لا = ۲ جب لا اور لا معلوم کرو۔

۷۔ مساوات لا = جم لا کو حل کرو۔

۸۔ مساوات ۲ لا = مسں لا کی ایک اصل ۰ اور π/۲ کے درمیان ہے اور دوسری π اور ۳π/۲ کے، دونوں اصلیں معلوم کرو۔

۹۔ بتاؤ کہ مساوات

ل = ا (ق^(ج/۲ا) ۔ ق^(-ج/۲ا))

کو ا میں کس طرح حل کیا جائے جبکہ ل اور ج دئے ہوئے ہوں اور ل، ج سے زیادہ بڑا نہ ہو، مثلاً ج = ۱۰۰، ل = ۱۰۵، ا کی قیمت سے ایک منحنی متعین ہوتا ہے جسے ہم زنجیرہ (Catenary) کہینگے۔ یہ زنجیرہ طول ل کی رسی کو دو افقی نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ج ہے لٹکانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۰۔ ذیل کی مساواتوں کی چھوٹی سے چھوٹی اصلیں معلوم کرو

(۱) (قو$^{\text{لا}}$ + قو$^{-\text{لا}}$) جم لا - ۲ = ۰

(۲) (قو$^{\text{لا}}$ + قو$^{-\text{لا}}$) جم لا + ۲ = ۰

ظاہر ہے کہ (۱) کی ایک اصل صفر ہے، اگلی چھوٹی سے چھوٹی اصل معلوم کرو۔

۱۱۔ لا - ا جب لا = ب کو حل کرو جہاں ا = ۲۴۵۳۱۶ ؛

ب = ۵۱۷۵۵۰۶۷

۱۲۔ ثابت کرو کہ لا = فہ (لا) کی اصل عہ کی تقریبی قیمتیں جو دفعہ ۱۰۵ کے طریقہ سے حاصل ہوتی ہیں وہ متبادلاً عہ سے بڑی اور چھوٹی ہونگی اگر فہَ (عہ) منفی ہو۔

۱۳۔ اگر ف (لا، ما) = ۰ اور فا (لا، ما) = ۰ کا تقریبی حل زوج لا = ا، ما = ب ہو تو ثابت کرو کہ عام طور پر ا + ھ، ب + ک زیادہ تقریبی قیمتیں ہونگی اگر ھ، ک ذیل کی مساواتوں کو پورا کریں

ف (ا، ب) + ھ (جف ف / جف لا) + ک (جف ف / جف ما) = ۰، فا (ا، ب) + ھ (جف فا / جف لا)

+ ک (جف فا / جف ما) = ۰

جہاں مشتقوں میں لا، ما کی بجائے ا، ب رکھدئے جائیں۔

اگر ف (لا، ما) = لا^{۳} + ۳ لا ما^{۲} - ما - ۱۲، فا (لا، ما) = ۲ لا^{۲} ما + ما^{۳} - ۸ تو

لا = ۲، ما = ۱ کے نزدیک اصلوں کی زیادہ تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۴۔ اگر (ما - لا) (ما - ۲ لا) = لا^{۳} + ۲ لا^{۲} ما + لا ما^{۲} تو ثابت کرو کہ جب، لا چھوٹا ہو تو ما کی دو قیمتیں لا کی رقوم میں، تیسرے رتبہ کی رقوم تک، معادلات ذیل

ما = لا - لا^{۲} - لا^{۳} اور ما = ۲ لا + لا^{۲} + ۳ لا^{۳}

سے حاصل ہوتی ہیں۔

ثابت کرو کہ مساوات سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے اس کی دو شاخیں ہیں جو مبدا میں سے

گزرتی ہیں اور مبدا پر کے مماس ہیں $\text{ما} = \text{لا}$ اور $\text{ما} = ۲\,\text{لا}$ ۔ لا کی چھوٹی قیمتوں کے لئے منحنی کا خاکہ کھینچو۔

[$\text{ما} = \text{لا} + \dfrac{\text{لا}^{۲}}{\text{ما} - ۲\,\text{لا}} + \dfrac{۲\,\text{لا}^{۳}\,\text{ما}}{\text{ما} - ۲\,\text{لا}} + \dfrac{\text{لا}^{۴}\,\text{ما}^{۲}}{\text{ما} - ۲\,\text{لا}}$ اور بعدہٗ دفعہ ۱۰۶ الے مطابق عمل کرو، پھر لکھو $\text{ما} = ۲\,\text{لا} + \text{لا}^{۲} / (\text{ما} - \text{لا}) +$ وغیرہ]

۱۵- اگر $\text{ا}^{۲}(\text{ما} - \text{لا}^{۲}) = \text{لا}^{۴} + \text{ما}^{۴}$ تو ثابت کرو کہ لا کی چھوٹی قیمتوں کے لئے ما کی دو قیمتیں ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں:-

$$\text{ما} = \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۴}/\text{ا}^{۲} \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{ا} - \text{لا}^{۲} - \text{لا}^{۴}/\text{ا}^{۲}$$

یہ بھی دکھاؤ کہ (۰، ا) کے نزدیک منحنی کی شکل

$$\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}\,(\text{ما} - \text{ا}) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہے۔
منحنی کو مرتسم کرو۔

۱۶- اگر $(\text{ما} - \text{لا})^{۲} = \text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲}\,\text{ما} + \text{لا}^{۴}$ تو ثابت کرو کہ لا کی چھوٹی قیمتوں کے لئے

$$\text{ما} = \text{لا} \pm \sqrt{۲}\,\text{لا}^{۳/۲}$$

مبدا کے نزدیک منحنی کی ترسیم کھینچو۔

۱۰۸- **اجزائے متناسب**۔ لوکارثمی جدولوں اور اسی قسم کی دیگر جدولوں میں اکثر اوقات ضرورت پڑتی ہے کہ تفاعل کی قیمت وجہ یا دلیل کی ایسی قیمت کے لئے معلوم کی جائے جو ٹھیک طور پر جدولوں میں دکھائی نہیں گئی۔ ایسی صورت میں اندراج کا عمل کرنا پڑتا ہے اور اس کے لئے معمولی قاعدہ اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ تفاعل کا فرق دلیل کے فرق کے متناسب ہے۔
اب ہم اس مفروضہ کے جواز پر غور کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ ھ اور ی ایک ہی علامت کی دو مقداریں ہیں لیکن ی تعداد میں کم ہے ھ سے۔ تب اوسط قیمت کے مسئلہ کی رُو سے جبکہ ف (لا)، فَ (لا)

اور فً (لا) کو مسلسل فرض کیا جائے ذیل کی مساواتیں تقریباً درست ہیں۔

ف (ا + ھ) ـ ف (ا) = ھ فَ (ا) + ۱/۲ ھ^۲ فً (ا) ....(۱)

ف (ا + ی) ـ ف (ا) = ی فَ (ا) + ۱/۲ ی^۲ فً (ا) ....(۲)

فرض کرو کہ د = ف (ا + ھ) ـ ف (ا)، فَ (ا) کو ساقط کرو، اس لئے

ف (ا + ی) ـ ف (ا) = ی/ھ د + ۱/۲ ی (ی ـ ھ) فً (ا) ....(۳)

مساوات (۳) تقریبی ہے، لیکن اوسط قیمت کے مسئلہ کے ثبوت کی پیروی کرنے سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ عین ٹھیک ہوگی اگر ہم فً (ا) کی بجائے فً (ا + طہ ھ) لکھیں جہاں طہ کسر واجب ہے۔

کیونکہ فرض کرو ف (ا + ی) ـ ف (ا) = ی/ھ د + ۱/۲ ی (ی ـ ھ) ض

.... (ا)

اور فرض کرو کہ فا (لا) = ف (لا) ـ ف (ا) ـ (لا ـ ا)/ھ د

ـ ۱/۲ (لا ـ ا) (لا ـ ا ـ ھ) ض

اب فا (ا) = ۰ (متماثلاً)، فا (ا + ی) = ۰ (مساوات (ا) سے) فا (ا + ھ) = ۰ (متماثلاً) د کی قیمت کی رو سے، اس لئے فاَ (لا) کو ا اور ا + ی کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت کے لئے صفر ہونا چاہئے اور نیز اس کو ا + ی اور ا + ھ کے درمیان لا کی ایک قیمت کے لئے صفر ہونا چاہئے۔ اس لئے فاً (لا) کو ان قیمتوں کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت کے لئے صفر ہونا چاہئے یعنی ا اور ا + ھ کے درمیان صفر ہونا چاہئے۔

لیکن فاً (لا) = فً (لا) ـ ض

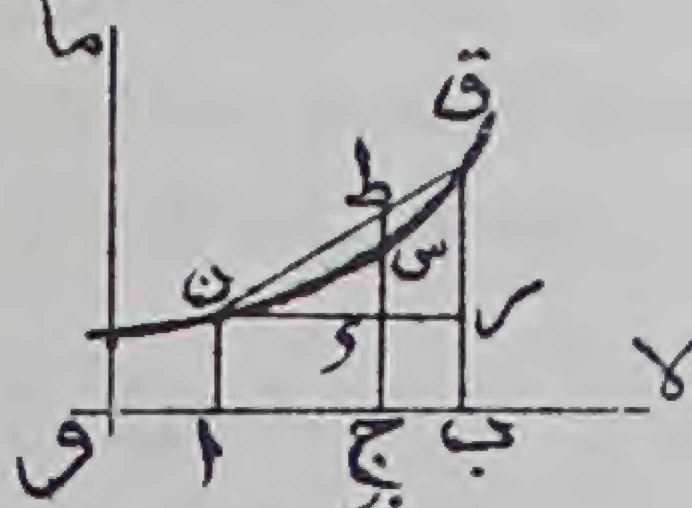
اس لئے ض = فً (ا + طہ ھ)

اس لئے (۳) کی بجائے ہمیں ٹھیک مساوات

ف (ا + ی) ـ ف (ا) = ی/ھ د + ۱/۲ ی (ی ـ ھ) فً (ا + طہ ھ)

..... (۴)

حاصل ہوتی ہے جہاں د = ف (ا + ھ) - ف (ا)



شکل ۵۳

شکل ۵۳ میں

و ا = ا، ا ج = ی

اب = ھ، ر ق = ف (ا + ھ)

- ف (ا) = د

ء س = ف (ا + ی) - ف (ا)

ء ط = ی د / ھ

س ط = $\frac{1}{2}$ ی (ھ - ی) ف'' (ا + طا ھ)

قوس ن س ق کی بجائے وتر ن ط ق لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اس کا ناپ س ط ہے، ی مفروضہ کی بنا پر ھ سے چھوٹا ہے اور ی (ھ - ی) کی تعداداً بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{4}$ ھ² ہے اس لیے اگر وقفہ (ا، ا + ھ) میں ف'' (لا) کی تعداداً بڑی سے بڑی قیمت گ ہو تو س ط یا $\frac{1}{2}$ ی (ھ - ی) ف'' (ا + طا ھ) کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{8}$ ھ² گ ہوگی۔

اب فرض کرو کہ لا کی مختلف متساوی الفصل قیمتوں کے لئے ف (لا) کی قیمتیں ایک جدول میں درج کی گئی ہیں جہاں لا کی متواتر قیمتوں کا فرق ھ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ا اور ا + ھ کے درمیان لا کی کوئی قیمت ا + ی ہے اور یہ جدول میں درج نہیں ہے، عام قاعدہ یہ ہے کہ ف (ا + ی) کو مساوات (۴) سے محسوب کیا جاتا ہے اور بائیں طرف کی دوسری رقم کو نظرانداز کر دیا جاتا ہے یعنی

ف (ا + ی) = ف (ا) + $\frac{\text{ی}}{\text{ھ}}$ د

پس ظاہر ہے کہ ا کی کسی دی ہوئی قیمت کے جواب میں ف (ا + ی) کی قیمت محسوب کرنے کے لئے ف (ا) کی قیمت میں جو اضافہ کرنا پڑتا ہے یعنی ی $\frac{\text{د}}{\text{ھ}}$ وہ ی کے متناسب ہے۔ اس لئے اس قاعدہ پر عمل کرنے سے

جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{ه^2 گ}{8}$ سے بڑی نہیں ہوتی۔

اس قاعدہ کی مستثنیٰ صورتیں یہ ہیں۔

۱۔ ممکن ہے گ ایسا ہو کہ $\frac{ه^2 گ}{8}$ کو ی $\frac{د}{ه}$ کے مقابلہ میں نظر انداز نہ کیا جا سکے۔ اس صورت میں فرق د کو بے قاعدہ کہتے ہیں۔

۲۔ ممکن ہے کہ د اتنا چھوٹا ہو کہ جدول کے ہندسوں کی تعداد کے اندر اس سے تبدیلی پیدا نہ ہو سکے، اگر ایسا ہو تو فرق کو "خفیف" کہتے ہیں۔ فرق خفیف ہوگا جبکہ $ف'(ا)$ بہت چھوٹا ہو، کیونکہ

$$د = ف(ا+ه) - ف(ا) = ه ف'(ا) + \frac{1}{2} ه^2 ف''(ا+ط ه)$$

مثال۔ $ف(لا) = لوک_{10}$ جب لا

فرض کرو کہ م = $لوک_{10}$ ی = ۴۳۴۲۹۴۵ء

اور $ف'(لا) = م$ جم لا ، $ف''(لا) = -م$ قم^2 لا

اگر لا چھوٹا ہو تو $ف''(لا)$ بڑا ہوگا، اور فرق بے قاعدہ ہونگے چونکہ جم لا چھوٹا نہیں ہے، اس لئے فرق خفیف نہیں ہو سکتے۔

اگر لا تقریباً °۹۰ ہو تو جم لا چھوٹا ہوگا اور فرق خفیف ہونگے، اگرچہ $ف''(لا)$ بڑا نہیں ہے تاہم نسبت $ف''(لا)/ف'(لا) = -۲/$جب ۲ لا

تعداداً بڑی ہے اور اس لئے $\frac{ه^2 گ}{8}$ کو $\frac{ی د}{ه}$ کے مقابلہ میں نظر انداز نہیں کیا جا سکتا، اس لئے °۹۰ کے قریب فرق خفیف ہیں اور بے قاعدہ بھی ہیں۔

جن جدولوں میں دلیل یا وجہ کا فرق '۱ ہوتا ہے، ان میں ه، '۱ کے مساوی ہے اور نیم قطریوں میں

ه = ۰۰۰۲۹۰۹ء

اور $\frac{1}{2}$ م $ه^2$ = ۰۰۰۰۰۰۴۲ء

یہ معلوم کرنے کے لئے کہ $\frac{1}{2}$ م $ه^2$ قم^2 لا سے ساتویں مقام پر کب اثر پڑیگا

ہم رکھتے ہیں

$$\frac{1}{8}\,\text{م}\,\text{ھ}^{2}\,\text{قم}^{2}\,\text{لا} = 5 \times 10^{-8}$$

اور اس مساوات سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ لا = ۱°۸ تقریباً، پس تعدادی اور حسابی عمل کے دوران میں، نظر انداز کئے ہوئے ہندسوں کی بنا پر جو غلطی واقع ہوسکتی ہے اور جو آسانی سے اعشاریہ کے ساتویں مقام پر اکائی سے زیادہ ہوسکتی ہے اس غلطی کے علاوہ، رقم $\frac{\text{ھ}^{2}\text{گ}}{8}$ کے ترک کردینے سے، ۱°۸ سے کم مقدار کے زاویوں کے لئے ساتویں مقام پر نصف اکائی کی غلطی وقوع پذیر ہوگی۔

اگر ھ، ۱۰$^{-۳}$ کے مساوی ہو تو طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ $\frac{\text{ھ}^{2}\text{گ}}{8}$ کو ترک کرنے سے ساتویں ہندسہ پر کوئی اثر نہیں پڑیگا جب تک کہ زاویہ تقریباً ۳° نہ ہوجائے اس موضوع سے متعلق طالب علم ھابنسن کے علم مثلث، باب ہم کا مطالعہ کرے۔

مشق ۱۔ ثابت کرو کہ لوک جم لا کے لئے فرق خفیف اور بے قاعدہ ہوتے ہیں جبکہ لا بہت چھوٹا ہو اور بے قاعدہ ہوتے ہیں جبکہ لا تقریباً ۹۰° ہو۔

مشق ۲۔ ثابت کرو کہ لوک مس لا کے لئے فرق بے قاعدہ ہوتے ہیں جبکہ لا چھوٹا ہو اور جبکہ لا، ۹۰° کے قریب ہو، نیز دکھاؤ کہ اعظم غلطی چھوٹی سے چھوٹی ہوگی جبکہ لا تقریباً ۴۵° ہو۔

مشق ۳۔ عددوں کے لوکارثموں کی سات ہندسوں والی جدولوں میں ثابت کرو کہ رقم $\frac{\text{ھ}^{2}\text{گ}}{8}$ بہت وقیع ہوتی ہے جبکہ عدد ۱۰۰۰ ہو اور اس رقم کو نظر انداز کرنے سے جو بڑی سے بڑی غلطی واقع ہوسکتی ہے وہ تقریباً ۵۵ × ۱۰$^{-۱۰}$ کے مساوی ہوتی ہے اور اس لئے ان جدولوں کے لحاظ سے نظر انداز ہوسکتی ہے۔

۱۰۹۔ **چھوٹی تصحیحات**۔ عملی طور پر سب پیمائشوں میں غلطی کا امکان

باقی رہ جاتا ہے، اس لئے جب کسی محسوبہ تفاعل کی دلیل یا دلیلیں پیمائشوں سے حاصل کی جائیں جنکی غلطیاں تقریبی طور پر معلوم ہوں تو اس امر کی تحقیق کرنا ضروری ہوتا ہے کہ ان غلطیوں کی وجہ سے محسوبہ تفاعل کی قیمت پر کیا اثر پڑتا ہے۔

فرض کرو کہ کوئی مقدار لا پیمائش سے معلوم کی گئی ہے اور ما، لا کا تفاعل ف (لا) ہے۔ نیز فرض کرو کہ پیمائش سے لا کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے وہ اصلی قیمت سے بقدر مف لا کے متفاوت ہے، تب ما کی اصلی قیمت ف (لا + مف لا) ہے اور غلطی

$$\text{مف ما} = \text{ف (لا + مف لا)} - \text{ف (لا)} = \text{فَ (لا + طہ مف لا) مف لا}$$

$$\text{اور } \text{مف ما} = \text{فَ (لا) مف لا} \text{ تقریباً}$$

اضافی غلطی $\frac{\text{مف ما}}{\text{ما}}$ تقریباً یہ ہے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فَ (لا)}}{\text{ف (لا)}}\ \text{مف لا}$$

دراصل اضافی غلطی ہی اہمیت کی چیز ہے۔ دو اجزائے ضربی $\text{مف لا}\ \frac{\text{فَ (لا)}}{\text{ف (لا)}}$ میں پہلا جزو ضربی صرف پیمائشوں کی صحت پر موقوف ہے اور دوسرا تحقیق کی عام ترتیب و طریق پر منحصر ہے۔

اگر دو یا زیادہ متغیر ہوں مثلاً لا، ما، ہی تو تفاعل ع = ف (لا، ما، ہی) میں مف لا، مف ما، مف ہی کے لحاظ سے پہلے رتبہ کی مقداروں تک غلطی مف ع ہے۔

$$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\ \text{مف لا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\ \text{مف ما} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ہی}}\ \text{مف ہی}$$

چونکہ مف ع درجہ اول کا ہے مف لا، مف ما اور مف ہی میں اس لئے انفرادی غلطیوں مف لا، وغیرہ کا مجموعی اثر ہر ایک کے جداگانہ اثر کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ عملی طور پر چھوٹی غلطیوں کے ایسے اجتماع کا

اصول بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ ایک مثلث ا ب ج کا ضلع ا اور زاویے ب، ج ناپے گئے ہیں، اگر ان میں بالترتیب مف ا، مف ب اور مف ج کی غلطیاں واقع ہوں تو رقبہ س کی محسوبہ قیمت میں غلطی کی مقدار معلوم کرو۔

صرف مف ا کی غلطی کی وجہ سے س میں جو غلطی واقع ہوتی ہے اُسکو (مف س)ا سے تعبیر کرو اور دیگر غلطیوں کے لئے بھی یہی ترقیم استعمال کرو۔ س کا مشتق معلوم کرنے کے لئے لوکارثمی تفرق کرنا بہت سہولت بخش ہے۔

س = ½ ا² جب ب جب ج / جب (ب + ج)

(مف س)ا / س = ۲ مف ا / ا

(مف س)ب / س = {مم ب - مم (ب + ج)} مف ب

(مف س)ج / س = {مم ج - مم (ب + ج)} مف ج

مجموعی غلطی مف س ان انفرادی غلطیوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ ا = ۲۵۰ فٹ، ب = ۲۷° ۱۲'، ج = ۴۵° ۱۸'

مف ا = ۲۵ء، مف ب = ۱۰'، مف ج = ۲۰'

ا، ب اور ج میں فی صد غلطیاں ہیں

۱۰۰ مف ا / ا = ۱ء، ۱۰۰ مف ب / ب = ۶ء اور ۱۰۰ مف ج / ج = ۷ء

اس لئے پانچ عددی لوکارثموں کو استعمال کرنا کافی ہے۔ پس

مف س / س = ۰۰۲ء + ۰۰۴۷۴ء + ۰۰۳۹۲ء = ۰۱۰۶۶ء

س = ۱۰۶۳۶، مف س = ۱۱۳ء۴۹، ۱۰۰ مف س / س = ۱ء۱

اگر قیمتوں ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج سے رقبہ

محسوب کیا جائے اور نئے رقبہ کو سَ سے تعبیر کیا جائے تو

سَ = ۱۰۷۶۰ ، سَ - س = ۱۱۴

چونکہ بَ = اَ جب ب / جب (ب + ج) ، اس لئے بَ کی غلطی کے لئے

مفا بَ / بَ = مفا اَ / اَ + {مم ب - مم (ب + ج)} مفا ب

- مم (ب + ج) مفا ج

یعنی مفا بَ / بَ = ۰٫۰۳۹۰ ، ۱۰۰ مفا بَ / بَ = ۴ ، مفا بَ = ۵ تقریباً

اور اسی طرح سے

مفا جَ / جَ = ۰٫۰۰۴۰ ، ۱۰۰ مفا جَ / جَ = ۴ ، مفا جَ = ۵٫۷

مشق ۲۔ ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع اَ، بَ، جَ کو ناپا گیا ہے، اگر ان پیمائشوں میں بالترتیب مفا اَ، مفا بَ، مفا جَ کی غلطیاں واقع ہوں تو ان کی بنا پر زاویہ ا میں جو غلطی مفا ا واقع ہوتی ہے اس کی مقدار معلوم کرو۔

جم ا کی قیمت اضلاع کی رقوم میں یعنی

جم ا = (بَ² + جَ² - اَ²) / ۲ بَ جَ

لیکے اسے ہم تفرق کر سکتے ہیں۔ لیکن نتیجہ اس طرح زیادہ جلدی حاصل ہو سکتا ہے۔

اَ = بَ جم ج + جَ جم ب

اور اس لئے مفا اَ = جم ج مفا بَ + جم ب مفا جَ

- (بَ جب ج مفا ج + جَ جب ب مفا ب)

= جم ج مفا بَ + جم ب مفا جَ - بَ جب ج (مفا ج + مفا ب)

= جم ج مفا بَ + جم ب مفا جَ + بَ جب ج مفا ا

چونکہ بَ جب ج = جَ جب ب اور ا + ب + ج = ۱۸۰° اور اس لئے

مف ا + مف ب + مف ج = ۰

لہذا مف ا = (مف ا۔ جم ج مف ب۔ جم ب مف ج) ا ب جب ج اور مثلثی تفاعلوں کو حسب ضرورت آسانی سے اضلاع کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

مشق ۲۱

۱۔ ایک مثلث ا ب ج کا رقبہ اضلاع ا، ب اور زاویہ ج سے محسوب کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ رقبہ میں اضافی غلطی حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے:

مف س / س = مف ا / ا + مف ب / ب + مم ج مف ج

ثابت کرو کہ ضلع ج میں غلطی حسب ذیل حاصل ہوتی ہے۔

مف ج = جم ب مف ا + جم ا مف ب + ا جب ب مف ج

۲۔ ایک مینار کے پائیں سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلہ پر اسکی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۲ ۱ ۲۰ معلوم کیا گیا ہے۔ اگر فاصلہ اور ارتفاع ایک انچ اور ایک منٹ تک صحیح ناپے جائیں تو محسوبہ بلندی میں زیادہ سے زیادہ غلطی محسوب کرو۔

۳۔ اگر ایک جسم کی کثافت ک بالترتیب ہوا اور پانی میں جسم مذکور کے اوزان ق اور و کی بنا پر محسوب کی گئی ہو تو ثابت کرو کہ ق اور و میں بالترتیب غلطیاں مف ق اور مف و واقع ہونے سے ک کی اضافی غلطی حسب ذیل ہوگی

مف ک / ک = − و / (ق − و) مف ق / ق + مف و / (ق − و)

۴۔ ایک مثلث ا ب ج کا ضلع ا اور مقابل کا زاویہ ا مستقل رہتے ہیں، ثابت کرو کہ جب دوسرے ضلعوں اور زاویوں کو ذرا سا بدلا جائے تو

مف ب / جم ب + مف ج / جم ج = ۰

۵۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کو ذرا اس طرح بدلا جائے کہ مثلث اسی

دائرہ کے اندر رہے جس کے اندر پہلے تھا تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{مف ج}}{\text{جم ج}} = ۰$$

۶۔ مماسی، مقناطیسی، برق پیما میں سوئی کے انصراف کا مماس برقی رو کے متناسب ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ انصراف کی قرأت میں غلطی واقع ہونے سے رو کی قیمت میں جو اضافی غلطی واقع ہوتی ہے وہ کم سے کم ہوگی جبکہ انصراف ۴۵° کا ہو۔

۷۔ اگر ان منحنیوں کو جن کا فرق اکائی طول کے سوویں حصہ سے کم ہو مساوی سمجھا جائے تو ثابت کرو کہ لا کی قیمتوں ۔۱۴ء۰ اور + ۱۴ء۰ کے درمیان سکافی $ما = لا + ۲ لا^{۲}$ ذیل کے تفاعل

$$لا + ۲ لا^{۲} + ۳ لا^{۳} + ۴ لا^{۴} + ۵ لا^{۵}$$

کی ترسیم پر منطبق ہوگا۔

۸۔ ثابت کرو کہ منحنی $لا^{۳} + ما^{۳} = ۳ ا لا ما$ کی دو شاخیں ہیں جو مبدا میں سے گزرتی ہیں اور مبدا کے نزدیک ان شاخوں کی مساواتیں یہ ہیں

$$لا^{۲} = ۳ ا\ ما \quad \text{اور} \quad ما^{۲} = ۳ ا\ لا$$

ثابت کرو کہ بہتر تقرب یہ ہیں

$$ما = لا^{۲} / ۳ ا + لا^{۵} / ۸۱ ا^{۴}،\ لا = ما^{۲} / ۳ ا + ما^{۵} / ۸۱ ا^{۴}$$

۹۔ ثابت کرو کہ مندرجۂ ذیل نقطوں کے قریب منحنی $لا^{۳} + ما^{۳} = ۲ ا لا^{۲}$ کی مساواتیں جداگانہ حسب ذیل ہیں جہاں ا مثبت ہے۔

(۰، ۰) کے قریب $ما^{۳} = ۲ ا لا^{۲}$

(۲ ا، ۰) کے نزدیک $ما^{۳} = ۴ ا^{۲} (لا - ۲ ا)$

لاتناہی پر $ما = - لا + ۲ ا / ۳ + ۴ ا^{۲} / ۹ لا$

ثابت کرو کہ ما اعظم ہوگا جبکہ $لا = ۴ ا / ۳$، نیز منحنی کو مرتسم کرو۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ منحنی $لا ما^{۲} - لا^{۳} - ۶ لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} = ۰$ کے لئے ذیل کے

تقربات صحیح ہیں۔

(۰،۰) کے نزدیک ما = ۲ لا - $\frac{۳}{۵}$ لا^۲ اور ما = - ۴ لا + $\frac{۸}{۵}$ لا^۲

لاتناہی پر لا + ۱ = $\frac{۱}{ما}$ ، ما = لا + ۲ - $\frac{۵}{لا}$ ، ما = - لا - ۳ + $\frac{۷}{لا}$

ثابت کرو کہ متقارب لا + ۱ = منحنی کو (- ۱، - ۵) پر عبور کرتا ہے اور متقارب

ما = لا + ۲ نقطہ (- $\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۸}{۵}$) پر عبور کرتا ہے اور متقارب ما = - لا - ۳

نقطہ (- $\frac{۳}{۴}$ ، - $\frac{۹}{۴}$) پر عبور کرتا ہے۔ منحنی کرم ترسیم کرو

۱۱۔ ثابت کرو کہ منحنیات

(۱) (ما - لا^۲)^۲ = لا^۳ (۲) (ما - لا^۲)^۲ = لا^۵

میں سے ہر ایک کا مبدأ پر قرن ہے اور (۲) کی دونوں شاخیں مبدأ کے نزدیک محور لا کے اوپر واقع ہیں۔ منحنیوں کو مرتسم کرو۔

صورت دوم میں ہم قرن کو قسم دوم کا قرن کہینگے اور معمولی قرن کو تمیز کی خاطر قسم اول کا قرن کہینگے۔

جوابات
باب اول

دفعہ ۵ صفحہ ۹ ۱- ۳$\frac{۱}{۲}$، ۲، -۳، ۴ء۵۶ ۳- (۱) + (۲)-

دفعہ ۶ صفحہ ۱۲ ۲- ہر صورت میں طریق خط مستقیم ہے۔ صورت اول، دوم و چہارم میں خط فصلوں کے محور پر عمود وار ہے اور صورت سوم میں یہ خود معینوں کا محور ہے۔ اسی طرح جب معین دئے ہوئے ہوں تو طریق (خط) فصلوں کے محور کے متوازی ہوگا یا اس محور پر منطبق ہوگا۔

۴- (۱) + (۲)۔

دفعہ ۷ صفحہ ۱۵ ۲- (۱) $\sqrt{۵}$ (۲) $\sqrt{۱۷}$ (۳) $\sqrt{۵}$ (۴) ۲$\sqrt{۱۳}$ (۵) $\frac{۳ \pm ۲\sqrt{۲}}{۲}$ یا (۱) ۲ء۲۴ (۲) ۴ء۱۲ (۳) ۲ء۲۴ (۴) ۷ء۲۱ (۵) ۶ء۶۶

مشق ۱ صفحہ ۲۹

۱- ۱، ۱، ۱ ۲- ا(لا + ب)^{۲} - ا(لا + ب) - ۲

۳- لا^{۴} - ۵ لا^{۲} + ۱، لا^{۶} - ۵ لا^{۳} + ۱، جب^{۲} لا - ۵ جب لا + ۱ ۴- ۲ء۰۳

۹- ا ما^{۲} + ب ما لا + ج، ا لا^{۲} + ب لا + ج، ا ما^{۲} + ب ما + ج

باب دوم

مشق ۲ صفحہ ۴۴

۱۔ ا، ج، د منحنی پر ہیں، ب، ع منحنی پر نہیں ہیں۔

۲۔ ما و ما محور تشاکل ہے (۱)، (۳)، (۶)، (۷) کے لئے۔ نقطہ (۱، ۱-) (۱) اور (۲) پر واقع ہے، ا = ۰

۳۔ موڑ کے نقطے (۱) (۰، ۱۰) (۲) (۰، ۱-) (۳) (۰، ۱)

(۴) (۳/۴، ۹/۸) (۵) (۱/۲-، ۵/۴) (۶) (۳/۴، ۱/۸)

فصلے ہیں (۱) ۱-، ۱ (۲) ۱/√۲-، ۱/√۲ (۳) ۱/√۲-، ۱/√۲

(۴) ۰، ۳/۲ (۵) ۱/۲ (۱- ± √۵) (۶) ۱/۲، ۱

۴۔ (۱)، (۲)، (۴) کے لئے۔ (۳) میں ما خیالی ہے جبکہ لا منفی ہو۔

مشق ۳ صفحہ ۴۹

۱۔ (۱) ۱-، ۲ (۲) ۳/۲، ۱- (۳) ۳/۲-، ۱-

۲۔ ج خط پر واقع ہے ۶۔ (۱) لا + ما = ۳ (۲) لا + ما = ۱

(۳) لا + ما = ۰ (۴) ۳لا - ۲ما + ۶ = ۰

۷۔ ما = ۲لا - ۵ ۸۔ ما - ب = ج (لا - ا)

۱۰۔ (۱، ۱)، (۳-، ۹)

مشق ۴ صفحہ ۶۲

۸۔ (۱) ۲٫۸۴، ۴۴، ۲٫۴۰ (۲) ۳٫۱۴

۹- ۰ ۱٫۹۸ ، - ۰٫۰۶ ، ۲٫۰۶ ، ۳٫۹۸

باب سوم

مشق ۵ صفحہ ۸۱

۱۱- (۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۵}$ ۱۴- (۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۱۵- مساوات م + ۱ = ± $\frac{۱}{۲}$ (لا - ۳) کے معادل ہے۔

مشق ۶ صفحہ ۹۲

۱۲- (۱) قطع ناقص، (۳، -۴)، ۲ا = ۶، ۲ب = ۴
(۲) قطع زائد، (-۱۰، ۵)، ۲ا = ۴، ۲ب = ۲ $\sqrt{۳}$

۱۹- (۱) $\frac{۶}{۵}$ (۲) $\frac{۲۷}{\sqrt{۳۱۳}}$

۲۰- (۱) $\frac{\text{اب}}{\sqrt{\text{ا}^۲\text{جب}^۲\text{ط} + \text{ب}^۲\text{جم}^۲\text{ط}}}$ جسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں $\frac{\text{ب}}{\sqrt{۱ - \text{ز}^۲\text{جم}^۲\text{ط}}}$ جبکہ

ا² - ب² = ز² ا²

(۲) $(۱ - \text{زجم ط})\left(\text{اب}/\sqrt{\text{ا}^۲\text{جب}^۲\text{ط} + \text{ب}^۲\text{جم}^۲\text{ط}}\right)$

$= \text{ب}(۱ - \text{زجم ط})/\sqrt{۱ - \text{ز}^۲\text{جم}^۲\text{ط}}$

(۳) $\text{ب}\,(۱ + \text{زجم ط})/\sqrt{(۱ - \text{ز}^۲\text{جم}^۲\text{ط})}$

باب چہارم

دفعہ ۳۲ صفحہ ۱۰۲ ۴- $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ کی قیمتیں ترتیب وار ہیں

۳۳۱، ۳۱۵ء۲۵، ۳۰۳ء۰۱، ۳۰۰ء۳۰۰۱، ۳۰۰ء۰۳۰۰۱

۵- $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ کی قیمتیں ہیں

(۱) ۰ء۱۵۰۳۸، ۰ء۱۵۰۷۷، ۰ء۱۵۱۰۰، ۰ء۱۵۱۰۷

(۲) ۰ء۰۸۵۹۴، ۰ء۰۸۶۶۱، ۰ء۰۸۷۰۱، ۰ء۰۸۷۱۳

۶- $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ کی قیمتیں ہیں

(۱) ۰ء۰۱۳۳۲، ۰ء۰۱۳۳۴، ۰ء۰۱۳۳۵، ۰ء۰۱۳۳۶

(۲) ۰ء۰۵۹۵۰، ۰ء۰۵۹۹۰، ۰ء۰۶۰۲۸، ۰ء۰۶۰۳

دفعہ ۳۷، صفحہ ۱۱۳ ۱- ۰، $\frac{۱}{۲}$ ج، ج، ۲ج

۲- $-\frac{۱}{ج^{۲}}$

باب ششم

دفعہ ۵۳، صفحہ ۱۶۸ −۱۰، −۴، ۰، ۲، ۸

دفعہ ۵۷، صفحہ ۱۷۶ ۲- ۵ $ت^{۴}$، $-\frac{۴}{ت^{۳}}$، $\frac{۳}{۲\sqrt{ت}}$، $-۲ن^{\frac{۳}{۲}}$

۴- $-\frac{۳}{۴لا^۲}$ ، $-\frac{۱}{لا}$ ، $۴\sqrt{لا}$ ، $\frac{۲}{۳}لا^{\frac{۳}{۲}}$ ، $لا^۵$

مشق صفحہ ۱۸۲

۱- $۲۱لا^۲+۱۰لا+۴$ ۲- $۱۱۲لا-۱۰$ ۳- $۳لا^۲-۴لا-۵$

۴- $\frac{۱}{(۵-۲لا)^۲}$ ۵- $\frac{۱}{۲\sqrt{لا}}-\frac{۱}{۲\sqrt{لا^۳}}$

۶- $\frac{۳}{۲\sqrt{لا}}\left(\sqrt{لا}-\frac{۱}{\sqrt{لا}}\right)^۲\left(\frac{لا+۱}{لا}\right)$ ۷- $ن(لا^{ن-۱}-لا^{-ن-۱})$

۸- $م(الا^{م-۱}-بلا^{-م-۱})$ ۹- $۵لا^۴+\frac{۱}{۲}لا^{-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}لا^{-\frac{۳}{۴}}-\frac{۵}{۴}لا^{-\frac{۹}{۴}}$

۱۰- $\frac{۲(لا+۱)(لا^۲-۱)}{لا^۳}$ ۱۱- $\frac{(اد-بج)}{(جت+د)^۲}$ ۱۲- $\frac{اج}{(ب+جت)^۲}$

۱۳- $\frac{۲\{(اب_۱-با_۱)ت^۲+(اج_۱-جا_۱)ت+(بج_۱-جب_۱)\}}{(ا_۱ت^۲+۲ب_۱ت+ج_۱)^۲}$

۱۴- $\frac{۶(ت^۲-۲)}{(ت+۱)^۲(ت+۲)^۲}$ ۱۶- $وھعَ+ھعوَ+عوھَ$

۱۷- موڑ کے نقطوں کے فصلے ہیں (ا) $\frac{۱}{۲}$ (ب) ± ۱ (ج) ۰، ± ۱

۱۸- (۱) $لا^۲-لا+م$ (مستقل) (۲) $\frac{۳}{۲}لا^۲+\frac{۱}{لا}+م$ (۳) $\frac{۱}{۳}الا^۳+\frac{۱}{۲}بلا^۲$
$+جلا+م$ (مستقل)

۱۹- $ف=\frac{۱}{۳}لا^۳-\frac{۱}{۲}لا^۲+لا$ ۲۱- $و_۱ت-\frac{۱}{۲}جت^۲$ فٹ

مشق ۹ صفحہ ۱۹۱

۱- $\frac{-1}{2\sqrt{1-لا}}$ ۲- $\frac{لا-2}{2(لا-1)^{\frac{3}{2}}}$ ۳- $\frac{1}{2}(4لا-3)/\sqrt{(2لا+1)(لا-2)}$

۴- $ا^2(ا^2-لا^2)^{-\frac{3}{2}}$ ۵- $ا^2(ا^2+لا^2)^{-\frac{3}{2}}$

۶- $\frac{ا لا+\frac{ب}{2}}{\sqrt{ا لا^2+ب لا+ج}}$ ۷- $\frac{-2لا}{(لا^2-1)\sqrt{لا^4-1}}$

۸- $\frac{(ا ب_1-ب ا_1)لا^2+(ا ج_1-ج ا_1)لا+(ب ج_1-ج ب_1)}{(ا_1لا^2+2ب_1لا+ج_1)\sqrt{ا لا^2+2ب لا+ج}\sqrt{ا_1لا^2+2ب_1لا+ج_1}}$

۹- $-\frac{(لا+7)(لا+1)^2}{(لا-1)^5}$ ۱۰- $\frac{(م لا-ن لا+م ب-ن ا)(لا+ا)^{م-1}}{(لا+ب)^{ن+1}}$

۱۱- $\frac{2-5لا}{لا^3(لا-1)^4}$ ۱۴- $\frac{-2لا}{3ما}$، $-\frac{2}{3}$، $\frac{2}{3}$، $-\frac{2}{3}$، $\frac{2}{3}$

۱۵- $\frac{2لا+2ما-5}{2لا+2ما+1}$، ڈھال = ۱

۱۶- ا، ب - ج ت، مس فہ = $\frac{ب-ج ت}{ا}$

۱۷- (۱) $\frac{لا-ا}{ما-ب}$ (۲) $\frac{ا+2ب لا}{2ما}$ (۳) $=\frac{ج^2}{لا^2}$ (۴) $-\frac{م ما}{ن لا}$

۱۸- $\frac{1}{3ا}\sqrt{ع}$ ۱۹- $\frac{1}{2}ع^{ن}$ ۲۰- $\frac{1}{ا}$ ف (ع)

مشق ۱۰، صفحہ ۲۰۱

۳- ما ما$_۱$ = ۲ا (لا + لا$_۱$)، (ما - ما$_۱$) ۲ا + (لا - لا$_۱$) ما$_۱$ = ۰

باب ہفتم

مشق ۱۱ صفحہ ۲۱۰

۱- ۳ (جم ۳لا - جب ۳لا) ۲- $\frac{۲\pi}{ا}$ جم $\frac{۲\pi}{ا}$ (لا + ب)

۳- م جم م لا جم ن لا - ن جب م لا جب ن لا

۴- لا جم لا ۵- لا جب لا ۶- جب^۲ لا ۷- جم^۲ لا

۸- جم^۲ لا ۹- جب^۳ لا ۱۰- $\frac{۱}{۲}$ (جب ۳لا + جم ۳لا)

۱۱- $\frac{۱}{ا}$ جب (ا لا + ب) ۱۲- $\frac{۱}{ا}$ مس (ا لا + ب)

۱۳- $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۱}{۴}$ جب ۲لا ۱۴- $\frac{۱}{۲}$ لا - $\frac{۱}{۴}$ جب ۲لا

۱۵- $-\frac{۱}{۱۲}$ جم ۶لا - $\frac{۱}{۴}$ جم ۲لا

۱۶- -۲ا جم (ا لا + ب) جب (ا لا + ب)

۱۷- مس ($\frac{۱}{۲}$ لا + ۱) قط^۲ ($\frac{۱}{۲}$ لا + ۱)

۱۸- $\frac{\text{جم ۲لا}}{\sqrt{\text{جب ۲لا}}}$ ۱۹- $\frac{\text{جب لا (۳ - جم}^۲\text{ لا)}}{\text{جم}^۴\text{ لا}}$

۲۰- $\frac{\text{جب لا}}{(\text{۱ + جم لا})^۲}$ ۲۱- $\frac{\text{۲ جب لا}}{(\text{۱ + جم لا})^۲}$

۲۴- $\frac{(\text{جم لا} - \text{جب لا مس}^{۲}\text{ لا})}{(۱ + \text{مس لا})^{۲}}$

۲۵- (۱) $\text{ت} = \frac{۱}{\text{ن}}\left\{(\text{ص} + \frac{۱}{۲})\pi + \text{ع}\right\}$، $\text{س} = ۰$

(۲) $\text{ت} = \frac{۱}{\text{ن}}(\text{ص}\pi + \text{ع})$، $\text{س} = \pm ۱$ جہاں ص کوئی عدد صحیح ہے۔

۲۶- $-\text{ا جب ت}$، ب جم ت، $\text{مس فا} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{ مم ت}$

۲۸- $\text{ب مس}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}$، $\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\text{ جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}$

۳۶- جم لا کے لئے یہ لا تساویاں نہیں بدلتیں، جب لا کی صورت میں < کی بجائے > رکھو۔

مشق ۱۲ صفحہ ۲۱۷

۱- $\frac{۳}{\sqrt{۱ - ۹\text{لا}^{۲}}}$ ۲- $\frac{۱}{\sqrt{۲ + \text{لا} - \text{لا}^{۲}}}$ ۳- $\frac{۳}{۵ - ۲\text{لا} + ۲\text{لا}^{۲}}$

۴- $\frac{-۱}{\sqrt{۲\text{لا} - \text{لا}^{۲}}}$ ۵- $\text{جب}^{-۱}\text{لا} + \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$

۶- $\text{مس}^{-۱}\text{لا} + \frac{\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$ ۷- $\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\sqrt{۳}}$

۸- $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\sqrt{۳}}$ ۹- $\text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{لا} - ۱}{۲}\right)$

مشق ۱۳ صفحہ ۲۲۴

۱- $۱ + \text{لوگ لا}$ ۲- $\text{لا}^{\text{ن}-۱}(۱ + \text{ن لوگ لا})$ ۳- مم لا

۴- یس لا ۵- $\frac{۱}{\text{جب لا}}$ ۶- $\frac{۲}{\text{جم لا}}$

۷- $\frac{۲}{\text{جب لا}}$ ۸- $\frac{\text{ا}}{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^۲-\text{لا}^۲}}$ ۹- $\frac{۱}{۲\text{لا}\sqrt{\text{لا}^۲-\text{ا}^۲}}$

۱۰- $(\text{لا}+۱)\,\text{و}^{\text{لا}}$ ۱۱- $\text{لا}^{\text{ن}-۱}(\text{لا}+\text{ن})\,\text{و}^{\text{لا}}$

۱۲- $-۲\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا}$ ۱۳- $\frac{\text{لا و}^{\text{لا}}}{(\text{لا}+۱)^۲}$

۱۴- $\frac{۱}{۳}$ لوک $(۳\text{لا}+۴)$ ۱۵- $\frac{۱}{۲\text{ا}}$ لوک $\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$

۱۶- $\frac{۱}{۱۲}$ لوک $\frac{۲\text{لا}-۳}{۲\text{لا}+۳}$ ۱۷- لوک $(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^۲+۱})$

۱۸- $\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{و}^{\text{ا لا}}$ ۲۲- ا، $\frac{\text{ج}^۲}{\text{ا}}\,\text{و}^{\frac{۲\text{لا}}{\text{ا}}}$

۲۳- $\frac{\text{ا}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}+\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)}{\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}-\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}}$ ، $\frac{۱}{۴}\text{ا}\left(\text{و}^{\frac{۲\text{لا}}{\text{ا}}}-\text{و}^{-\frac{۲\text{لا}}{\text{ا}}}\right)$ ، $\frac{\text{ما}^۲}{\text{ا}}$

مشق ۱۴ صفحہ ۲۳۷

۱- $۲۸\text{لا}^۳-۶\text{لا}^۲$ ، $۸۴\text{لا}^۲-۱۲\text{لا}$ ، $۱۶۸\text{لا}-۱۲$ ، ۱۶۸

۲- $(\text{لا}^۲+۱)^{-\frac{۳}{۲}}$ ۳- $۱۲\text{لا}^۲-۱۲\text{ا لا}+۲\text{ا}^۲$ ، $۱۲(۲\text{لا}-\text{ا})$

۴- $\text{مَا} = -(\text{لا}-۱)^{-۲}-(\text{لا}+۱)^{-۲}+(\text{لا}+۲)^{-۲}$

$\text{مًا} = ۲(\text{لا}-۱)^{-۳}+۲(\text{لا}+۱)^{-۳}-۲(\text{لا}+۲)^{-۳}$

$\text{ما}^{(\text{ن})} = (-۱)^{\text{ن}} (\underline{\text{ن}}) (\text{لا}-۱)^{-\text{ن}-۱}$ + دو اسی طرح کی قیمتیں

۵- $\text{ما}^{(\text{ن})} = -۲^{\text{ن}-۱}$ جم $\left(۲\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{۲}\right)$

۶- $\text{ما}^{(\text{ن})} = \text{لا}^{۲}$ جم طہ + ۲ن لا جب طہ - ن(ن-۱) جم طہ جہاں

طہ = لا + $\frac{\text{ن}\pi}{۲}$

۷- ما = $\frac{۱}{۴}$ جب ۲لا + $\frac{۱}{۸}$ جب ۴لا،

$\text{ما}^{(\text{ن})} = ۲^{\text{ن}-۲}$ جب $\left(۲\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{۲}\right) + ۲^{۲\text{ن}-۳}$ جب $\left(۴\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{۲}\right)$

۸- $\frac{۱}{\text{لا}}$ ، $\frac{(-۱)^{\text{ن}} \underline{\text{ن}-۲}}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}$ ۹- $\text{قو}^{\text{لا}}$ (لا+ن)

۱۰- $\text{قو}^{\text{لا}} \left\{\text{لا}^{۲} + ۲\text{ن لا} + \text{ن}(\text{ن}-۱)\right\}$

۱۲- مثال(۱) لا = $\frac{۳}{۱۴}$ مثال(۲) لا = ۰

۱۳- $\text{ما}'$ = ۰ جبکہ لا = $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یا $+\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۲۳- $-\frac{۱}{۲\text{ا}\,\text{ت}^{۲}}$ ۲۴- $-\frac{\text{ب}}{\text{ا جب}^{۲}\text{ت}}$

باب ہشتم

دفعہ ۷۰، صفحہ ۲۵۸ - ۶۷×۱۰^{-۶} ، ۵۰×۱۰^{-۶}

مشق ۱۵، صفحہ ۲۶۱

۱- $\frac{\text{ا}_{1}\text{ع}}{\text{ون}^{2}}$ ۳- - $\frac{\text{ود}}{\text{ولا}}$ = ج ک

۴- - $\frac{\text{ون}}{\text{وت}}$ اُن خطوط کی تعداد کے گھٹنے کی زمانی شرح ہے جو حلقہ میں سے گذرتے ہیں، یا بالفاظ دیگر $\frac{\text{ون}}{\text{وت}}$ حلقہ سے خطوط کے ہٹانے کی زمانی شرح ہے۔

۵- ق = زد + ل $\frac{\text{ود}}{\text{وت}}$ ۶- لا = - $\frac{\text{وی}}{\text{ود}}$

۷- (۱) م لوک $\left(\frac{\text{ح}_{2}}{\text{ح}_{1}}\right)$ (۲) م $\left(\text{ح}_{2}^{\,1-\text{جا}} - \text{ح}_{1}^{\,1-\text{جا}}\right) / (1-\text{جا})$

یا $(\text{د}_{1}\text{ح}_{1} - \text{د}_{2}\text{ح}_{2}) / (\text{جا}-1)$

باب نہم

مشق ۱۶ (ا)، صفحہ ۲۸۸

۱- لا = -۱، اعظم ؛ لا = ۲، اقل

۲- لا = ۱، اعظم ؛ لا = ۳، اقل

۳- لا = ۰، اقل ؛ لا = - $\frac{4}{3}$، اعظم

۴- لا = -۱، اعظم ؛ لا = - $\frac{1}{2}$، اقل ؛ لا = $\frac{1}{3}$ اعظم

۵- لا = -۱، اقل ؛ لا = ۱، اعظم
۶- لا = -۱، اعظم ؛ لا = $\frac{۱}{۳}$، اقل
۷- لا = -۱، اقل ؛ لا = ۱، اعظم اگر ا > ۰
۸- لا = -۱، اقل ؛ لا = ۱، اعظم
۹- لا = $\frac{ا}{۲}$ اعظم ۱۰- لا = -$\frac{۱}{۲}$ اقل، لا = $\frac{۱}{۲}$ اعظم
۱۱- لا = ج اقل اگر ب > ۰ ۱۲- کوئی اعظم یا اقل نہیں۔
۱۳- مم نن $\{$ک / (م + ن)$\}^{م+ن}$
۱۵- (ا + ب)^۲ / ج، ۴ ا ب / ج^۲
۱۶- (م$_۱$ لا$_۱$ + م$_۲$ لا$_۲$ + ...) / (م$_۱$ + م$_۲$ + ...) ۱۹- ۳ ا ب ج
۲۰- $\frac{ا ب ج}{۳\sqrt{۳}}$، $\frac{۳ د^۲}{(ا ب ج)^{۲/۳}}$ ۲۱- ۲ ا ب

مشق ۱۶ (ب) صفحہ ۲۹۱

۱- مس ق ا ب = ب$_۱$ / ا$_۱$ $\sqrt{۲}$ ۲- $\frac{۱}{۲}$ (ا + $\sqrt{ا^۲ + ۸ ب^۲}$)
۳- $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب - $\sqrt{ا^۲ - ا ب + ب^۲}$) ۱۰- لا = $\frac{ا}{۲}$، لا = $\frac{ا}{۳}$
۱۱- $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د، $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ د ۱۲- $\frac{۱}{۲}$ د، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د
۱۳- $\frac{ع ا}{\sqrt{و^۲ - ع^۲}}$ ۱۴- $\frac{ا}{\sqrt{۲}}$
۱۵- ش ق : ق ن = ا : ب جہاں ق مطلوبہ نقطہ ہے۔

مشق ۱۶ (ج) صفحہ ۲۹۴

۱۰- $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ا ۱۲- م$_۱$ن^۲ : ن م$_۲^۲$ = ا^۳ : ب^۳
جہاں م$_۱$ اور م$_۲$ مرکز ہیں۔

۱۳- (۱) مس طہ = $\sqrt[3]{\frac{ب}{ا}}$ (۲) $\sqrt{\frac{ب}{ا}}$ (۳) $\frac{ب}{ا}$

۱۷- $\frac{1}{و}$ ۱۸- $-\frac{1}{و}$ ۱۹- و ۲۰- $\frac{1}{و^{2}}$

۲۱- $\left(\frac{ب}{ا}\right)^{\frac{ا}{ا-ب}} - \left(\frac{ب}{ا}\right)^{\frac{ب}{ا-ب}}$

مشق ۱۷، صفحہ ۲۹۹

۱- مبدأ نقطہ انعطاف ہے (۱)، (۳)، (۴) پر ۲- $لا = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

۳- نقاط انعطاف کے لا ہیں (۱) $\pm \frac{ا}{\sqrt{3}}$ (۲) ۰، $\pm ا\sqrt{3}$

(۳) $\pm ا/\sqrt{3}$ (۴) ۰، $\pm ا\sqrt{3}$

۵- مبدأ ۷- (۱) ۰، π (۲) $\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$ (۳) ۰، π

۹- (۱) لا = ۲ (۲) $لا = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

۱۰- $لا = \frac{2}{ب-ا}$ لوک $\left(\frac{ب}{ا}\right)$

۱۱- ب لا + ج - ۲ طہ = ن π (دفعہ ۵۷، مثال ۴)

باب دہم

مشق ۱۸، صفحہ ۳۲۹

۹- (۱) $\frac{1}{6} ا^{2}(طہ_{2}^{3} - طہ_{1}^{3})$ (۲) $\frac{1}{2} ا^{2}\left(\frac{1}{طہ_{1}} - \frac{1}{طہ_{2}}\right)$ (۳) $\frac{1}{2} ا^{2}$ لوک $\frac{طہ_{2}}{طہ_{1}}$

(۴) $\frac{1}{4م} ا^{2}$ مس عہ $(و^{2طہ_{2}\,مم\,عہ} - و^{2طہ_{1}\,مم\,عہ})$

(۵) $\frac{1}{8} ا^{2}\left[6طہ - 8\,جب\,طہ + جب\,2طہ\right]_{طہ_{1}}^{طہ_{2}}$

۱۰- $\frac{1}{2} ا^{2}$

باب یازدہم

دفعہ ۹۱، صفحہ ۳۵۱

۲- ا لا ا لا + ب ما ا ما + ج ی ا ی = ۱؛ (لا - لا ا)/ا لا ا = (ما - ما ا)/ب ما ا = (ی - ی ا)/ا ی ا

۳- ب ما ا ما + ج ی ا ی = لا² + لا ا² - (لا - لا ا) = (ما - ما ا)/ب ما ا = (ی - ی ا)/ج ی ا

۴- ا لا ا لا + ب ما ا ما + ج ی ا ی = ۰؛ (لا - لا ا)/ا لا ا = (ما - ما ا)/ب ما ا = (ی - ی ا)/ج ی ا

مشق ۱۹، صفحہ ۳۸۹

۲- ر² + ۲ (عف ط ر)² - ر عف ط² ر = ۰

۳- (۱ + ن جم ت)/(ا جب³ ت)

باب دوازدہم

مشق ۲۰، صفحہ ۴۱۳

۱- ۲٫۱۳۷۸۱۲ ۲- ٫۲۲۶۰۷۴ ۳- ۲٫۱۸۸۹۲۰
۴- ۲٫۵۸۸۹۶۸ ۵- ٫۰۵۷۰۱۴، ۱٫۴۶۷۶۵
۶- ۱٫۸۹۵۴۹۴ ۷- ٫۷۳۹۰۸۵ ۸- ۱٫۱۴۵۶، ۴٫۶۰۴۲
۹- ۹۱٫۹۶۴ ۱۰- (۱) ۴٫۷۳۰۰۴ (۲) ۱٫۸۷۵۱
۱۱- ۵٫۶۰۰۲۵۷ یا درجوں میں ۳۲۰° ۵۲' ۱۶"
۱۳- لا = ۱٫۹۹۶، ما = ٫۹۰۹

مشق ۲۱، صفحہ ۴۲۴

۲- ۱٫۵۷ انچ

تمت

فہرست اصطلاحات

Abscissa	فصلہ
Adiabatic Curves	حرناگذار منحنی
Altitude	ارتفاع
Angular Accleration	زاوی اسراع
Approximation	تقریب
Argument	وجہ (دلیل)
Asymptote	متقارب
Axis	محور
Average rate	اوسط شرح
Calculus	احصا
Cardioid	خط صنوبری (قلب نما)
Cartesian Coordinates	کارٹیزی مجدد
catenary	لینزم، زنجیرہ
Central conics.	مرکزدار مخروطیاں
Commutative (operations)	باہم بدل سکنے والے (اعمال)
Complete differential	کامل تفرقہ
Cone	مخروط

Concavity	تقعر۔ گہراؤ
Conic section	مخروطی تراش
Continuity	تسلسل
Convexity	تحدب۔ اُبھار
Coordinate	محدد
Coordinate geometry	محددوں کا ہندسہ، ہندسۂ تحلیلی
Curvature	انحنا
Cusp	قرن
Cylinder	اسطوانہ
Dependent (variable)	تابع (متغیر)
Derivative	مشتق
Differential	تفرقہ یا تفرقی
Differential calculus	تفرقی احصا
Differential equations	تفرقی مساواتیں
Dimensions	ابعاد
Directrix	مرتب
Discontinuous	غیر مسلسل
Dynamics	علم حرکت، حرکیات
Eccentricity	خروج المرکز (زاویہ)
Elasticity	لچک
Ellipse	قطع ناقص
Entropy	ناکارگی
Equiangular spiral	مساوی الزاویہ لولبی
Expansion	پھیلاؤ
Explicit function	تصریحی (تفاعل)

Exponential function	قوت نمائی (تفاعل)
Extension	کھنچاؤ
Fluent	بہنے والا سیّال
Fluxions	بہاؤ
Focus	ماسکہ
Formula	ضابطہ
Frustum of a cone	مخروط ناقص
Function	تفاعل
Gradient	ڈھال
Graph	ترسیم
Gravitation	تجاذب
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic sine	زائدی جیب
Implicit function	تضمینی تفاعل
Increment	اضافہ
Independent variable	متغیر متبوع
Infinitesimal	صغاریہ
Infinity	لا تناہی
Inflexion (point of)	نقطۂ عطف یا انعطاف
Inflexional tangent	انعطافی مماس
Irrational number	غیر منطق عدد
Integral calculus	تکملی احصا
Integral function	تکملی تفاعل
Integration	تکمل
Intercept	مقطوعہ

Inverse function	منقلوب تفاعل
Latus rectum	وتر خاص (معدِّل)
Leibnitz theorem	لیب نیز کا مسئلہ
Limit	انتہا
Linear function	خطی تفاعل
Litnus	عصا
Logarithmic function	لوکارثمی تفاعل
Magnitude	مقدار
Major axis	محور اعظم
Maximum	اعظم (قیمت)
Mechanics	علم حیل
Mean value theorem	مسئلہ اوسط قیمت
Minimum	اقل (قیمت)
Minor axis	محور اصغر
Multiple valued function	کثیر القیمت تفاعل
N bceomes indefinitely large	ن لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے
Notation	ترقیم
Oridinate	متعیّن
Orgin	مبدأ
Parabola	قطع مکافی
Parameter	متبدل
Partial differentation	جزوی تفرق
Polar coordinates	قطبی محدد
Potential	قوہ
Quadrant	ربع

Rate	شرح
Rational number	منطق عدد
Reciprocal spiral	مکافی لولبی
Rectangular coordinates	قائم محدد
Reversion of series	سلسلوں کا پلٹنا
Rolles theorem	رول کا مسئلہ
Semicubical parabola	نیم کعبی مکافی
Simple harmonic motion	سادہ موسیقی حرکت
Single valued function	وحید القیمت تفاعل
Stationary value	قائم قیمت، اچل قیمت
Step	قدم
Specific heat	حرارت نوعی
Spiral	لولب، لولبی
Surface of revolution	گردشی سطح
Temperature	تپش
Thermodynamics	حرحرکیات
Time rate	زمانی شرح
Trans cendental function	ماورائی تفاعل
Trigonometrical function	علم مثلثی تفاعل
Total derivative	پورا مشتق
Turning value	موڑکی قیمتیں
Uniform variation	یکساں (تغیر)
Value	قیمت
Variable	متغیر
Vector	سمتی

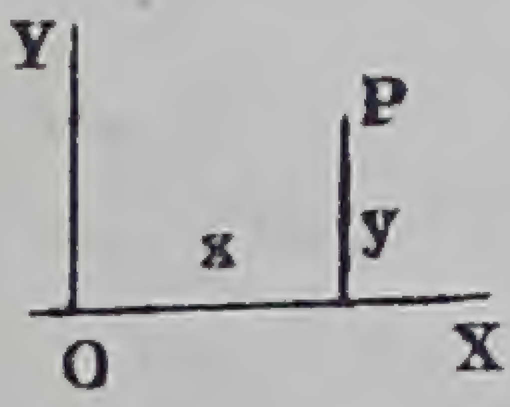
Vertex	راس
Vertical	انتصابی
Zeroes (of a function)	(تفاعل کے) صفر

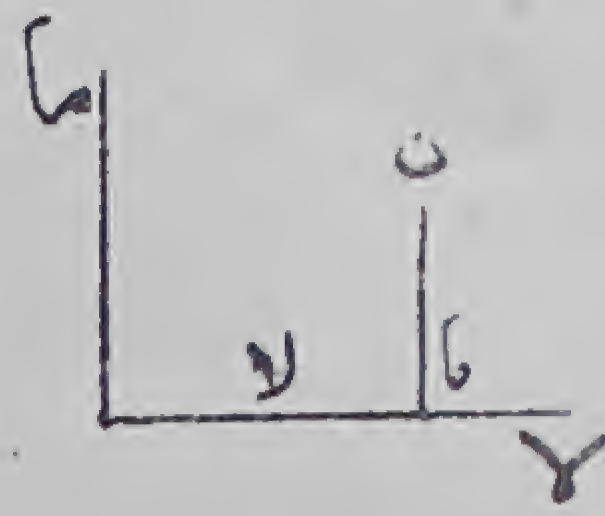
NOTATION. ترقیم

A,B,C.D.........	ا، ب، ج، د ....
x, y, z	لا، ما، ی
X,Y,Z	لا، ما، ے
α, β, γ	عا، با، جا
l,m,n	ل، م، ن
θ	ط
π	π
f(x)	ف (لا)
F(x)	فا (لا)
ϕ (x)	فہ (لا)
Sin x	جب لا
cos x	جم لا
tax x	مس لا
Cot x	صم لا
Sec x	قط لا
Cosec x	قم لا
$\sin^{-1} x$	جب$^{-1}$ لا
$\cos^{-1} x$	جم$^{-1}$ لا
.123	؍۱۲۳

exponent, e	قوت نما، قو (نو)
e^x	قو^لا
a^x	ا^لا
$\log_{10} x$	لوک۱ لا
ϵ	سہ یا صہ
∞	∞
limit, lim	انتہا، نہا
$f(x) = A$	نہا ف (لا) = ا
S_{n+1}	س ن+۱
S	س
t	ت
s	س
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$	فر ما / فر لا ، فر۲ ما / فر لا۲ ......
$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	جف ما / جف لا ، جف۲ ما / جف لا۲ ......
$\delta x, \delta y$	مف لا، مف ما
$\frac{\delta y}{\delta x}$	مف ما / مف لا
$f'(x)$	فَ (لا)
Dy, D^2y	عف ما، عف۲ ما ....
dx, dy, dz	فر لا، فر ما، فر ی
$\nabla^2 u$	لف۲ ع

ψ(x,y)	سما (لا، ما)





Velocities u,v,w	رفتاریں ع، و، ھ
Kinetic Energy, E	توانائی بالحرکت، حا
Work, K	کام، ک
Force, F	قوت، ق
Potential, V	قوہ، و
Pressure, P	دباؤ، د
Volume, V	حجم، ح

غلط نامہ

(احصا، حصۂ اول)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸	۱۳	قدم کا ناپ	۵۔ قدم کا ناپ
۹	۱۴	"نقطہ د"	"نقطہ ا۱"
۱۳	۸	معین	فصلہ
۲۲	۱۲	کس	کسی
۲۳	۹	نغیبر	تغییر
۲۴	۱۵	تفاعلوں کے لئے ترقیم	۱۲۔ تفاعلوں کے لئے ترقیم
۴۰	۵	پڑہنے	بڑہنے
۴۸	۲۰	ڈہال	۲۲۔ ڈہال
۵۲	۲۱	(ورجبن	(اورجبن
۵۶	۱۳	ف (-۲-) = ۱--^{۲}	ف (-۲-) = ۱--،
۶۰	۹	تنقاربا	تتقاربانہ
۷۰	۲۲	ما^{۲} = لا^{۵}	ما^{۳} = لا^{۵}
۷۹	۲۲	لحاد	لحاظ
۸۵	۱۴	ماورائی تفاعل	۲۸۔ ماورائی تفاعل
۸۵	۱۹	درستی	درسی
۱۰۰	۱۸	سنے	شے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰۱	۱۲	نیز	خیز
۱۰۳	۳	مف لا،	جب لا،
۱۰۶	۱۰	$\frac{ل}{ل} = ل$	$\frac{ل}{ل} = ل$
۱۱۳	۱۹	حاصل ہوتی	حاصل ہوتی ہے
۱۱۴	۱	= ۲۸	= ۳۸
۱۱۸	۲۰	ن	ن،
۱۲۲	۲	۱۴۰	ہ۴
۱۲۳	۱۲	تفاعل کا فرق ا سے ہمیشہ کم رہے	تفاعل کا فرق اے، ہمیشہ کم رہے
۱۲۶	۲۲	ی، و، ی	ع، و، ی
۱۲۷	۳	ھ، ر	ھ،
۱۳۴	۵	اور ا، ا	اور ا، ا،
۱۳۶	۴	مسبط	مستنبط
۱۳۶	۸	$نہا_{لا \to .}$ ف(لا) = ف(ا)	$نہا_{لا \to ا}$ ف(لا) = ف(ا)
۱۴۱	۸	نہا فہ(ع) = فہ(عَ)	نہا فہ(ع) = فہ(ع،)
۱۴۱	۸	ع	ع کی بجائے ی استعمال کیا جائے
۱۴۵	۳	$۱ - \frac{ن-۱}{م}$	$۱ - \frac{م-۱}{م}$
۱۵۰	۵	$نہا_{ن \to ۰}$	$نہا_{لا \to ۰}$
۱۶۲	۵	$\frac{مف\ ف(ت)}{مف\ ن}$	$\frac{مف\ فہ(ت)}{مف\ ت}$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۶۲	۱۸	$\text{مف}\left(\frac{\text{م}}{\text{ح}}\right)$	$\text{مف}\left(\frac{\text{م}}{\text{ح}}\right)$
۱۶۲	۱۸	$\frac{\text{م}}{\text{ح + مف ح}} \quad \frac{\text{م}}{\text{ح}}$	$\frac{\text{م}}{\text{ح + مف ح}} - \frac{\text{م}}{\text{ح}}$
۱۶۳	۳	مشق	مشتق
۱۶۵	۱	مشق	مشتق
۱۷۰	۳	نقطہ	نقطے
۱۷۴	۱۷	مَا = ۳ ت	مَا = ۲ ت
۱۷۹	۷	کرے۔	کرنے سے
۱۸۱	۲	فَا (لا)	فمَا (لا)
۱۸۳	۵	کہنے	لکھنے
۱۸۳	۱۱	ع، و، ھ ہوں	ع، و، ھ فٹ ہوں
۱۸۶	۸	نیال	خیال
۱۸۹	۴	مکافی	مکانی
۱۹۱	۲۰	-۲	-۴
۱۹۲	۱۰	$\text{وَ} = -\frac{\text{ک}}{\text{س}^{۲}}$	$\text{وَ} = -\frac{\text{ک}}{\text{س}^{۲}}$
۱۹۵	۲۰	$\frac{\text{فرما}}{\text{ولا}}$	$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
۱۹۷	۱۴	لا، مَا، مَا	لا، مَا، مَا
۱۹۷	۲۰	و ل - و ط	و ل - ط ل
۲۰۱	۱۴	$\text{مَا} = \frac{\text{فرما}}{\text{وت}}$	$\text{مَا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۰۶	۵	$\text{لا}_{۱}^{\frac{۲}{۴}}$	$\text{لا}_{۱}^{\frac{۲}{۳}}$
۲۱۲	۲۰	(دفعہ ۱۴۶)	دفعہ ، ۳ حصۂ دوم
۲۱۵	۱	$\text{عف}_{\text{لا}}\ \text{جب}^{-۱}\ \text{لا}$	(۱) $\text{عف}_{\text{لا}_{۱}}\ \text{جب}^{-۱}\ \text{لا}$
۲۲۳	۱۳	$\text{لوک ما} = \frac{}{۲}\ \text{لوک لا} - ۱$	$\text{لوک ما} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\ (\text{لا}_{۱} - ۱)$
۲۲۶	۱۱	$\frac{\text{د}}{۲}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{د}}} - \text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{د}}}\right)$	$\frac{\text{د}}{۲}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{د}_{۱}}} - \text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{د}}}\right)$
۲۳۴	۱۹	ہشدہم	باب ششم حصۂ دوم
۲۳۶	۴	$\text{عف}^{۲}_{\text{د}}\ \text{ماَ}$	$\text{عف}^{۲}_{\text{لا}}\ \text{ما}$
۲۴۰	۵	٫۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹۰	٫۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹۰......
۲۴۵	۱۸	عَ = ع ت + مستقل	ع = ع ت + مستقل
۲۵۱	۱۸	$\frac{\text{م}}{\text{د}}$	$\frac{\text{م}}{\text{د}_{۱}}$
۲۵۲	۳	$\text{ک}_{۱} = \frac{\text{م}}{\text{د}} - \frac{\text{م}}{\text{ب}}$	$\text{ک}_{۱} = \frac{\text{م}}{\text{د}_{۱}} - \frac{\text{م}}{\text{ب}_{۱}}$
۲۵۲	۱۸	۱۹۵	دفعہ ۱۹۵
۲۷۶	۷	باب ہژدہم	باب ششم حصۂ دوم
۲۹۱	۱۰	متساوی الاضلاع	متساوی الساقین
۳۱۲	۳	۳	$۳_{۱}$
۳۱۲	۲۴	نقطہ سے و	نقطہ و
۳۱۹	۱۳	صحیح عدد ہیں	صحیح عدد نہیں

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۳۶	۹	نقطہ قضا کے	نقطہ فضا کے
۳۳۶	۱۹	$(\text{ی}_2 - \text{ی})^2$	$(\text{ی}_2 - \text{ی}_1)^2$
۳۵۱	۱۳	کوئی نقطہ (لا، ما، ی)	کوئی نقطہ (لا، ما، ی) ہے
۳۵۲	۵	مستوی $\text{م}_1 \text{م}_4$	مستوی $\text{م}_1 \text{م}_3$
۳۵۴	۱۴	گندے	گذرے
۳۶۷	۲۰	فرما =	فرما = ۰
۳۶۸	۹	ہوجود	موجود
۳۷۲	۶	$\text{ق} = \frac{\text{م}}{\text{ر}}$	$\text{ق} = \frac{\text{م}}{\text{ر}^2}$
۳۷۲	۸	$\frac{\text{لا}}{\text{ر}}\,\text{ق} = \frac{\text{م لا}}{\text{ر}^2}$	$\frac{\text{لا}}{\text{ر}}\,\text{ق} = \frac{\text{م لا}}{\text{ر}^3}$
۳۷۲	۹	$\frac{\text{م}}{\text{ر}^2}$	$\frac{\text{م}}{\text{ر}^3}$
۳۷۳	۲۱		............(۱)
۳۸۰	۱۲	نہیں ہے	نہیں ہیں
۳۸۲	۱۴	$\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{فطہ}^2}$ کی بجائے	$\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{فت}^2}$ کی بجائے
۳۸۳	۱۶	اسی طرح	اس طرح
۳۹۲	۳	طہ کی بجائے مہ	طہ کو مہ کی رقوم میں
۳۹۲	۱۵	$\frac{4}{\text{ما ر}}$	$\frac{4}{\text{مار}}$
۳۹۷	۱۳	نقطہ (عہ، -)	نقطہ (عہ، ۰)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۹۹	۱۰	ف (لا) = ،	ف (لا) = ۰،
۴۰۵	۱۸	فہ (ا + ھ	فہ (ا + ھ)
۴۱۶	۳	۱۰۶ ے	۱۰۶ کے
۴۱۸	۴	ز ق	ر ق
۴۱۸	۱۷	ا+ھ ے درمیان	ا + ھ کے درمیان
۴۲۵	۱۸	$\text{ما}^{۲} = ۲\,\text{ا}\,\text{لا}^{۲}$	$\text{ما}^{۲} = ۲\,\text{ا}\,\text{لا}^{۲}$
۴۲۶	۸	$(۲)\ (\text{ما} - \text{لا}^{۳})^{۲}$	$(۲)\ (\text{ما} - \text{لا}^{۲})^{۲}$

جوابات

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴۳۰	۱۴	$-۲\ \text{ت}^{\frac{۳}{۲}}$	$-۲\ \text{ت}^{-\frac{۳}{۲}}$
۴۳۱	۶	$\frac{۲(\text{لا}+۱)(\text{لا}^{۳}-۱)}{\text{لا}^{۲}}$	$\frac{۲(\text{لا}+۱)(\text{لا}^{۳}-۱)}{\text{لا}^{۳}}$
۴۴۰	۲	صفحہ ۳۵۱	صفحہ ۳۵۶
